

五维空间中电子的流体结构尝试

彭 桓 武

(中国科学院理论物理研究所)

1981年1月28日收到

提 要

本文从电磁势的规范变换出发引入第五维空间和一个新场量。这个新场量在电子内部起重要作用：在电磁方程中它表现为电容率和磁导率，在短程线式的运动方程中它的梯度产生邦卡勒力。这提供在五维空间中用一束世界线组成一个有限尺寸的电子的可能性；就此流体结构本文尝试用经典力学处理。找到流体方程的稳定解，给出电子内部的电动力学，知道没有球对称解。进一步假设电子内部物质运动的短程线都是零间隔的短程线，则电子内部的新场量可以唯一决定，这样便可求轴对称解。具体计算牵涉到求解联立的非线性偏微分方程组，对此将另文报道。

一、五维空间和带电的本质

我们讨论电子内部结构时，可以忽略引力效应。四维时空有狭义相对论的度规

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.1)$$

其中

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \text{ 而 } \mathbf{r} = (x, y, z).$$

我们混用矢量分析和张量分析符号，保留量纲常数 c ，但用名称不如符号严格。

我们期望对物质带电的本质有进一步的认识。如所熟知，电磁势 $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$ 可以差任意四维梯度而电场 $\mathbf{E}$ 、磁感 $\mathbf{B}$ 不变：

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (F_{10} = E_x, F_{23} = B_x). \quad (1.2)$$

因此可以引入一个新坐标 q (其量纲为静电制电荷)使一次微分式 $dq + A_\mu dx^\mu$ 在规范变换即 $q \rightarrow q + \chi(x^\mu)$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \chi_{,\mu}$ 下保持不变。为与四维时空的二次不变式(1.1)相结合，从量纲上考虑，我们还需要引入一个新场量 W ，它在规范变换时不变，并具有静电势的平方的量纲，而得五维度规如下：

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{1}{W} (dq + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (1.3)$$

同 $x^0 = ct$ 类似，令 $x^5 = bq$ ；量纲常数 c 与光有关，量纲常数 b 将与电子有关。 b 具有静电势的倒数的量纲，而

$$a_\mu = bA_\mu, \quad w = b^2W \quad (1.4)$$

为无量纲量。五维度规(1.3)式化为几何形式

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \frac{1}{w}(dx^5 + a_\mu dx^\mu)^2, \quad (1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{55} &= -\frac{1}{w}, \quad \gamma_{5\mu} = \gamma_{\mu 5} = -\frac{1}{w}a_\mu, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{w}a_\mu a_\nu. \end{aligned} \quad (1.6)$$

由于时间的过去和未来有严格的差别,不允许有连续的坐标变换能把 $-t$ 变到 t , 像空间所允许的那样,所以必须有符号关系:

$$w > 0. \quad (1.7)$$

用五维空间的几何语言讨论任意物质元的运动,令 x^i 代表其五维位置, dx^i 代表其五维位移. 先假定位移的五维间隔是非零的,依

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j \geq 0, \quad \text{令 } d\sigma = (\pm \gamma_{ij}dx^i dx^j)^{1/2}, \quad (1.8)$$

则 $d\sigma$ 为规范不变的正实数. 五维速度的逆变分量和协变分量(它们的量纲为 1)

$$u^i = \frac{dx^i}{d\sigma}, \quad u_i = \gamma_{ij}u^j = \gamma_{ij} \frac{dx^j}{d\sigma} \quad (1.9)$$

中,下列五个分量为规范不变量:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \quad u_5 = -\frac{1}{w} \left(\frac{dx^5}{d\sigma} + a_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right), \quad (1.10)$$

它们满足代数关系式

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - w(u_5)^2 = \gamma_{ij}u^i u^j = \varepsilon, \quad (1.11)$$

此处 ε 为数值常数.

