

离子有限拉摩半径效应对低频 漂移波本征模的影响*

张 承 福

(北京大学物理系)

提 要

本文指出,对于 $S_y \equiv k_y \rho_i \lesssim 1$ 的短波模,通常所用的漂移波本征方程是不自洽的,由此而得出“普适模是稳定的”结论也是不恰当的. 我们在弱剪切条件 ($L_s/r_n \gg [2T_i m_i / T_e m_e]^{1/2}$) 下导出了适合 $S_y \geq 1$ 的方程,并讨论了其近似表式. 在最低级近似下(主要是忽略 $k_y \rho_i$ 项),证明了不存在 $\gamma \geq 0$ 的不稳定模式. 考虑一级修正项后,尚不能得出确定的结论.

一、引 言

在环形磁剪切体系中,低频漂移波的每种模式 (m, n) 只能局域地存在于相应的有理磁面 r_0 (安全因子 $q(r_0) = m/n$ 处) 附近. 漂移波的稳定性问题原则上是本征值问题. 近年来,这方面工作有了较大进展. Pearlstein 和 Berk 等人的较早工作表明^[1-3], 在弱剪切的不均匀体系中,无碰撞漂移波的增长率随横向波长的减小而增加,短波模是不稳定的. 然而, Ross 等人的近期工作表明^[4-6], 前人计算中忽略了电子色散函数 Z_e 的主值部分(非共振电子部分), 它虽然只在有理磁面附近很小区域不为零,但却可以显著影响本征值. 保留此项后,恒有增长率 $\gamma \leq 0$, 即通常所谓的“普适模”(Universal mode) 实际上是稳定的. Antonson Jr.^[7] 用简洁的解析方法证明了 $\gamma > 0$ 的解不存在. Lee 和 Chen^[8] 进而用“通量守恒”方法证明了 $\gamma = 0$ 的解也不存在,即只有 $\gamma < 0$ 的阻尼波.

此结论与以前的观念很不相同,引起了广泛兴趣. 由于低频漂移波是磁约束等离子体反常输运的重要原因之一,其不稳定性的条件及可能的后果是什么? 是值得关心和研究的问题.

我们认为,对于 $T_i \rightarrow 0$, 即离子拉摩半径效应可以忽略的情形,上述论证是充分的. 但对于 $T_i \neq 0$ 的实际情形,上述论证在理论上有不自洽之处. 问题在于: 作为论证的出发点,他们采用了下述方程:

$$\rho_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1 - \delta(1 - Z_e) - \Gamma_0 Z_i}{(\Gamma_0 - \Gamma_1) Z_e} \varphi, \quad (1)$$

其中 ρ_i 是离子拉摩半径, $\delta = (1 - \Omega) / (1 + \tau \Omega)$, $\Omega = \omega / \omega_{*e}$, $\omega_{*e} = k_y C T_e / |e| B r_n$, $r_n = |d \ln n / dx|^{-1}$, $\Gamma_{0,1} \equiv \Gamma_{0,1}(S_y) = e^{-S_y} I_{0,1}(S_y)$, $I_{0,1}$ 是虚宗量贝塞耳函数, $\tau = T_e / T_i$,

* 1979年7月16日收到.

$S_y = k_y^2 \rho_i^2$, $Z_{e,i} = Z(\Omega x_{e,i}/|x|)$ 是电子、离子色散函数, $x_e = L_s \rho_i / r_n \times [T_e m_e / 2 T_i m_i]^{1/2}$, $x_i = L_s \rho_i T_e / (\sqrt{2} r_n T_i)$, L_s 是磁剪切长度, $Z(z) = 2ze^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt - i\sqrt{\pi} ze^{-z^2}$.

(1) 式是在 $|\rho_i^2 \varphi''/\varphi| \ll 1$ 的假定下, 对 $\varphi(x)$ 作泰勒展开, 保留到二次项得到的^[9, 21]. 然而, 下面分析表明, 对于 $S_y \lesssim 1$ 的短波模, 在 $x = 0$ 附近, 上述假设不成立, 由(1)式出发论证短波模的稳定性是不自洽的. 此外, 在 $|x| > \Omega x_i$ 的区域, (1) 式也有不自洽之处. 因此, 需要导出自洽的方程, 对短波模的稳定性作重新考察.

二、(1) 式对短波模的不自洽性

首先分析保留完全的 Z_e (而不仅仅是其虚部) 意味着什么. 在漂移波存在的主要区域内 ($x_e < |x| < x_i$), 离子主要作横向漂移, 电子则沿磁力线作纵向响应. 忽略 $\text{Re } Z_e$ 项就是认为在 $x = 0$ 附近也是如此. 实际上, 在 $x = 0$ 附近, 波的纵向相速度大于电子热速度, 电子也只能作漂移运动, 这就是 $\text{Re } Z_e \simeq 1 \neq 0$ 的物理意义. 这对 $\varphi(x)$ 有很大影响. 由于 $\rho_e k_y \simeq 0$, 而 $\rho_i k_y$ 则是有限值, e, i 的电漂移速度不相等, 在电子不能作纵向响应的情况下, 为满足准电中性条件 (或泊松方程), $\varphi(x)$ 必成图 1 形态 (对于偶模). 简单分析易知, 在 $Z_e \simeq 1$ 的区域内, 应该有

$$k_x^2 + k_y^2 = 0.$$

即有

$$\varphi(x) = \varphi_0 \begin{cases} \text{ch } k_y x & (\text{偶模}), \\ \text{sh } k_y x & (\text{奇模}). \end{cases} \quad (2)$$

对于(2)式的电势, $\rho_i^{2n} \varphi^{(2n)}/\varphi \sim S_y^n$, 当 $S_y \gtrsim 1$ 时它不是小量. 因此, 在该区对 $\varphi(x)$ 作泰勒展开是不合适的^[9, 21].

