

## 研究简报

# 逃逸电子不稳定性\*

夏蒙芬      周如玲

(北京大学物理系)      (中国科学院物理研究所)

### 提 要

本文分析了逃逸电子的加速运动对微观不稳定性的影响,并指出,加速效应改变了波与粒子之间的动力学耦合关系,不稳定性机制不能再归结为简单的共振粒子与波的耦合效应。本文在动力学方程和特征线方程中同时引入零级电场,以这种自洽的方式讨论不稳定性问题,并不考虑加速效应的情形作了比较。结果表明,当共振速度远离逃逸区的边界时,加速效应不导致增长率的显著改变,但当共振速度落在逃逸区的边界附近时,加速效应可能对增长率发生重要影响。

### 一、引 言

逃逸电子现象是等离子体物理学中很引人注目的一个问题。逃逸电子的基本特征之一是处于持续加速的状态。这种加速运动对于与逃逸电子相联系的不稳定性有什么影响呢?尚未看到有人对此做过认真的研究。本文的目的就是要探索这个问题。

分析波与粒子之间的动力学耦合效应是讨论微观不稳定性的基础。在通常的理论中,共振粒子效应起着基本的作用,这种概念是基于匀速运动(或沿磁场作匀速运动)的粒子与波之间的耦合。由于逃逸电子作加速运动,它与波的耦合效应将与匀速情形不同,原则上不再有共振粒子概念。粒子可通过加速而进入速度空间的共振区,又将被加速而跑出共振区,因而,只能说粒子在加速过程中可通过接近共振和远离共振的阶段,而不再能把粒子区分为共振与非共振粒子。

### 二、逃逸电子对不稳定性的贡献

对不稳定性的分析所采用的方法与一般文献相似。逃逸电子的零级分布函数也近似地取为

$$f_0 = \frac{\alpha_r n_c}{\pi v_c^2} e^{-v_x^2/v_c^2} \frac{1}{v_l - v_c} \theta(v_x) \quad \theta(v_x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } v_c \leq v_x \leq v_l; \\ 0 & \text{当 } v_x < v_c \text{ 或 } v_x > v_l. \end{cases} \quad (1)$$

$\alpha_r \ll 1$  是逃逸电子相对浓度,  $v_c$  为临界逃逸速度,  $v_l$  为速度上限。但是本文与其它文献

\* 1979年8月7日收到。

不同,我们在动力学方程与特征线方程中同时引入零级电场. 特征线方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right).\end{aligned}\quad (2)$$

这里比通常所用的方程多了一个零级电场  $\mathbf{E}_0$  项,正是此项导致加速运动. 假定  $\mathbf{E}_0$  与  $\mathbf{B}_0$  均在  $Z$  方向,则  $Z$  方向的轨道方程为

$$\begin{aligned}v_z &= v_{z1} + a_0(t - t_1), \\ z &= z_1 + v_{z1}(t - t_1) + \frac{1}{2} a_0(t - t_1)^2.\end{aligned}\quad (3)$$

$z_1$  与  $v_{z1}$  是  $t = t_1$  时刻在  $Z$  方向的坐标与速度.  $a_0$  为电场引起的加速度(取坐标使  $a_0$  为正);

$$a_0 = eE_0/m_e. \quad (4)$$

(3)式表明,由于加速效应,沿特征线(即零级轨道)积分时,  $v_z$  不再保持为常数,这使得粒子在运动过程中感受到的扰动场的位相不同于无加速的情形. 从而,波与粒子之间的动力学耦合效应也将发生相应的变化.

在这种模型下,一个在  $t$  时刻具有  $v_z$  速度的逃逸电子,它进入逃逸区的时刻为

$$t_0 = t - (v_z - v_c)/a_0. \quad (5)$$

作为逃逸电子,总寿命是有限的,

$$\tau_r = (v_i - v_c)/a_0. \quad (6)$$

对  $B_0 \approx 0$  情形的一般模式(包括电磁效应),得到逃逸电子对介电张量的贡献  $\epsilon_r$  为

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\alpha_r \omega_c^2 e^{-\mu}}{\omega_r^2 (v_i - v_c)} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \theta(v_z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( A_1 + nQ \sqrt{\frac{\pi}{a_0 |k_z|}} A_2 \right) \mathbf{Q} \right. \\ &\quad \left. + \omega_r \sqrt{\frac{\pi}{a_0 |k_z|}} A_2 \mathbf{P} \right\},\end{aligned}\quad (7)$$