依

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j \geq 0 \quad \text{有 } \varepsilon = \pm 1. \quad (1.12)$$

这五个分量又可改用与之成比例的量表示,如将(1.10)式中的分母改用 ds 或 dx^0 . 这样有

$$u^0:u_5 = v^0:v_5 = \beta^0:\beta_5, \quad (1.13)$$

其中 $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$ 即是狭义相对论的四维速度,而 β 为三维速度矢量除以 c , 又 $\beta^0 = 1$. 新引入的 v_5 或 β_5 和 u_5 一样都标志着规范不变的第五维速度分量. 我们将发现,当物质运动的第五维速度分量不为零时,物质便表现带电(这与当物质运动的三维速度不为零时物质便表现带有动量相似). 这概念可以用到电子内部物质运动上去,下面将再谈到.

我们将遇到的物质运动都是沿短程线上运动,其间隔在运动中守恒. 对于间隔为零的短程线,严格地讲,需要换用参数, $d\sigma$ 不用弧长(1.8)式定义,而是要求短程线方程形式不变,但 ε 数值改为零. (参考例如 Eisenhart^[1,2]). 但形式上讲也可以用极限处理,即将零间隔的短程线作为非零间隔的短程线的 $d\sigma \rightarrow 0$ 的极限,统一处理. 容易看出这两种作法是等效的. 在电子内部我们将假设物质运动的短程线是零间隔的.

二、短程线运动方程和邦卡勒力

设想电子内部为连续分布的物质在五维空间中运动。仿效 Dirac^[3] 对流体的处理：在流体占据的每个点上有一个逆变矢量密度 p^i ，它位于速度场 u^i 的方向，按下式决定连续的物质流，即： $p^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^5$ 为某时刻超体积元 $dx^1 dx^2 dx^3 dx^5$ 内的物质质量，而 $p^1 dx^0 dx^2 dx^3 dx^5$ 为时间 dx^0 内流过超面元 $dx^2 dx^3 dx^5$ 的物质质量等等。取 p^i 的量纲为 [能量/长度³]，并令

$$p^i = U \sqrt{\gamma} u^i, \quad (2.1)$$

其中比例系数五维标量密度(上下号依 $\gamma_{ij} dx^i dx^j \geq 0$ 定)

$$U \sqrt{\gamma} = (\pm \gamma_{ij} p^i p^j)^{1/2} \quad (2.2)$$

总为正实数。此处 γ 为 γ_{ij} 的行列式；由(1.6)式得

$$\gamma = 1/w. \quad (2.3)$$

假定物质守恒，有五维流体连续方程

$$p^i_{;i} = 0 \text{ 或 } (U u^i)_{;i} = 0, \quad (2.4)$$

其中 $|i$ 表示对五维度规的协变微商。流体的运动方程则从作用量

$$I_{\text{流体}} = \mp \int (\pm \gamma_{ij} p^i p^j)^{1/2} d^5 x \quad (2.5)$$

变分导出，变分时须利用下述运动学关系而进行部分积分。即设物质元的虚位移为 b^i ，则有

$$\delta p^i = (p^i b^i - p^i b^i)_{;i} \quad (\text{参见文献}[3](27.4)式) \quad (2.6)$$

这样，得到流体的运动方程

$$U \sqrt{\gamma} u^i (u_{i;i} - u_{i;i}) = 0 \quad (2.7)$$

或

$$U \sqrt{\gamma} u^i u_{i;i} = 0. \quad (2.8)$$

流体中每个物质元都沿一短程线

$$0 = u^i u_{i;j} = \gamma_{ik} u^i u^k_{;j} + \frac{1}{2} (\gamma_{il;j} + \gamma_{ij;l} - \gamma_{jl;i}) u^i u^j \quad (2.9)$$

运动，运动时有 $u^i u_i$ 守恒。对任意黎曼度规，短程线方程(2.9)又可以用正则方程定轨迹线的办法得到，参见文献[2] § 67。用正则方程

$$\frac{dx^i}{d\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{d\sigma} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}. \quad (2.10)$$

对于非奇异轨迹线(相当于非零间隔短程线)取

$$\mathcal{L} = \pm (\pm \gamma^{ij} u_i u_j)^{1/2}. \quad (2.11)$$

此处 γ^{ij} 由 γ_{ij} 决定，满足

$$\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta^i_k, \quad (2.12)$$

即

$$\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu 5} = \gamma^{5\mu} = -\eta^{\mu\nu} a_\nu,$$

$$\gamma^{55} = \eta^{\mu\nu} a_\mu a_\nu - w. \quad (2.13)$$

容易证明 $\mathcal{C}$ 沿轨迹线上守恒, 并不妨约定

$$(\pm \gamma^{ij} u_i u_j)^{1/2} = 1, \text{ 即 } \gamma^{ij} u_i u_j = \varepsilon. \quad (2.14)$$