(1) 式可由另一种推导方法得到, 令

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp \left[i \int_0^x k_x(x_1) dx_1 \right]. \quad (3)$$

在 ρ_i 范围内对 k_x 作展开, 保留到一次项, 即

$$k_x(x_1) \simeq k_x(x) + k'_x(x)(x_1 - x). \quad (4)$$

可以证明, 在 $|k_x \rho_i| \ll 1$, $|k'_x \rho_i^2| \ll 1$ 的条件下, 可以得到(1)式. 然而, 当 $S_y \lesssim 1$ 时, 考虑到真实解具有(2)式的形式, 对于(3)式的电势, $|k'_x \rho_i^2|$ 不是小量, 近似式(4)同样是不适当的.

这一矛盾也可由(1)与(2)式的比较直接看出. 在 $x = 0$ 附近, $Z_e \simeq Z_i \simeq 1$, (1)式成为

$$\rho_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1 - \Gamma_0}{\Gamma_0 - \Gamma_1} \varphi. \quad (5)$$

而由(2)式知, 该区 $\varphi(x)$ 的方程应该是

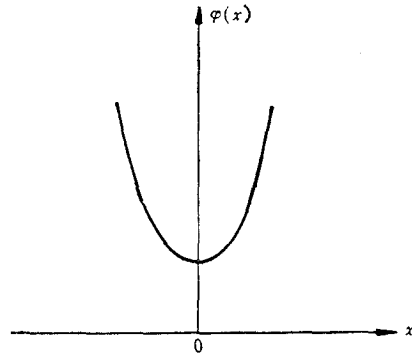


图 1 $\varphi(x)$ 定性图

$$\rho_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = S_y \varphi. \quad (6)$$

由图 2 可以看出, 仅当 $S_y \ll 1$ 时两式一致, 而当 $S_y \lesssim 1$ 时差别很大. 注意到, 文献 [1—3]

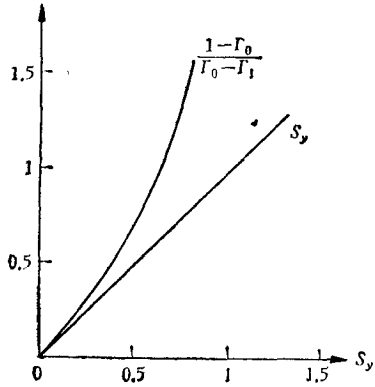


图 2

正是由于忽略了 $\text{Re}Z_e$ 项(因而在 $x=0$ 附近, $\varphi(x)$ 是平坦的函数), 得出了不正确的本征值; 那末, (1) 式同样没有正确反映 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 附近的行为(当 S_y 增加时, 它使 $\varphi(x)$ 过分陡了), 由此求得的本征值的可靠性是有疑问的.

至于 $|x| \rightarrow \infty$ 时, (1) 式的不自洽性是明显的. 当 $|x| \gg \Omega x_i$ 时 $Z_e \simeq 0$, $Z_i \rightarrow 0$, 由 (1) 式得

$$|\rho_i^2 \varphi'' / \varphi| \rightarrow \infty.$$

这与原假设不符. 当然, 在该区漂移波已经被离子强烈阻尼, 这一差别可能不很重要, 本文暂不考虑此问题.

总之, 当 $T_i \neq 0$ 时, 至少对于 $S_y \lesssim 1$ 的短波模, 通常所用的 (1) 式在理论上是不自洽的, 需要重新推导合适的方程.

三、弱剪切条件下的本征方程

为简明起见, 本文只讨论稳定性最小的偶模情形, 并设只有密度梯度, 取平板模型.

为克服上述矛盾, 设 $\varphi(x)$ 具有如下形式:

$$\varphi = \varphi(x) e^{ik_y y - i\omega t}$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \text{ch } k_y x \cdot e^{i \int_0^x k(x_1) dx_1}. \quad (7)$$

因此, $k(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的关系是

$$ik(x) = \varphi' / \varphi - k_y \text{th } k_y x, \quad (8)$$

$$ik'(x) = \varphi'' / \varphi + k^2 - k_y^2 - 2ik k_y \text{th } k_y x$$

$$= \varphi'' / \varphi + (k \mp ik_y)^2 \pm 4ik k_y / (1 + e^{\pm 2k_y x}). \quad (9)$$

