

半导体中光的相干传播理论 (II)

甘子钊

(北京大学物理系)

杨国桢

(中国科学院物理研究所)

1980年12月29日收到

提 要

本文是关于半导体中光的相干传播理论的第二部分。考虑到电子空穴间的相互作用,我们讨论了光波与半导体的相互作用,得到了描述光激发电子空穴极化波的方程。我们指出只有在激发比较弱时,这组方程才可近似为一组线性方程,电子空穴极化波才可以看作玻色场。本文还着重讨论了分立的激子谱线的相干激发,证明了它可以近似等效于一个二能级系统的激发,等效的二能级系统的能级差和激发的程度有关,等效的二能级“原子”的“浓度”由激子波函数的性质决定。

一、引 言

电子间的相互作用对半导体的光学性质有重要影响,特别是它会导致一种新的激发态——激子的产生,在禁带中出现分立的激子能级。讨论强的相干光在半导体中的传播问题,当然也应分析电子间相互作用的影响,特别是如果入射光的频率(或频率的整数倍)接近某一分立的激子谱线时,光相干激发的是激子态,相干传播理论第一部分(以下简称(I))^[1]的分析就不适用了,这时电子间的相互作用必须加以考虑。在激子谱线上的自感透明现象和吸收饱和现象实验上都有过报道^[2-4], Haken 等人^[5,6]和 Hanamura^[7]对激子谱线的自感透明现象也作过一些理论分析。

在本文中,我们将在(I)的基础上把电子间相互作用对半导体的光激发的影响作系统的理论分析,尤其着重讨论相干激发分立的激子谱线问题。本文中分析的激子是 Wannier 激子^[8];为了简明起见,和(I)一样,以下的讨论只对一个简单的抛物型的两带模型来进行。

二、电子间相互作用

用二次量子化形式表示,电子间相互作用的一般形式为

$$H_{ee} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}^+(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

$\hat{\psi}$ 和 $\hat{\psi}^+$ 是电子的消灭和产生算符, V 是电子间的库仑作用势。在两带近似下,用(I)中的记号, $\hat{\psi}$ 和 $\hat{\psi}^+$ 可表成

$$\hat{\phi} = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{c\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \phi_{v\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger},$$

$$\hat{\phi}^{\dagger} = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{c\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \phi_{v\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}}, \quad (2)$$

$\phi_{c\mathbf{k}}$ 和 $\phi_{v\mathbf{k}}$ 分别是导带和价带的波矢为 $\mathbf{k}$ 的布洛赫波函数. 把(2)式代入(1)式中, 得到 16 项. 它们分别代表了电子-电子间散射; 电子-空穴间散射; 空穴-空穴间散射; 电子(或空穴)散射产生电子空穴对; 电子(或空穴)散射复合电子空穴对; 产生-产生电子空穴对; 产生-复合电子空穴对; 复合-复合电子空穴对等等.

显然, 就我们所考虑的问题来说, 电子(或空穴)散射产生“实”的电子空穴对的过程——即电子(或空穴)击穿的过程是不必加以考虑的, 要考虑的是头三种过程以及后面几种过程的虚过程——介质极化效应. 为简单起见, 假定极化效应可以用一个宏观的介电函数来描述. 于是, 我们所要考虑的电子间相互作用可表述为下面三种:

(1) 电子-电子间的相互作用:

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}; \quad (3)$$

(2) 空穴-空穴间的相互作用:

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) b_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}_1} b_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}_2}; \quad (4)$$

(3) 电子-空穴间的相互作用:

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} (-2v(\mathbf{q}_1)) a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} b_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}_2}. \quad (5)$$

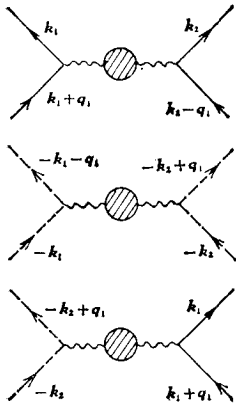


图 1

这三种作用如图 1 所示. 图 1 中实线表示电子线, 虚线表示空穴线, 波纹线表示它们的相互作用, “ $\otimes$ ”表示各种可能的极化效应. (3)–(5)式中的 $v(\mathbf{q})$ 是介电屏蔽后的库仑势的傅氏分量

$$v(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\varepsilon(\mathbf{q})} \left(\frac{4\pi e^2}{q^2} \right). \quad (5a)$$

这里 $\varepsilon(\mathbf{q})$ 为介电函数.