这样在定轨迹线的正则方程

$$\frac{dx^i}{d\sigma} = \gamma^{ij} u_j, \quad \frac{du_i}{d\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{kl}}{\partial x^i} u_k u_l \quad (2.15)$$

中, 从前式解出 u_i 代入后式, 便得到短程线方程(2.9). 注意(2.9)和(2.15)式对 $d\sigma$ 都是齐次式的关系; 对于零间隔短程线和相应的奇异轨迹线, 它们的形式都约定不变^[2,2].

正则方程的前一半只是速度的逆变分量和协变分量间的关系, 后半是运动方程. 在我们情况下 a_μ 和 w 皆与 x^5 无关, 而在

$$\gamma^{ij} u_i u_j = \eta^{\mu\nu} (u_\mu - a_\mu u_5)(u_\nu - a_\nu u_5) - w(u_5)^2 \quad (2.16)$$

中, u_μ 和 a_μ 总是以组合 $u_\mu - a_\mu u_5$ 出现. 所以五个运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{du_\mu}{d\sigma} &= u^\nu a_{\nu,\mu} u_5 + \frac{1}{2} w_{,\mu} (u_5)^2, \\ \frac{du_5}{d\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

利用前一半正则方程给出的速度分量间的关系

$$u_\mu - a_\mu u_5 = \eta_{\mu\nu} u^\nu, \quad (2.18)$$

前四个运动方程也可化为规范不变形式(用(1.4),(1.2)式)

$$\eta_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\sigma} = u^\nu F_{\nu\mu}(bu_5) + \frac{1}{2} W_{,\mu} (bu_5)^2. \quad (2.19)$$

为更容易理解起见, 将 u^ν 用 v^ν 或 β^ν 表示. 利用(1.1)和(1.11)式, 得

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = w(u_5)^2 + \varepsilon = W(bu_5)^2 + \varepsilon. \quad (2.20)$$

所以

$$\frac{du^\nu}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left(v^\nu \frac{ds}{d\sigma} \right) = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left\{ \frac{dv^\nu}{ds} + \frac{v^\nu}{2} \frac{d}{ds} \log \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \right\}. \quad (2.21)$$

将(2.19)式两侧皆除以 $(ds/d\sigma)^2$, 得

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dv^\nu}{ds} = v^\nu F_{\nu\mu}(bv_5) + \frac{1}{2} (W_{,\mu} - \eta_{\mu\nu} v^\nu v^\lambda W_{,\lambda}) (bv_5)^2, \quad (2.22)$$

或用三维矢量表示, 上式两侧再除以 $(v^0)^2$, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \right] \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} &= (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})(b\beta_5) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ -\nabla W - \frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \right] W \right\} (b\beta_5)^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

和

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \right] \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})(b\beta_5) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} W - \frac{1}{1-\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \right] W \right\} (b\beta_5)^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

第五个运动方程表示 u_5 在运动中守恒:

$$\left[\frac{\partial}{c \partial t} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \right] u_5 = 0. \quad (2.25)$$

这一共为五个运动方程: (2.23)式算三个,和(2.24),(2.25)式. 我们注意(2.23)式中右侧出现梯度项,这正是邦卡勒^[4]在考虑电子内部的力的平衡时额外引进的力,用以抵消电子内部的库仑斥力. 在五维空间的短程线运动方程中,新场量 W 的梯度自然地产生邦卡勒力. 在下节中将恰恰利用这点来决定电子内部的新场量 W 或 w .