其中

$$\omega_c^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}, \quad \mu = \frac{k_{\perp}^2 v_c^2}{2Q^2}, \quad Q = \frac{eB_0}{m_e c},$$

$$A_1 = \cos(Z_c^2 - Z^2) - 1 + i \frac{k_z}{|k_z|} \sin(Z_c^2 - Z^2),$$

$$A_2 = \{ \sin Z^2 \cdot [C(Z_c) - C(Z)] - \cos Z^2 \cdot [S(Z_c) - S(Z)] \}$$

$$+ i \frac{k_z}{|k_z|} \{ \cos Z^2 \cdot [C(Z_c) - C(Z)] + \sin Z^2 \cdot [S(Z_c) - S(Z)] \},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{\perp}}{k_z} n^2 \mu I_n(\mu) \\ 0 & 0 & -i \frac{k_{\perp}}{k_z} n [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] \\ 0 & 0 & \frac{k_{\perp}}{k_z} \frac{n}{\mu} I_n(\mu) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\mu} I_n(\mu) & in[I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & -\frac{k_{\perp}}{k_z} n^2 \mu I_n(\mu) \\ -in[I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & \left(\frac{n^2}{\mu} + 2\mu\right) I_n(\mu) - 2\mu I'_n(\mu) & in \frac{k_{\perp}}{k_z} [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] \\ \frac{n}{\mu} \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} I_n(\mu) & i \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & -\frac{k_{\perp}}{k_z} \frac{n}{\mu} I_n(\mu) \end{pmatrix},$$

而

$$Z = \frac{\omega_r - k_z v_z - n\Omega}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}, \quad Z_c = \frac{\omega_r - k_z v_c - n\Omega}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}, \quad Z_l = \frac{\omega_r - k_z v_l - n\Omega}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}, \quad (8)$$

$I_n$  与  $I'_n$  是虚宗量贝塞耳函数及其微商,  $C$  和  $S$  是费涅耳积分

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt. \quad (9)$$

我们所得到的—般结果(7)式与通常的不考虑加速效应时的结果有很大差别, 当  $a_0 \rightarrow 0$ , 便回到通常的无加速情形的结果,

$$\epsilon_r^0 = \frac{\alpha_r \omega_c^2 e^{-\mu}}{\omega_r^2 (v_l - v_c)} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \theta(v_z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{-(\omega_r - k_z v_z)}{\omega_r - k_z v_z - n\Omega} \mathbf{Q}^0 + \mathbf{P}^0 \right\}, \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{P}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} \frac{n}{\mu} I_n(\mu) \\ 0 & 0 & -i \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \frac{k_{\perp}^2 v_z^2}{\Omega^2} I_n(\mu) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\mu} I_n(\mu) & in[I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & \frac{n^2}{\mu} \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} I_n(\mu) \\ -in[I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & \left(\frac{n^2}{\mu} + 2\mu\right) I_n(\mu) - 2\mu I'_n(\mu) & -i \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] \\ \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} \frac{n}{\mu} I_n(\mu) & i \frac{k_{\perp} v_z}{\Omega} [I_n(\mu) - I'_n(\mu)] & \frac{k_{\perp}^2 v_z^2}{\mu \Omega^2} I_n(\mu) \end{pmatrix}.$$

为了简单起见, 我们只讨论加速效应对静电模的影响. 对静电模, 只须求出逃逸电子对介电函数虚部的贡献  $\text{Im} \epsilon_r$ .