对于偶模, $\varphi'(0) = 0$, 由 (8) 式可得 $k(0) = 0$. 分析表明, $k(x)$ 随 x 的变化是由 $Z_{e,i}$ 的变化引起的, 最大变化率来自 $|dZ_e/dx| \lesssim 1/x_e$. 因此, 当 $x_e \gg \rho_i$ 时, 即在 $L_s/r_n \gg [2T_i m_i / T_e m_e]^{1/2}$ 的弱剪切条件下, $|k' \rho_i^2|$ 是小量, 可作小量展开. (这是本文的基本近似. 考虑弱剪切情形, 一则在于数学上较易处理, 二则也因为, 从物理上考虑, 剪切是阻尼因素, 若有不稳定性, 应首先在弱剪切情形表现出来). 因而有

$$k(x_1) \simeq k(x) + (x_1 - x) k'(x). \quad (10)$$

则由 (7) 式可得

$$\varphi(x_1) / \varphi(x) = [1 + e^{-2k_y x}]^{-1} \cdot e^{ik_-(x_1-x) + \frac{i}{2} k'(x)(x_1-x)^2}$$

$$+ [1 + e^{2k_y x}]^{-1} \cdot e^{ik_+(x_1-x) + \frac{i}{2} k'(x)(x_1-x)^2}, \quad (11)$$

其中

$$k_{\pm}(x) = k(x) \pm ik_y. \quad (12)$$

有了(11)式,以下可采用标准的轨道积分法计算。计算主要步骤见附录。计算中用到如下条件: 低频条件 $|\omega/\Omega_i| = |\omega m_i C/eB| \ll 1$; $|k'\rho_i^2|$ 是小量(即弱剪切条件),保留到一级项; 波长大于电子德拜长度 λ_{De} , 可用准电中性条件(通常 $\lambda_{De} \sim \rho_e \ll \rho_i$, 此条件易满足)。可算得色散方程为

$$\begin{aligned} & [\Gamma_0(S_-) + ik'\rho_i^2 A(S_-)]/[1 + e^{-2k_y x}] \\ & + [\Gamma_0(S_+) + ik'\rho_i^2 A(S_+)]/[1 + e^{2k_y x}] = f(x) \equiv \frac{1 - \delta(1 - Z_c)}{Z_i}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= S_y + S_{x\pm} = (k^2 \pm 2ik_k k_y) \rho_i^2, \\ S_{x\pm} &= k_{\pm} \rho_i^2 = (k \pm ik_y)^2 \rho_i^2, \\ A(S_{\pm}) &= (1 - 4S_{x\pm})[\Gamma_0(S_{\pm}) - \Gamma_1(S_{\pm})] + \frac{2S_{x\pm}}{S_{\pm}} \Gamma_1(S_{\pm}). \end{aligned} \quad (14)$$

k, k' 与 φ 的关系由(8)和(9)式给出,其余符号与(1)式同。在(13)式中,并不要求 S_{\pm} 或 $S_{x\pm}$ 是小量。不难看出,如果 $S_y \ll 1$, $|S_{x\pm}| \ll 1$, 则(13)式与(1)式等价,一般情形下两者不相同。

由于偶模的对称性,可只讨论 $x \geq 0$ 的区域。为此,宜将(13)及(9)式改写为

$$\begin{aligned} & [\Gamma_0(S_-) + ik'\rho_i^2 A(S_-)] + [1 + e^{2k_y x}]^{-1} \cdot \{[\Gamma_0(S_+) - \Gamma_0(S_-)] \\ & + ik'\rho_i^2 [A(S_+) - A(S_-)]\} = f(x), \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$ik'\rho_i^2 = \rho_i^2 \varphi''/\varphi + S_{x-} + \frac{4ikk_y \rho_i^2}{1 + e^{2k_y x}}. \quad (15.2)$$

(15.1)式左端第二大项含有 $[1 + e^{2k_y x}]^{-1}$ 因子,其有贡献的范围是 $|x| \gtrsim 1/k_y$ 。在此范围内, $|k| < |k'_{\max}|/k_y$, 即 $|kk_y \rho_i^2| < |k'_{\max} \rho_i^2|$, 在弱剪切条件下,这是小量。而 $|k^2 \rho_i^2| < |k'_{\max} \rho_i^2|^2/S_y$, 对于 $S_y \lesssim 1$ 情形,这是更小的量;对于 $S_y < 1$ 的情形,考虑到实际上 $k'_{\max} \sim k_y/x_e$, $|k^2 \rho_i^2| \gtrsim \rho_i^2/x_e^2 \ll 1$, 这也是小量。总之,对于该项中的 $\Gamma_0(S_{\pm}), A(S_{\pm})$ 总可作小量展开,保留到一级项,得(对 $x \geq 0$ 区)

$$\begin{aligned} & [\Gamma_0(S_-) + A(S_-)(\rho_i^2 \varphi''/\varphi + S_{x-})] \\ & + (2 + 3S_y) \frac{4ikk_y \rho_i^2}{1 + e^{2k_y x}} = f(x). \end{aligned} \quad (16)$$

而对于 $x \leq 0$ 的区域,则应写成

$$\begin{aligned} & [\Gamma_0(S_+) + A(S_+)(\rho_i^2 \varphi''/\varphi + S_{x+})] \\ & - \frac{4ikk_y \rho_i^2}{1 + e^{-2k_y x}} (2 + 3S_y) = f(x). \end{aligned} \quad (17)$$

两式在 $x = 0$ 处重合。它们对 $S_y \geq 1$ 都适用。

四、方程的近似求解

(16)式(或(17)式)、(14)式加上表达 k 与 φ 关系的(8)式,可视为 $\varphi(x)$ 的微分方程。

一般情形下, $\Gamma_0(S_-)$, $A(S_-)$ 不能表为 φ'/φ 的简单函数, 求解是很困难的. 下面利用小量展开方法, 对(16)式的近似解作一探讨.