现在以上述流体为例具体说明物质带电的本质. 考察作用量 (2.5) 式在规范变换

$$\delta x^5 = b\chi(x^\mu), \quad \delta a_\mu = -b\chi_{,\mu}, \quad \delta w = 0 \quad (2.26)$$

下的变化. 一般有(利用(1.6)式以表达 $\delta\gamma_{ij}$).

$$\begin{aligned} \delta I_{\text{流体}} &= \int \left(-\frac{1}{2} T^{ij} \delta\gamma_{ij} \right) \sqrt{\gamma} d^5x \\ &= \int \left(-\frac{1}{2} T_{55} \delta w - T_5^\mu \delta a_\mu \right) \sqrt{\gamma} d^5x \\ &= \int \left(-\frac{1}{2} \rho b \beta_5 \delta W - \rho \delta \Phi + \rho \boldsymbol{\beta} \cdot \delta \mathbf{A} \right) d^5x, \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中

$$T^{ij} = U u^i u^j, \quad (2.28)$$

$$T_5^\mu = \gamma_{5i} T^{i\mu} = U u_5 u^\mu, \quad (2.29)$$

$$T_{55} = \gamma_{5i} \gamma_{5j} T^{ij} = U (u_5)^2, \quad (2.30)$$

而

$$\rho b \beta_5 = b^2 T_{55} \sqrt{\gamma} = U (b u_5)^2 \sqrt{\gamma}, \quad (2.31)$$

$$\rho = b T_5^0 \sqrt{\gamma} = U (b u_5) u^0 \sqrt{\gamma}, \quad (2.32)$$

$$\rho \boldsymbol{\beta} = b (T_5^1, T_5^2, T_5^3) \sqrt{\gamma} = U (b u_5) \mathbf{u} \sqrt{\gamma}. \quad (2.33)$$

代入(2.26)式,便见 $I_{\text{流体}}$ 的规范不变与下列守恒关系等价

$$\frac{\partial \rho}{c \partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\beta}) = 0 \text{ 或 } (b T_5^\mu \sqrt{\gamma})_{,\mu} = 0. \quad (2.34)$$

所以这一定是电量守恒方程, ρ 是物质带电的电荷密度, $\rho \boldsymbol{\beta}$ 则是电流矢量密度. 从

$$(\rho, \rho \boldsymbol{\beta}) = b T_5^\mu \sqrt{\gamma} = (b u_5) p^\mu \quad p^\mu = U \sqrt{\gamma} u^\mu, \quad (2.35)$$

容易看出(2.34)式即是 $b u_5$ 在运动中不变的(2.25)方程和物质守恒(2.4)式的后果, $b u_5$ 好像是物质的某种属性一样. 由于 b 的量纲为[静电势⁻¹], ρ 的量纲为[静电荷/长度³], 这按(2.35)式,与以前取定 p^i 的量纲为[能量/长度³]一致. 我们采取作用量(2.5)式,除 $\int d^5x$ 外,被积分量的量纲规定为[能量/长度³].

我们注意流体运动方程的原始形式(2.7)比(2.23)式多一个因子

$$U \sqrt{\gamma} (ds/d\sigma)^2 (dx^0/ds)^2 = U (u^0)^2 \sqrt{\gamma} = T^{00} \sqrt{\gamma}. \quad (2.36)$$

将(2.23)式两侧乘以 $T^{00} \sqrt{\gamma}$, 则右侧第一项化为库仑力和洛伦兹力密度(量纲为[力/长度³])

$$T^{00}\sqrt{\gamma}(b\beta_5)(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}), \quad (2.37)$$

其第二项给出邦卡勒力密度

$$\frac{1}{2} T^{00}\sqrt{\gamma}(b\beta_5)^2\{-\nabla W \cdots\} = \frac{1}{2} (b^2 T_{55}\sqrt{\gamma})\{-\nabla W \cdots\}. \quad (2.38)$$

五维空间的二阶对称张量密度 $T^{ij}\sqrt{\gamma}$ 和它的协变分量等等有下列十五个规范不变的分量:

$T^{\mu\nu}\sqrt{\gamma}$ 共十个, $bT_5^\mu\sqrt{\gamma}$ 共四个, $b^2T_{55}\sqrt{\gamma}$ 一个. 前面十个密度相当于狭义相对论中的能量密度等等, 而最后一个新密度从量纲上看来是某种径长密度, 具有量纲[长度/长度³]. 在我们的情况下有

$$\begin{aligned} b^2 T_{55}\sqrt{\gamma} &= (bT_5^0\sqrt{\gamma})^2/(T^{00}\sqrt{\gamma}) \\ &= (\text{电荷密度})^2/(\text{能量密度}). \end{aligned}$$

恰恰是这个新密度受 $\{-\nabla W \cdots\}$ 作用而产生邦卡勒力密度. 注意 W 的量纲也是力的量纲.