和 (I) 中一样, 为了消去相干光波的带内作用, 引入了“空间平移近似”. 经过 (I) 中的变换 (9) 式后, (3) 式将变换成

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) \exp[i(\theta_{\mathbf{k}_1} + \theta_{\mathbf{k}_2} - \theta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} - \theta_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1})] a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1}; \quad (6)$$

(4) 式变成

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) \exp[i(\varphi_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1} + \varphi_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1} - \varphi_{-\mathbf{k}_1} - \varphi_{-\mathbf{k}_2})] b_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}_1} b_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}^{\dagger} b_{-\mathbf{k}_2}; \quad (7)$$

(5) 式变成

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} (-2v(\mathbf{q}_1)) \exp[i(\theta_{\mathbf{k}_1} - \theta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} + \varphi_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1} - \varphi_{-\mathbf{k}_2})] a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} b_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_1}^+ b_{-\mathbf{k}_2}. \quad (8)$$

(6)–(8)式中 $\theta_{\mathbf{k}}$, $\varphi_{-\mathbf{k}}$ 等的定义见 (I) 的 (12) 式. 如果把 $\theta_{\mathbf{k}}$ 和 $\varphi_{-\mathbf{k}}$ 的具体表达式代入 (6) 至 (8) 式, 就会发现: (6) 式和 (7) 式分别与 (3) 式和 (4) 式是相同的, 只有 (5) 式与 (8) 式不同, 相当于在电子-空穴相互作用中, 相互作用势的傅氏分量从 $v(\mathbf{q}_1)$ 改为

$$v'(\mathbf{q}_1) = v(\mathbf{q}_1) \exp\left(-i\mathbf{q}_1 \cdot \frac{e}{m_d c} \int^t \mathbf{A}(t') dt'\right), \quad (9)$$

其中

$$m_d^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}.$$

为了考虑电子间相互作用 (3), (4) 和 (8) 式对光的相干传播的影响, 我们应当考虑它们在光激发产生电子-空穴对上的反映. 为此, 引入电子-空穴对的产生和消灭算符:

$$D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) = a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+,$$

$$D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) = b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}. \quad (10)$$

它们分别表示产生和消灭一个由波矢为 $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ 的电子与波矢为 $-\mathbf{k}$ 的空穴组成的“对”, “对”的总动量是 $\hbar\mathbf{q}$. (3) 式在“对”态上的表达为

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}_3} \sum_{\mathbf{k}_4} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) \left[D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1 \\ -\mathbf{k}_3 \end{smallmatrix}\right) D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_4 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}_4 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}_3 \end{smallmatrix}\right) \right. \\ \left. - D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1 \\ -\mathbf{k}_4 \end{smallmatrix}\right) D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_3 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}_4 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}_3 \end{smallmatrix}\right) \right]. \quad (11)$$

(11) 式的物理意义可以用图 2 来表示. (11) 式中的第二项是第一项的交换项.

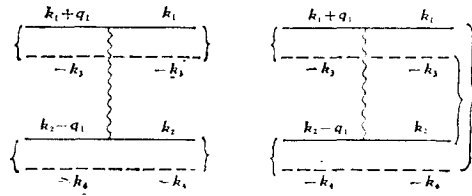


图 2

类似地, (4) 式表达为

$$\sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}_3} \sum_{\mathbf{k}_4} \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) \left[D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_3 \\ -\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right) D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_4 \\ -\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_4 \\ -\mathbf{k}_2 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_3 \\ -\mathbf{k}_1 \end{smallmatrix}\right) \right. \\ \left. - D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_4 \\ -\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right) D^+\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_3 \\ -\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_4 \\ -\mathbf{k}_2 \end{smallmatrix}\right) D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_3 \\ -\mathbf{k}_1 \end{smallmatrix}\right) \right]. \quad (12)$$

(12) 式的物理意义示于图 3.