若令

$$D(x) = A(S_-)ik'\rho_i^2 + \frac{4ikk_y\rho_i^2}{1 + e^{2k_yx}}. \quad (18)$$

利用(9)式及对指数项中的 $A(S_-)$ 作展开, 可证明(16)式与(18)式等价于下述两式:

$$A(S_-)(\rho_i^2\varphi''/\varphi + S_{x-}) = D(x) - (2 + 3S_y) \frac{4ikk_y\rho_i^2}{1 + e^{2k_yx}}, \quad (19.1)$$

$$\Gamma_0(S_-) = f(x) - D(x). \quad (19.2)$$

注意到 $D(x)$ 中的第一项是正比于 $k'\rho_i^2$ 的小量, 由于前节的论证, 第二项也是正比于 $k'\rho_i^2$ 的小量, 所以 $D(x)$ 是小量, 可用叠代法近似求解.

1. 零级近似

若取 $D^{(0)}(x) = 0$, 则(19)式成为

$$\rho_i^2\varphi''/\varphi + S_{x-} = -\frac{2 + 3S_y}{A(S_-)} \cdot \frac{4ikk_y\rho_i^2}{1 + e^{2k_yx}}, \quad (20.1)$$

$$\Gamma_0(S_-) = f(x) \equiv [1 - \delta(1 - Z_c)]/Z_i. \quad (20.2)$$

若进而忽略(20.1)式右端的小项(它正比于 $k'\rho_i^2$. 将证明, 考虑此项不影响下述结论), 则(20)式成为

$$\rho_i^2\varphi'' = -S_{x-}\varphi, \quad (21.1)$$

$$\Gamma_0(S_-) = \Gamma_0(S_y + S_{x-}) = f(x). \quad (21.2)$$

(21)式与文献[10]中所用的方程相似, 其主要近似是忽略了 $k'\rho_i^2$ 级的项. 但有两点不同: (a) (21)式是作为(19)式的零级近似出现的, 在理论上没有不自洽性. (b) (21)式可视为 S_{x-} 与 $\varphi(x)$ 的联立方程, 原则上, 由代数方程(21.2)解出 $S_{x-}(x)$, 再由(21.1)式解 $\varphi(x)$ 的二阶齐次方程. 这比文献[10]中解 $\varphi(x)$ 的积分方程要容易. 下面用物理类比的方法可以证明(21)式不存在 $\gamma = 0$ 的解.

假设存在 $\gamma = 0$ 的解, 令 $x = -i\eta$, η 是正实数, 则(21)式变为

$$\rho_i^2 \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = S_\eta\varphi, \quad (22.1)$$

$$\Gamma_0(S_y + S_\eta) = f(\eta) = \frac{1 - \delta G(\eta/\Omega x_c)}{1 - G(\eta/\Omega x_i)}, \quad (22.2)$$

其中[7]

$$G(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2} \frac{\zeta^2 t^2}{1 + \zeta^2 t^2}. \quad (23)$$

当 ζ 是实数时, $G(\zeta)$ 是 ζ 的单调实函数, 当 ζ 由 $0 \rightarrow \infty$ 时, $G(\zeta)$ 由 $0 \rightarrow 1$. $\gamma = 0$ 时, Ω 与 δ 都是实数, 则由(22.2)式定出的 $S_\eta(\eta)$ 也是实数. 因此, (22.1)式与量子力学中的势阱问题很相似, 可用物理类比的方法讨论(22)式的稳定性.

图3给出当 S 是实数时 $\Gamma_0(S)$ 与 S 的关系. 图4是根据 G 函数的渐近行为画出的 $f(\eta)$ 定性变化. 由图3, 4可知, $S_\eta(\eta)$ 的定性变化不外乎由图5给出的两种情形之一.

(这里并不需要知道其精确形态及究竟属哪种情形.)

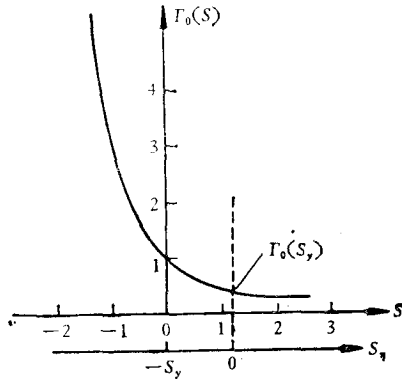


图3 $\Gamma_0(S)$ - S 图

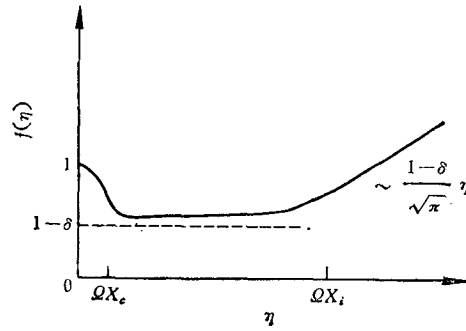


图4 $f(\eta)$ - η 定性图

显然, 对于图 5(a) 形态的势阱(对于 $\pm\eta$ 对称), 不可能存在 $E = 0$ 的束缚态. 对于图 5(b) 形态的势阱, 由于存在隧道效应, 稳定的束缚态也是不可能的. 因此, 无论属哪种情形, 都不存在 $\gamma = 0$ 的解.