三、运动方程稳定解——流体结构

上节已给出电子内部物质的运动方程, 本节将给出其稳定解. 这样的解, 不仅在给定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 时满足流体运动方程, 而且在 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 发生无穷小的变化时依然满足运动方程; 所以它描述电子内部物质某种结构稳定的运动状态, 我们称之为流体结构. 由于短程线运动方程形式简单, 这问题容易找到一般解; 但我们宁愿从静态的轴对称的特殊情况作起, 觉得这样更直观些. 结果可以显然推广, 并将给出验证.

引入柱坐标 z, R, φ 和单位基矢

$$\mathbf{i}_z = (0, 0, 1), \mathbf{i}_R = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \mathbf{i}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad (3.1)$$

运用矢量算符

$$\nabla = \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{i}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial}{R \partial \varphi} \quad (3.2)$$

时, 注意 $\partial/\partial\varphi$ 作用在 $\mathbf{i}_R, \mathbf{i}_\varphi$ 上不为零:

$$\frac{\partial}{R \partial \varphi} \mathbf{i}_R = \frac{1}{R} \mathbf{i}_\varphi, \quad \frac{\partial}{R \partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi = -\frac{1}{R} \mathbf{i}_R. \quad (3.3)$$

对于静态的轴对称解, 所有分量皆不依赖于 t 和 φ . 容易分辨出 $E_z, E_R, B_z, B_R, A_\varphi, \beta_\varphi$ 为有限量, $A_z, A_R, \beta_z, \beta_R, B_\varphi$ 为无穷小量, 而 $E_\varphi = 0$. 五个运动方程(2.23), (2.24)(2.25)为

$$0 = (E_z - \beta_\varphi B_R)(b\beta_5) + \frac{1}{2} (-W_{,z})(b\beta_5)^2, \quad (3.4)$$

$$-\frac{\beta_\varphi^2}{R} = (E_R + \beta_\varphi B_z)(b\beta_5) + \frac{1}{2} (-W_{,R})(b\beta_5)^2, \quad (3.5)$$

$$\sqrt{1 - \beta_\varphi^2} \left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{R \partial R} \right) \frac{\beta_\varphi}{\sqrt{1 - \beta_\varphi^2}} = (\beta_z B_R - \beta_R B_z)(b\beta_5)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\beta_\varphi}{1 - \beta_\varphi^2} \left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) W \right\} (b\beta_5)^2, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{1 - \beta_\varphi^2} \left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\varphi^2}} = (\beta_z E_z + \beta_R E_R)(b\beta_5) \\ + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{1 - \beta_\varphi^2} \left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) W \right\} (b\beta_5)^2, \quad (3.7)$$

$$\left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) u_5 = 0. \quad (3.8)$$

后三个方程两侧皆为无穷小量,但对求稳定解必要。经过如下两步变化,(3.6),(3.7)式
[先乘以

$$u^0 = v^0 \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\varphi^2}} \sqrt{wu_5^2 + \varepsilon}, \quad (3.9)$$

把(3.6),(3.7)式化为

$$\left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) R \frac{\beta_\varphi \sqrt{wu_5^2 + \varepsilon}}{\sqrt{1 - \beta_\varphi^2}} - (\beta_z B_R - \beta_R B_z)(bu_5) = 0, \quad (3.10)$$

$$\left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{\sqrt{wu_5^2 + \varepsilon}}{\sqrt{1 - \beta_\varphi^2}} - (\beta_z E_z + \beta_R E_R)(bu_5) = 0. \quad (3.11)$$

然后除以 bu_5 并代入

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad E_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}, \\ B_z = \frac{\partial(RA_\varphi)}{R\partial R}, \quad B_R = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial(RA_\varphi)}{R\partial z}, \quad (3.12)$$