对  $B_0 \approx 0$  时的静电模, 得到

$$\text{Im} \epsilon_r = \frac{2\pi\alpha_r \omega_c^2 e^{-\mu}}{k^2 v_c^2 (v_l - v_c)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Omega I_n(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\theta(v_z)}{\sqrt{2a_0 |k_z|}} D, \quad (11)$$

$$= \frac{2\pi\alpha_r \omega_c^2 e^{-\mu}}{k^2 v_c^2 (v_l - v_c) |k_z|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Omega I_n(\mu) \Theta, \quad (12)$$

其中

$$D = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_z}{|k_z|} \{ \cos Z^2 \cdot [C(Z_c) - C(Z)] + \sin Z^2 \cdot [S(Z_c) - S(Z)] \}, \quad (13)$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \{ [C(Z_c) - C(Z_l)]^2 + [S(Z_c) - S(Z_l)]^2 \}. \quad (14)$$

当  $k_z \rightarrow 0$  时, 变为

$$\text{Im } \varepsilon_r = \frac{2\pi\alpha_r\omega_c^2 e^{-\mu}}{k^2 v_c^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Omega I_n(\mu) D_0, \quad (15)$$

其中

$$D_0 = \frac{1 - \cos \tau_r(\omega_r - n\Omega)}{\pi \tau_r(\omega_r - n\Omega)^2}. \quad (16)$$

对  $B_0 = 0$  时的静电模, 得到

$$\text{Im } \varepsilon_r = \frac{2\sqrt{\pi} \alpha_r \omega_c^2}{k^2 v_c^2 (v_l - v_c)} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\theta(v_z)}{\sqrt{2a_0 |k_z|}} k_{\perp} v_x e^{-v_z^2/v_c^2} D, \quad (17)$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi} \alpha_r \omega_c^2}{k^2 v_c^2 (v_l - v_c) |k_z|} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x k_{\perp} v_x e^{-v_x^2/v_c^2} \Theta. \quad (18)$$

当  $k_z \rightarrow 0$  时变为

$$\text{Im } \varepsilon_r = \frac{2\sqrt{\pi} \alpha_r \omega_c^2}{k^2 v_c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x k_{\perp} v_x e^{-v_x^2/v_c^2} D_0, \quad (19)$$

其中,  $D$  与  $\Theta$  的定义与 (13)、(14) 式相同, 但  $Z$  的定义改为

$$Z = \frac{\omega_r - k_z v_z - k_{\perp} v_x}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}, \quad Z_c = \frac{\omega_r - k_z v_c - k_{\perp} v_x}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}, \quad Z_l = \frac{\omega_r - k_z v_l - k_{\perp} v_x}{\sqrt{2a_0 |k_z|}}. \quad (20)$$

$D_0$  的定义也与 (16) 式相似 
$$D_0 = \frac{1 - \tau_r(\omega_r - k_{\perp} v_x)}{\pi \tau_r(\omega_r - k_{\perp} v_x)^2}. \quad (21)$$

当  $a_0 \rightarrow 0$ , 回到无加速情形时, 相当于对 (11)、(12) 式及 (15) 或 (17)、(18) 及 (19) 式作下述代换:  $D/\sqrt{2a_0 |k_z|} \rightarrow \delta(\omega_r - k_z v_z - n\Omega)$  或  $\delta(\omega_r - k_z v_z - k_{\perp} v_x)$ , (22)

$$\Theta \rightarrow \theta\left(\frac{\omega_r - n\Omega}{k_z}\right) \text{ 或 } \theta\left(\frac{\omega_r - k_{\perp} v_x}{k_z}\right), \quad (23)$$

$$D_0 \rightarrow \delta(\omega_r - n\Omega) \text{ 或 } \delta(\omega_r - k_{\perp} v_x). \quad (24)$$

代换关系 (22)、(23) 与 (24) 式反映了逃逸电子的加速运动对微观不稳定性 (静电模) 的影响。

### 三、数值计算结果与讨论

对  $k_z = 0$  的静电模, 加速效应的影响表现为代换关系 (24) 式。  $D_0$  的形态与  $\delta$  函数相似, 但具有有限宽度  $2\pi/\tau_r$ 。显然, 这仅仅是反映了逃逸电子的有限寿命效应。  $k_z = 0$  时, 加速度方向与波矢互相垂直, 加速运动不改变波与粒子之间的耦合关系, 仍可有共振粒子的概念。在实际的参数范围内, 这种有限寿命的展宽效应一般是不重要的。