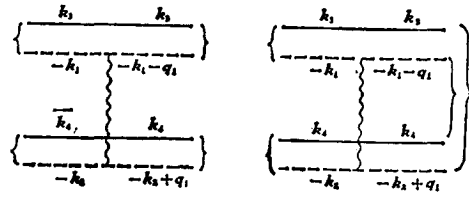


图 3

(8)式则比较复杂,表达为

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4} \sum_{q_1} 2\nu'(q_1) \left[D^+ \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 + q_1 \end{matrix} \right) D^+ \left(\begin{matrix} k_3 - q_1 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right) \right. \\
 & \quad - D^+ \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D^+ \left(\begin{matrix} k_3 - q_1 \\ -k_2 + q_1 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right) \\
 & \quad + D^+ \left(\begin{matrix} k_1 + q_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right) D^+ \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_4 - q_1 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right) \\
 & \quad \left. - D^+ \left(\begin{matrix} k_1 + q_1 \\ -k_4 - q_1 \end{matrix} \right) D^+ \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_2 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_3 \\ -k_4 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right) \right] \\
 & - \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{q_1} 2\nu'(q_1) D^+ \left(\begin{matrix} k_1 + q_1 \\ -k_2 - q_1 \end{matrix} \right) D \left(\begin{matrix} k_1 \\ -k_2 \end{matrix} \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

(13)式的物理意义示于图 4.

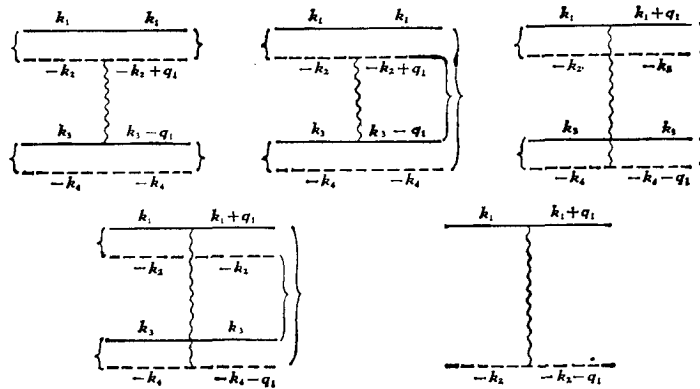


图 4

现在,让我们从系统和相干光波相互作用的角度分析用(12)和(13)式描述的过程.波矢为 $\mathbf{q}$ 的光波能够产生或复合总准动量为 $\hbar\mathbf{q}$ 的电子空穴对;或者说,它只能和波矢为 $\mathbf{q}$ 的电子-空穴极化波相互作用.显然,(11)和(12)式中所有的相互作用项都要改变电子空穴对的总准动量.(13)式中的前四项也是要改变电子空穴对的总准动量.唯一的例外是(13)式的最后一项,该项仅能改变构成电子空穴对的电子和空穴的波矢,但保持“对”的总准动量不变.所以,除(13)式的最后一项外,其它各项都起着“破坏”光波与电子空穴极化波的相干作用,即起着相干过程的弛豫作用,只有(13)式的最后一项不会使光激发的“对”

离开与光波的相互作用。其实从图 2 至 4 可以看出, (13) 式的最后一项, 形象地说, 是电子和它“自己的”空穴的相互作用, 或者说是形成“激子”的相互作用, 而其它各项都反映了“不同的”激子间的散射。

把(13)式的最后一项定义为

$$\Delta H_{ex} = - \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}_1} 2v'(\mathbf{q}_1) D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ -\mathbf{k}_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