再整理]终于化为与(3.8)式同样形式,即

$$\frac{1}{R} \left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) \left\{ R \left(\frac{\beta_\varphi}{b\beta_5} + A_\varphi \right) \right\} = 0, \quad (3.13)$$

$$\left(\beta_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta_R \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{1}{b\beta_5} + \Phi \right) = 0. \quad (3.14)$$

当无穷小量 β_z, β_R 趋于零时,其比例由电磁场方程决定。引用下节的场方程(见(4.6)式):

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\rho\beta, \quad (3.15)$$

得

$$\beta_z : \beta_R = \frac{\partial}{\partial R} (RH_\varphi) : -\frac{\partial}{\partial z} H_\varphi = \frac{\partial(RH_\varphi)}{\partial R} : -\frac{\partial(RH_\varphi)}{\partial z}, \quad (3.16)$$

其中 H_φ 随 A_z, A_R 趋于零而趋于零。这样,从(3.8)式,即

$$\frac{\partial(RH_\varphi)}{\partial R} \frac{\partial u_5}{\partial z} - \frac{\partial(RH_\varphi)}{\partial z} \frac{\partial u_5}{\partial R} = 0 \quad (3.17)$$

解得 u_5 为 RH_φ 的任意函数 $f(RH_\varphi)$; 当 $H_\varphi \rightarrow 0$ 时, $u_5 \rightarrow f(0)$, 即不依赖于 z, R 的常数。换言之,不但每个物质元沿其短程线运动时有 u_5 守恒,而且从稳定性又要求电子内

部所有各个物质元的 u_5 彼此相等。同样,从(3.13)和(3.14)式得出 $R\left(\frac{\beta_\varphi}{b\beta_5} + A_\varphi\right)$ 和 $\frac{1}{b\beta_5} + \Phi$ 皆为常数;但 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 中只出现 Φ 和 RA_φ 的导数。所以适当选定规范可令此处常数为零。这样,后三个方程定出,

$$\frac{1}{b\beta_5} = -\Phi, \quad \frac{\beta_\varphi}{b\beta_5} = -A_\varphi, \quad u_5 = \text{常数} \quad (3.18)$$

将(3.12)式代入前两个方程(3.4)(3.5),除以 $b\beta_5$ 平方,并利用(3.18)式得

$$\frac{\partial}{\partial x} (W - \Phi^2 + A_\varphi^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial R} (W - \Phi^2 + A_\varphi^2) = 0. \quad (3.19)$$

积分常数可以从(3.18)式和(1.13),(1.11)式算出如下:

$$\begin{aligned} W - \Phi^2 + A_\varphi^2 &= W - \frac{1 - \beta_\varphi^2}{(b\beta_5)^2} = \frac{w(\beta_5)^2 - (1 - \beta_\varphi^2)}{(b\beta_5)^2} \\ &= \frac{w(u_5)^2 - \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}{(bu_5)^2} = \frac{-\gamma_{ij}u^i u^j}{(bu_5)^2} = -\frac{\varepsilon}{(bu_5)^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

我们注意(3.19)式恰好包含了邦卡勒力与库仑力、洛伦兹力的平衡(严格说还提供了向心力,见(3.5)式);但对于满足(3.18)式稳定性要求的运动而言,这个力的平衡与短程线上(1.11)式守恒相当。从(3.20)式定出

$$w = b^2 W = b^2 (\Phi^2 - A_\varphi^2) - \frac{\varepsilon}{(u_5)^2}. \quad (3.21)$$

此处左侧为规范不变量,右侧则是在适当选定规范后的表述。

上述结果显然可以推广如下:在适当选定规范下,运动方程的稳定解为

$$\frac{1}{b\beta_5} = -\Phi, \quad \frac{\beta}{b\beta_5} = -\mathbf{A}, \quad u_5 = \text{常数}, \quad (3.22)$$

$$w - b^2 (\Phi^2 - \mathbf{A}^2) = -\frac{\varepsilon}{(u_5)^2}. \quad (3.23)$$

这可以通过上面用过的两步变化,把(2.23),(2.24)式化为(2.25)形式的方程。更简单些是从运动方程的原始形式(2.7)式出发,直接验证(此处 χ 为任意函数)

$$u_5 = \text{常数}, \quad u_\mu = -(bu_5)\chi_{,\mu} \quad (3.24)$$

是解,所以(参考(2.18)和(1.13)式)得

$$\frac{\beta^\mu}{b\beta_5} = -\eta^{\mu\nu}(A_\nu + \chi_{,\nu}). \quad (3.25)$$