这种物理类比法与文献 [8] 的“通量守恒”方法实际上是一致的. 由于 S_η 是实函数, 由(22)式可证

$$\frac{d}{d\eta} \mathcal{S}(\eta) = 0,$$

$$\mathcal{S}(\eta) = -i \left(\varphi^* \frac{d\varphi}{d\eta} - \varphi \frac{d\varphi^*}{d\eta} \right). \quad (24)$$

对于偶模, $\mathcal{S}(0) = 0$, 所以应有 $\mathcal{S}(\eta) \equiv 0$. 而当 $\eta \rightarrow \infty$ 时 $\varphi(\eta)$ 的渐近式可由 W. K. B. 近似得到

$$\varphi(\eta) \simeq B(-S_\eta)^{-\frac{1}{4}} e^{i \int^{\eta} \sqrt{-S_\eta} d\eta_i}. \quad (25)$$

由图 5 知, 当 η 很大时总有 $-S_\eta > 0$, 故由 (24), (25) 式可得

$$\mathcal{S}(\eta) \simeq 2|B|^2 \quad (\eta \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

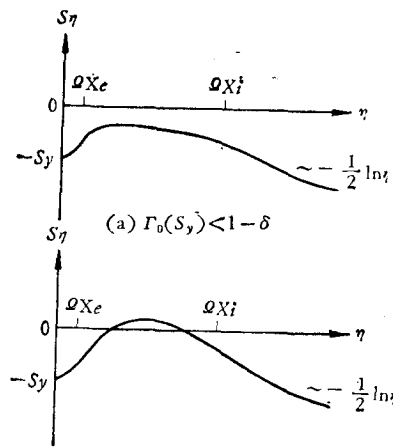
为满足通量守恒, 必需 $B = 0$, 即证明了 $\gamma = 0$ 的解不存在.

考虑到本征值的连续性, 以及 $S_y \ll 1$ 时存在阻尼解^[5](此时(1)式是基本成立的), 这就表明(21)式不存在 $\gamma \geq 0$ 的解.

下面证明, 保留(20.1)式右端的项并不影响上述结论. 根据前节的论证, 在该项有贡献的范围内, $k^2 \rho_i^2$ 和 $k k_y \rho_i^2$ 都是小量, $S_- = (k^2 - 2i k k_y) \rho_i^2 \simeq -2i k k_y \rho_i^2$, $A(S_-) \simeq 1 + 3S_y$, 所以(20.1)式右端项可表为

$$\frac{2S_-}{1 + e^{2kyx}} \cdot \frac{2 + 3S_y}{1 + 3S_y}. \quad (26)$$

为了能将 x 合适地变换到 η 轴上去, 需对 (26) 式中的指数函数作适当改造. 例如可用 $[2 + 6.4(k_y x)^4]^{-1}$ 近似代替 $[1 + e^{2kyx}]^{-1}$, 两者的基本形态是一致的. (由物理上考虑,



(a) $\Gamma_0(S_y) < 1 - \delta$

(b) $\Gamma_0(S_y) > 1 - \delta$

图5 $S_\eta(\eta)$ 定性图

存在的小差别不应引起由稳定到不稳定的明显差别;而且,实际上可用更好的 $F(k_1 x^4)$ 函数来逼近它,下面的论证法同样适用.)经此改造后,作变换 $x = -i\eta$, 修正项变为

$$\frac{2 + 3S_y}{1 + 3S_y} \cdot \frac{2(S_y + S_\eta)}{2 + 6.4(k_y \eta)^4} \quad (27)$$

当 $\gamma = 0$ 时,它也是 η 的实函数,仍有“通量守恒”关系,而且此项对 $\varphi(\eta)$ 的渐近解无影响. 因此,上面的论证方法及结论仍成立,即(20)式也没有 $\gamma \geq 0$ 的解.

2. 一级近似方程

按叠代法,取

$$D^{(1)}(x) = \left[A(S_-) i k' \rho_i^2 + \frac{4 i k k_y \rho_i^2}{1 + e^{2k_y x}} \right]_0 \quad (28)$$

其中 $[\dots]_0$ 表示括号中的 k, k', S_- 都用零级方程解出的值. 零级方程为

$$\Gamma_0(S_-) = f(x). \quad (29)$$

对 x 求微商,可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Gamma'_0(S_-) \frac{dS_-}{dx} = \Gamma'_0(S_-) \cdot 2k'(k - ik_y)\rho_i^2 \\ &= -2\sqrt{S_{x-}} k' \rho_i \Gamma'_0(S_-). \end{aligned} \quad (30)$$

将(30)式代入(28)式,忽略指数项中的高级小量,得

$$D^{(1)}(x) = \left[-iA(S_-) \frac{f'(x)\rho_i}{2\sqrt{S_{x-}}\Gamma'_0(S_-)} - \frac{2S_-}{1 + e^{2k_y x}} \right]. \quad (31)$$