现在讨论  $k_z \neq 0$  的情形。此时, 加速效应的影响表现为代换关系 (22) 或 (23) 式。

先讨论 (22) 式给出的  $\delta$  与  $D$  之间的代换, 它们的函数形式反映了速度空间中具有不同  $v_z$  的粒子对不稳定性的贡献。无加速情形的  $\delta$  函数, 表明只有共振粒子对不稳定性有贡献。考虑加速效应后, 变为复杂的  $D$  函数。图 1 是  $D$  在共振速度附近的形态。  $Z = 0$

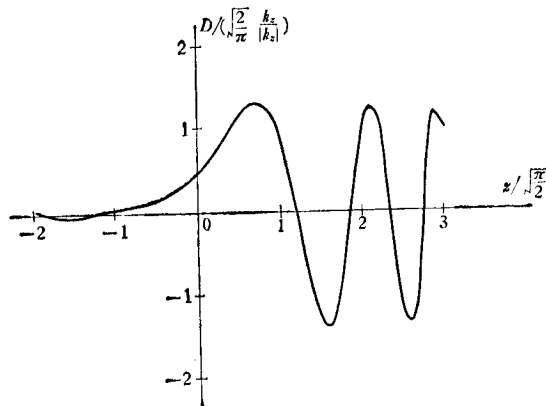


图1 加速效应对波-粒子耦合效应的影响

相对于共振附近的行为而言,这是快振荡的,但其振幅与共振附近同量级。由以上可知, $D$ 的形态与 $\delta$ 函数有很大差别,表明有加速效应时,波与粒子的耦合关系与匀速情形很不相同,不稳定的机制不能再归结为波与粒子之间的简单的共振效应。

现讨论(23)式给出的 $\theta$ 与 $\Theta$ 之间的代换。 $\theta$ 或 $\Theta$ 是与增长率成比例的。 $\theta$ 可表示为

$$\theta = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad (27)$$

其中

$$\zeta = Z_c \cdot Z_f / |Z_c \cdot Z_f|, \quad (28)$$

当共振落在逃逸区内( $v_c < v_r < v_f$ )时, $Z_c$ 与 $Z_f$ 异号, $\zeta = -1$ , $\theta = 1$ ;否则, $\theta = 0$ 。

当共振速度 $v_r$ 离逃逸区端点 $v_c$ 和 $v_f$ 足够远时(即 $|Z_c|, |Z_f| \gg 1$ ),有

$$\Theta \cong \frac{1}{2}(1 - \zeta) + \frac{(1 - \zeta)}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{|Z_c|} \sin\left(Z_c^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{|Z_f|} \sin\left(Z_f^2 - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (29)$$

(29)式中的第二项仅是小修正。比较(27)与(29)式,可看到当共振速度离逃逸区端点很远时,加速效应不引起增长率的显著改变。

现考虑共振速度 $v_r$ 接近逃逸区上边界 $v_f$ 的情形( $|Z_c| \gg 1, |Z_f| \sim 1$ ),此时有

$$\Theta \cong \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \frac{Z_c}{|Z_c|} - c(Z_f) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \frac{Z_c}{|Z_c|} - s(Z_f) \right]^2 \right\}. \quad (30)$$

其形状如图2所示。 $\Theta$ 与 $\theta$ 的相对大小代表了 $a_0 \neq 0$ 与 $a_0 \rightarrow 0$ 时逃逸电子对增长率 $\gamma$ 的贡献的相对大小。由图2可看出, $v_f < v_r$ 时 $\theta = 0$ ,而 $\Theta$ 有一低而长的尾巴; $v_f > v_r$ 时 $\theta = 1$ ,而 $\Theta$ 从1/4逐渐上升到一极大值 $\sim 1.35$ (在 $|Z_f| \sim 1.5$ 处),然后下降并呈阻尼振荡的形态,逐渐趋向于 $\theta (= 1)$ 。这个结果表明,在 $|Z_f| \lesssim \sqrt{2\pi}$ 范围,即

$$|v_f - v_r| \lesssim \sqrt{4\pi a_0 / |k_x|} \equiv \Delta v_0, \quad (31)$$

有加速效应与无加速效应的增长率可有重要区别。

在实际条件下,特征宽度 $\Delta v_0$ 并不大。如在通常的托卡马克参数下,一般有 $\Delta v_0 \sim 10^6 \text{cm/sec}$ 。但在一定条件下,加速效应对不稳定性的影响可起重要作用。例如,在零级电场作用下,逃逸电子分布的高能尾不断向前延伸( $v_f \sim a_0 t$ )。当 $v_f$ 越过某个共振速度时,将出现相应的不稳定性。若其特征增长时间 $\gamma^{-1} < \Delta v_0 / a_0$ ,则加速效应对这种不稳定性