由短程线允许 $\gamma_{ij}u^i u^j = \text{守恒} = \varepsilon$,得 w 的规范不变的表达

$$w = \frac{\eta_{\mu\nu}\beta^\mu\beta^\nu}{(\beta_5)^2} - \frac{\varepsilon}{(u_5)^2}. \quad (3.26)$$

如选定规范令 $\chi_{,\mu}$ 为零,则(3.25),(3.26)式简化为(3.22)、(3.23)式。这解是稳定解,可从它使(2.27)式化为零这点来验证。验证时不妨选定规范而将(3.22),(3.23)式代入(2.27)式便可。

对于电子,我们根据它是带电粒子中最轻的粒子,在五维空间的运动中应该占有可与

光子在四维时空的运动中所占有的特殊地位相类似的特殊地位。所以,仿效光子运动的短程线是零间隔的四维短程线,我们假设电子内部物质运动的短程线也是零间隔的五维短程线。或换参数而把 ε 改为零,或取非零间隔的短程线的 $d\sigma \rightarrow 0$ 极限,都得到稳定解

$$\begin{aligned} \frac{1}{b\beta_5} &= -\Phi, \quad \frac{\beta}{b\beta_5} = -\mathbf{A} \quad (\text{在适当的规范下}); \\ w &= b^2(\Phi^2 - \mathbf{A}^2) = b^2W \quad (\text{电子内部}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

如不选定规范,则用(3.25),(3.26)式表达,其中 $\varepsilon/(u_5)^2$ 项改为零。这些方程表示,如 Φ 和 $\mathbf{A}$ 给定到一个规范变换,即如 $\mathbf{B}, \mathbf{E}$ 给定,则 β_5, β 和 w 均被决定。为定电子内部的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$, 或 Φ 和 $\mathbf{A}$, 则尚须考虑电子内部的电动力学。

四、电子内部的 Mie 型电动力学

引入五维度规(1.5)式使电动力学几何化。我们只是模仿爱因斯坦的几何化,而不考虑引力的广义相对论。五维度规的标量曲率^[5]

$$-\frac{1}{4w} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + 2\sqrt{w} \left[\frac{1}{\sqrt{w}} \right]_{,\lambda;\mu} \eta^{\lambda\mu}, \quad (4.1)$$

其中

$$f_{\mu\nu} = a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu} = bF_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

当乘以 $\sqrt{\gamma} d^5x$ 积分作电磁作用量时,(4.1)式的第二项贡献一个四维全散度,可以舍去。所以取电磁作用量

$$\begin{aligned} I_{\text{电磁}} &= \frac{1}{4\pi b^2} \int -\frac{1}{4w} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} \sqrt{\gamma} d^5x \\ &= \int -\frac{1}{8\pi w^{3/2}} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) d^4x dx^5. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在电子内部在适当的规范下,代入(3.27)式的 w , 我们得 Mie 型电动力学的如下具体形式:

$$\delta \int_{\text{内部}} L d^4x = \delta \int_{\text{内部}} -\frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{8\pi w^{3/2}} d^4x = 0, \quad (4.4)$$

其中和以下我们仍常用缩写

$$w = b^2W = b^2(\Phi^2 - \mathbf{A}^2). \quad (4.5)$$

从(4.4)式对 Φ 及 $\mathbf{A}$ 变分得场方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = 4\pi\rho\beta, \quad (4.6)$$

其中

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}/w^{3/2}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/w^{3/2}, \quad (4.7)$$

$$4\pi\rho = -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{w^{3/2}} \cdot \frac{\Phi}{W}, \quad (4.8)$$

$$4\pi\rho\beta = -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{w^{3/2}} \cdot \frac{\mathbf{A}}{W}. \quad (4.9)$$

与(3.27)式比较,后两式的比的确是那里的 β , 所以有

$$w = b^2 \Phi^2 (1 - \beta^2) > 0. \quad (4.10)$$

又可见下式永远非负:

$$\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = \frac{8\pi}{3} w^{3/2} W \rho b \beta_5 > 0 \quad (\text{电子内部}). \quad (4.11)$$

因为由(2.31)式知 $\rho b \beta_5$ 与 $U(u_5)^2$ 同号, 这排除了球对称结构的可能性, 因为 $\mathbf{B}$ 不能恒等于零.