则由(19)式得一级方程为

$$\rho_i^2 \varphi''/\varphi + S_{x-} = \left[\frac{D^{(1)}(x)}{A(S_-)} + \frac{2S_-}{1 + e^{2k_y x}} \cdot \frac{2 + 3S_y}{1 + 3S_y} \right], \quad (32.1)$$

$$\Gamma_0(S_-) = f(x) - D^{(1)}(x). \quad (32.2)$$

设 $S^{(0)}$ 和 $S_{x-}^{(0)}$ 是满足零级方程的值,由于 $D^{(1)}(x)$ 是小量, $(S_- - S^{(0)})$ 也应是小量,由(32.2)式可求出

$$S_{x-} - S_{x-}^{(0)} = S_- - S^{(0)} = -\frac{D^{(1)}(x)}{\Gamma'_0(S^{(0)})}. \quad (33)$$

由此可将(32)式改写为(为书写简便,以下将 $S^{(0)}$ 写为 S , $S_{x-}^{(0)}$ 写为 S_x)

$$\rho_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = [-S_x + \mathcal{D}^{(1)}(x)] \varphi, \quad (34.1)$$

$$\Gamma_0(S) = \Gamma_0(S_y + S_x) = f(x) \equiv [1 - \delta(1 - Z_e)]/Z_i, \quad (34.2)$$

其中

$$\mathcal{D}^{(1)}(x) = i\sqrt{S_x} f'(x) \rho_i \left[\frac{2}{\Gamma_0 - \Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{S(\Gamma_0 - \Gamma_1)^2} \right] + \frac{4S}{1 + e^{2k_y x}}. \quad (35)$$

这样,确定 S_x 的方程(34.2)仍与零级方程同,而 $\varphi(x)$ 的方程(34.1)则有一级修正项 $\mathcal{D}^{(1)}(x)$. 其中 $\Gamma_{0,1}$ 的宗量都是 $S = S_x + S_y$. 如上所述, $\mathcal{D}^{(1)}(x)$ 中最后一项(指数因子项)并不会导致 $\gamma \geq 0$ 的解,主要项是正比于 $f'(x)\rho_i$ 的项,而

$$f'(x)\rho_i = \delta \rho_i \frac{dZ_e}{dx} - \frac{(1 - \delta)}{Z_i^2} \rho_i \frac{dZ_i}{dx}. \quad (36)$$

它正比于剪切强度 r_n/L_s , 而且有 $|f'(x)\rho_i|_{\max} \cong \rho_i/x_e$, 若 ρ_i/x_e 是小量(即本文所要求的弱剪切条件), 则 $f'(x)\rho_i$ 和 $\mathcal{D}^{(1)}(x)$ 都是小量, 上述处理自洽。

下面用“通量守恒”方法试探一下(34)式是否允许 $\gamma = 0$ 的解存在。假定 $\gamma = 0$, 作变换 $x = -i\eta$ (对 $\mathcal{D}^{(1)}(x)$ 中的指数因子, 仍需按前述加以改造), 则由(34)式可得

$$\frac{d\mathcal{F}(\eta)}{d\eta} = 2|\varphi|^2 \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{S_\eta} \frac{df(\eta)}{d\eta} \left(\frac{2}{\Gamma_0 - \Gamma_1} + \frac{\Gamma_1}{S(\Gamma_0 - \Gamma_1)} \right) \right\}, \quad (37.1)$$

$$\Gamma_0(S) = \Gamma_0(S_y + S_\eta) = f(\eta) = [1 - \delta G(\eta/\Omega x_e)]/[1 - G(\eta/\Omega x_i)]. \quad (37.2)$$

这里 $f(\eta)$, S_η , $\Gamma_{0,1}(S)$ 都是实函数。但从图 5 知, 一定存在 $S_\eta < 0$ 的区域, 即 $\sqrt{S_\eta}$ 存在虚数部分, 故(37.1)式右端不为零, 即考虑一级修正项后通量不再守恒, 用此法不能断定 $\gamma = 0$ 的解可否存在。关于一级方程的本征值问题有待进一步研究。

四、结 语

上述分析表明, 在 $T_i \cong 0$ 的实际情形, 由于离子有限拉摩半径效应, 漂移波本征值问题比 $T_i = 0$ 情形复杂得多。对于 $S_y \cong 1$ 的短波模, 通常所采用的(1)式是不自洽的, 由此而得到“普适模是稳定的”这一结论是需要重新考察的。本文在弱剪切条件下得到了适合 $S_y \cong 1$ 的方程, 并证明了在零级近似下(主要忽略 $k'\rho_i^2$ 项), 不存在 $\gamma \geq 0$ 的解。但考虑一级修正项后, 尚不能肯定上述结论。

附 录

色散方程的推导要点

在线性理论中, 扰动分布函数 $f_1 = f - f_0$ 满足方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} - \frac{e}{m} \nabla \varphi) \cdot \nabla_v f_0 = 0, \quad (A.1)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{B}/mc$ 。