相应于共振速度 $v_r$ 。图1中, $Z < 0$ 相应于 $v_z < v_r$ , $Z > 0$ 相应于 $v_z > v_r$ (即 $Z_c < 0$ ,还假定 $|Z_c| \gg 1$ , $v_r$ 离 $v_c$ 很远)。在 $v_z \ll v_r$ 区域,有

$$D \cong \frac{1}{\pi Z_c} \frac{k_x}{|k_x|} \sin(Z_c^2 - Z^2). \quad (25)$$

相对于共振附近的行为而言,这是小振幅的快振荡。在 $v_z \gg v_r$ 的区域,有

$$D \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k_x}{|k_x|} \left\{ 2 \sin\left(Z^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{Z_c} \sin(Z_c^2 - Z^2) \right\}. \quad (26)$$

将是重要的。不稳定性发展的结果, 最终将导致分布函数的各向同性化。然后, 又将重复上述过程。这种弛豫振荡型的周期性现象, 可能联系于托卡马克中出现的逃逸电子束不稳定性。例如, 在文献[1]中有详细的讨论。本文的结果表明, 在这些问题中考虑逃逸电子的加速运动是必要的。

以上讨论的是静电模, 至于电磁模, 比较(7)或(10)式可知, 加速效应的影响要更复杂一些。主要原因之一是加速效应对电磁效应有特殊的影响。例如, 联系于扰动磁场的洛仑兹力是一种与速度有关的作用, 因而将受加速效应的影响。

现将本文总结如下: 本文在动力学方程与特征线方程中同时引入零级电场, 以这种自洽的方式讨论不稳定性问题, 研究逃逸电子的加速运动对不稳定性的影响。考虑加速效应后, 原则上不再有共振粒子的概念, 波与粒子之间的动力学耦合关系发生了变化。不稳定性的机制不能再简单地归结为波与共振粒子的耦合, 但与粒子在加速过程中是否通过共振区有密切关系。当共振速度远离逃逸区端点时, 加速效应不导致增长率的显著变化; 但当共振速度接近逃逸区的边界时, 加速效应对增长率的影响将是重要的。

### 参 考 文 献

- [1] V. V. Parail *et al.*, *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 303.

## INSTABILITIES DUE TO RUNAWAY ELECTRONS

XIA MENG-FEN

(Department of Physics, Peking University)

ZHOU RU-LING

(Institute of Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

In this paper, the effect of acceleration of runaway electrons on the microscopic instabilities is discussed. The result shows that the mechanism of instabilities is no longer a simple wave-particle resonant effect. When the resonant velocity is far away from the boundaries of the velocity region of runaway electrons, the growth rate is not considerably different from that in the no acceleration case. However, if it is close to the boundaries, the effect of acceleration on the growth rate will be important.

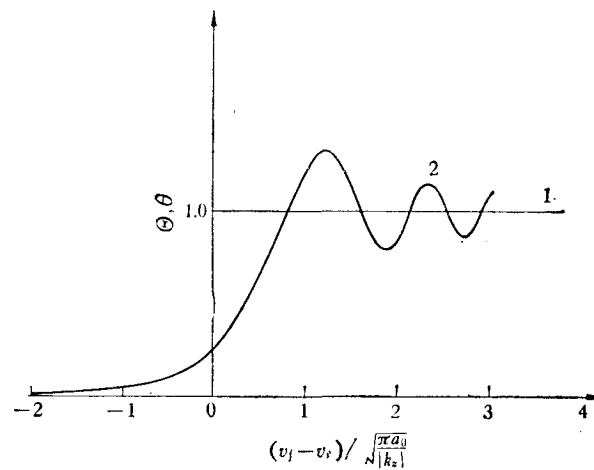


图2 加速效应对增长率的影响

曲线1为 $\theta$ , 即 $a_0 = 0$ 情形;

曲线2为 $\Theta$ , 即 $a_0 \neq 0$ 情形。