用狭义相对论的标准作法^[6], 对于电子内部的 Mie 电动力学, 从(4.4)式导出能量密度 ε , 能流矢量密度 $\mathbf{S}$, 动量矢量密度 $\mathcal{G}$ 和动量流张量密度 $(-\mathcal{T})$, $\mathcal{T}$ 为应力张量. 在

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \rho \Phi, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} - c \rho \beta \Phi, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \rho \mathbf{A}, \quad (4.14)$$

$$-\mathcal{T} = -\frac{\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi} + \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} \right) \mathcal{T} - \rho \beta \mathbf{A} \quad (4.15)$$

中, 含 ρ 项即是流体的贡献 $T^{\mu\nu} \sqrt{\gamma}$. 譬如

$$-\rho \Phi = b u_5 u^0 U \sqrt{\gamma} / (b \beta_5) = T^{00} \sqrt{\gamma}. \quad (4.16)$$

但只对(4.12)–(4.15)式整体, 包括场的贡献在内, 才有简单的四维守恒关系, 如能量、动量

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathcal{T}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathcal{G}) + \nabla \cdot \{\mathbf{r} \times (-\mathcal{T})\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

和角动量的守恒. 如果从(4.6)式找到静态的轴对称解, (设 z 轴为对称轴), 则下列三个非零的守恒积分量可以与实验值比较:

$$\begin{aligned} \int_{\text{内部}} \rho d^3 \mathbf{r} &= e, \quad \int_{\text{内部}} \varepsilon d^3 \mathbf{r} = m c^2, \\ \int_{\text{内部}} (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{r} \times \mathcal{G}) d^3 \mathbf{r} &= h/2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

特别是对无量纲数, $e^2/\hbar c$ 的比较中, 量纲常数 b 自动消失. 电子内部的(4.6)式和其边界以外真空中的通常电磁方程要联立, 作边值问题处理, 这样好把真空中无穷远处电磁场为零的条件用上(这表示孤立电子不受外界电磁场作用的情况). 界面条件和通常两不同介质的情况相似. 界面本身待定. 如何决定电子边界, 具体求解和计算将另文报道.

参 考 文 献

- [1] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, §17, Princeton, (1926).

- [2] L. P. Eisenhart, Continuous Groups of Transformations, §67, Princeton, (1933).
- [3] P. A. M. Dirac, General Theory of Relativity, §27, John Wiley, (1975); 朱培豫译, 广义相对论, 科学出版社, (1979).
- [4] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron", R. C. Circ. mat. Palermo, 21(1906), 129. 转引自 W. Pauli, Theory of Relativity, Pergamon Press, (1958); 凌德洪、周万生译, 相对论, 上海科学技术出版社, (1979).
- [5] A. Lichnerowicz, Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme, Paris, (1955).
- [6] M. Born, "Der Impuls-Energie-Satz in der Elektrodynamik von Gustav Mie", Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, (1914), 23—37.

AN ATTEMPT AT A FLUID STRUCTURE OF THE ELECTRON IN SPACE WITH FIVE DIMENSIONS

PENG HUAN-WU

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The four-dimensional space-time of special relativity is augmented with a fifth dimension to take into account the gauge transformation of the electromagnetic potentials. And in doing this, a new field is introduced purely from dimensional consideration. It will be shown in this paper that this field plays an especially important role inside the electron. It gives rise naturally to the Poincaré stress needed for maintaining dynamical equilibrium within an extensive electron, it also reflects the dielectric constant and permeability of the medium within. It thus appears feasible to adopt a fluid structure for the extensive electron, and stable solution for the motion of the fluid particles has been obtained in general. The electrodynamics within the electron has also been obtained, and no physical solution with spherical symmetry exists. Axially symmetrical solution probably exists, which will be discussed in a subsequent paper.