采用未扰动轨道积分法求解 f_1 。粒子的零级轨道满足方程

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_1), \quad (A.2)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{eB_0}{mc} \mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_0 \frac{x}{L_s} \mathbf{e}_y$ 。若忽略 x^2/L_s^2 和 ρ/r_n 级的小量, 则(A.2)式可解得

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{v_{\perp 0}}{\Omega_0} \sin(\alpha - \Omega_0 t), \\ y &= y_0 + \frac{v_{z0} x_0 t}{L_s} + \frac{v_{\perp 0}}{\Omega_0} \cos(\alpha - \Omega_0 t), \\ z &= z_0 + v_{z0} t. \end{aligned} \quad (A.3)$$

由(11)式知, 在弱剪切条件下有

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_1) &= \varphi(\mathbf{r}) \left\{ (1 + e^{-2kyx})^{-1} e^{ik_-(x_1-x) + ik_y(y_1-y) + \frac{1}{2} k'(x)(x_1-x)^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 + e^{2kyx})^{-1} e^{ik_+(x_1-x) + ik_y(y_1-y) + \frac{1}{2} k'(x)(x_1-x)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (A.4)$$

用轨道积分法, 由(A.1), (A.3), (A.4)式可求出(已忽略 ρ/r_n 级小量)

$$f_1(t) = -\frac{e\varphi(t)}{T} f_M - i \frac{e\varphi(t)}{T} [\omega - \omega_*] f_M \cdot \left\{ \frac{I_-}{1 + e^{-2kyx}} + \frac{I_+}{1 + e^{2kyx}} \right\}, \quad (A.5)$$

其中 $\omega_* = -c\Gamma k_y / eB_0 r_n$, f_M 是麦氏分布,

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^t dt_1 \exp \left\{ -i(\omega - k_y v_{z0})(t_1 - t) \right. \\ \left. + i\xi_{\pm} [\sin(\phi_{\pm} - \alpha + \Omega_0 t_1) - \sin(\phi_{\pm} - \alpha - \Omega_0 t)] \right. \\ \left. + i\xi_{\pm} \left[1 - \frac{1}{2} \cos(2\alpha - 2\Omega_0 t_1) - \frac{1}{2} \cos(2\alpha - 2\Omega_0 t) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(2\alpha - \Omega_0(t_1 + t)) - \cos(\Omega_0(t - t_1)) \right] \right\}, \quad (\text{A.6})$$

其中

$$\begin{aligned} \tan \phi_{\pm} &= k_y / k_{\pm}(x); & k_{\parallel} &= k_y x / l_x; \\ \xi_{\pm} &= \sqrt{k_y^2 + k_{\pm}^2 v_{\perp 0}^2} / \Omega_0; & \xi_1 &= \frac{1}{2} k'(x) v_{\perp 0}^2 / \Omega_0^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

利用贝塞耳函数展开, 可将 (A.6) 式化为

$$I_{\pm} = e^{i\xi_1} \sum_{\substack{n_1, n_2, l_1, \\ l_2, l_3, l_4 \\ =-\infty}}^{\infty} (-i)^{l_1+l_2+l_4} (i)^{l_3} J_{n_1}(\xi_{\pm}) J_{n_2}(\xi_{\pm}) \\ \times J_{l_1} \left(\frac{\xi_1}{2} \right) J_{l_2} \left(\frac{\xi_1}{2} \right) J_{l_3}(\xi_1) J_{l_4}(\xi_1) \times \exp \{ i(n_1 - n_2)\phi_{\pm} \\ + i(\alpha - \Omega_0 t)(2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + n_2 - n_1) \} \times i\xi [\omega - k_y v_{z0} \\ - (n_1 - 2l_1 - l_3 - l_4)\Omega_0], \quad (\text{A.8})$$

其中

$$\xi(x) = -i \int_0^{\infty} d\tau e^{i x \tau}. \quad (\text{A.9})$$

当 I_{\pm} 对初速度方位角 α 平均时, 只有满足下式的项不为零:

$$n_1 - n_2 = 2(l_1 + l_2 + l_3). \quad (\text{A.10})$$

由此得到的色散方程是十分复杂的, 在以下极限情形下, (A.8) 式可大为简化:

1. 低频条件 $\omega / |\Omega_0| \ll 1$, 考虑到 $\xi(x)$ 的性质, 主要项满足条件

$$n_1 - 2l_1 - l_3 - l_4 = 0. \quad (\text{A.11})$$

2. 弱剪切条件 即 $|\xi_1| \sim |k'(x)\rho^2| \ll 1$, 保留到 ξ_1 一次项, 则 (A.8) 式中求和指标应满足条件

$$l_i = \pm 1, l_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j. \quad (\text{A.12})$$

由 (A.10) 和 (A.11) 式可得

$$\begin{aligned} n_1 &= 2l_1 + l_3 + l_4, \\ n_2 &= l_4 - 2l_2 - l_3. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

由此可求出

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\pm} &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{\pm} d\alpha = i\xi(\omega - k_y v_{z0}) \{ J_0^2(\xi_{\pm}) + i\xi_1 [J_0^2(\xi_{\pm}) \\ &\quad - (1 + \xi_{\pm}^2 \cos 2\phi_{\pm} + \cos 2\phi_{\pm}) J_1^2(\xi_{\pm}) + [J_1(\xi_{\pm})]' \cos 2\phi_{\pm}] \} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

由 (A.5) 式求扰动密度需对 $v_{\perp 0}$ 平均, 故这里可先对 \bar{I}_{\pm} 求平均:

$$\begin{aligned} \langle I_{\pm} \rangle &\equiv \int_0^{\infty} f_M(v_{\perp 0}) \bar{I}_{\pm} \cdot 2\pi v_{\perp 0} dv_{\perp 0} \\ &= i\xi(\omega - k_y v_{z0}) \{ \Gamma_0(S_{\pm}) + ik'\rho^2 [(1 - 2S_{\pm} \\ &\quad - 2S_{\pm} \cos 2\phi_{\pm}) \Gamma_0(S_{\pm}) + (2S_{\pm} + (1 + 2S_{\pm}) \\ &\quad \cdot \cos 2\phi_{\pm}) \Gamma_1(S_{\pm})] \}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

其中 $S_{\pm} = (k_y^2 + k_{\pm}^2)\rho^2$, $\rho^2 = \frac{T}{m\Omega_0^2}$, $\Gamma_n(S_{\pm}) = e^{-S_{\pm}} I_n(S_{\pm})$, $I_n(S_{\pm})$ 是虚宗量贝塞耳函数. 计算中已用到贝塞耳函数积分的有关性质.

注意到 $\cos 2\phi_{\pm} = 2 \cos^2 \phi_{\pm} - 1 = \frac{2S_{x\pm}}{S_{\pm}} - 1$. 其中 $S_{x\pm} = k_{\pm}^2 \rho^2$, $S_y = k_y^2 \rho^2$, $S_{\pm} = S_{x\pm} + S_y$, 则 (A.15)

式可表为

$$\langle I_{\pm} \rangle = i\xi(\omega - k_y v_{z0}) \{ \Gamma_0(S_{\pm}) + ik'\rho^2 A(S_{\pm}) \}, \quad (\text{A.16})$$

其中

$$A(S_{\pm}) = (1 - 4S_{x\pm})[\Gamma_0(S_{\pm}) - \Gamma_1(S_{\pm})] + \frac{2S_{x\pm}}{S_{\pm}} \Gamma_1(S_{\pm}). \quad (\text{A.17})$$

由(A.5)和(A.16)式,可求出扰动密度

$$n_i(t) = -\frac{e\varphi(t)}{T} n_0 \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_*}{\omega} Z\left(\frac{\omega}{|k_{\parallel}|v_T}\right) [(1 + e^{-2k_y x})^{-1} \cdot (\Gamma_0(S_-) + ik'\rho^2 A(S_-)) + (1 + e^{2k_y x})^{-1} (\Gamma_0(S_+) + ik'\rho^2 A(S_+))] \right\}. \quad (\text{A.18})$$

计算中用到 $\langle \xi(\omega - k_{\parallel}v_{z0}) \rangle = \frac{1}{\omega} Z\left(\frac{\omega}{|k_{\parallel}|v_T}\right)$.

(A.18)式对电子、离子均适用. 对于电子,令 $\rho_e \rightarrow 0$, 可得更简单的表式

$$n_{ie}(t) = \frac{|e|\varphi(t)}{T_e} n_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega}\right) Z_e \right\}. \quad (\text{A.19})$$

对于波长大于 λ_{De} 的波,由准电中性条件 $n_{ie}(t) = n_{ii}(t)$, 即可得到色散方程,就是本文(13)式.

参 考 文 献

- [1] L. D. Pearlstein and H. L. Berk, *Phys. Rev. Lett.*, **23**(1969), 220.
- [2] M. N. Rosenbluth and P. J. Catto, *Nucl. Fusion.*, **15**(1975), 573.
- [3] N. T. Gladd and W. Horton, *J. Phys. Fluids*, **16**(1973), 879.
- [4] D. W. Ross and S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 324.
- [5] K. T. Tsang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 327.
- [6] L. Chen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 649.
- [7] T. M. Antonson, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 33.
- [8] Y. C. Lee and L. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 708.
- [9] N. A. Krall and M. N. Rosenbluth, *J. Phys. Fluids*, **8**(1965), 1488.
- [10] Y. C. Lee and L. Chen, W. M. Nevins, PPPL-1544 (1979).

THE EFFECT OF FINITE ION LARMOR RADIUS ON THE EIGENMODES OF DRIFT WAVE

ZHANG CHENG-FU

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper, it is shown that in the practical case of $T_i \neq 0$, for short wavelength modes (i.e. $S_y \equiv k_y^2 \rho_i^2 \lesssim 1$), the usually adopted eigen-equation of drift wave is theoretically inconsistent, consequently, the inference that "The universal mode in fact is stable" is also inappropriate. Under the condition of low magnetic field shear ($L_s/r_n \gg [2T_i m_i / T_e m_e]^{1/2}$), a consistent eigen-equation of drift wave is deduced, which is valid for $S_y \lesssim 1$ as well as for $S_y < 1$. In order to solve this equation, an approximate treatment is discussed. In the lowest order (mainly neglecting the terms of order $k'\rho_i^2$), it can be shown that there is no unstable mode (i.e. there is no solution with $\gamma > 0$). But if the correction term is taken into account, no definite conclusion about its stability can be obtained as yet.