上述的讨论说明, 我们应当把 ΔH_{ex} 归入描写相干激发的哈密顿量中, 而把其余的电子间相互作用项归入到弛豫作用项中去。

三、相干激发的基本方程

根据上节的讨论和 (I) 的 (11) 式和第五节, 在作过空间平移近似的变换以后, 可以把相干激发的哈密顿量写作

$$\begin{aligned} H_c = & \sum_{\mathbf{k}} [E_c(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} - E_v(\mathbf{k}) b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}] \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{cv}(\mathbf{k}) \left\{ \exp[i(\theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varphi_{-\mathbf{k}})] D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \exp[-i(\theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varphi_{-\mathbf{k}})] D \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right\} \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}_1} V(\mathbf{q}_1) D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中定义了记号

$$V(\mathbf{q}_1) = -2v'(\mathbf{q}_1).$$

(15) 式的第一项是电子和空穴在能带中的能量, 第二项是光产生或复合总波矢为 $\mathbf{q}$ (光波的波矢为 $\mathbf{q}$) 的电子空穴对的带内-带间跃迁项, 第三项是光激发的电子空穴对中的电子和空穴间的库仑作用项。

和 (I) 中的处理类似, 我们先求算符 $a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$, $b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}$, $D \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$ 和 $D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$ 的运动方程。按照 D, D^+ 的定义(10)式, 利用算符的交换关系, 可以得到

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} &= \left[D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}, H_c \right] \\ &= -\hbar\omega_q(\mathbf{k}) D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \\ &\quad - \Lambda_-(\mathbf{k}) (1 - a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}) \\ &\quad - \sum_{\mathbf{q}_1} V(\mathbf{q}_1) D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} (1 - a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}), \\ i\hbar \frac{d}{dt} (a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) &= \Lambda_+(\mathbf{k}) D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda_{-}(\mathbf{k})D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) + \sum_{\mathbf{q}_1} V(\mathbf{q}_1) \\
& \cdot \left[D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right)D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}+\mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right) \right. \\
& \left. - D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}_1 \\ -\mathbf{k}-\mathbf{q}_1 \end{smallmatrix}\right)D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) \right], \tag{16}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) &= E_c(\mathbf{k}+\mathbf{q}) - E_v(\mathbf{k}), \\
\Lambda_{\pm}(\mathbf{k}) &= \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{cv} \exp[\pm i(\theta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varphi_{-\mathbf{k}})].
\end{aligned}$$

关于 $D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right)$, $b_{-\mathbf{k}}^{+}b_{-\mathbf{k}}$ 的方程是与(16)式类似的.

与(I)一样,设想系统的相干激发波函数为

$$\phi = \prod_{\mathbf{k}} \left[\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}} D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) \right] \phi. \tag{17}$$

在(I)的第五节中讲过,波函数 ϕ 可理解为波矢为 $\mathbf{q}$ 的光波相干激发起来的电子-空穴极化波. 我们把 D^{+} , D , $a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+}a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ 和 $b_{-\mathbf{k}}^{+}b_{-\mathbf{k}}$ 满足的运动方程在波函数 ϕ 上求平均,并且使用下列记号:

$$\begin{aligned}
\langle \phi | D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) | \phi \rangle &= \alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}}^{*} = d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k}), \\
\langle \phi | D\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{smallmatrix}\right) | \phi \rangle &= \alpha_{\mathbf{k}}^{*}\beta_{\mathbf{k}} = d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k}), \\
\langle \phi | a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+}a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} | \phi \rangle &= |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}), \tag{18}
\end{aligned}$$

以及下列关系式:

$$\begin{aligned}
\langle \phi | D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k}_1 \end{smallmatrix}\right) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}}^{+}a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}} | \phi \rangle &= \alpha_{\mathbf{k}_1}\beta_{\mathbf{k}_1}^{*}|\beta_{\mathbf{k}_1}|^2, \\
\langle \phi | D^{+}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{k}_1+\mathbf{q} \\ -\mathbf{k}_1 \end{smallmatrix}\right) b_{-\mathbf{k}_1}^{+}b_{-\mathbf{k}_1} | \phi \rangle &= \alpha_{\mathbf{k}_1}\beta_{\mathbf{k}_1}^{*}|\beta_{\mathbf{k}_1}|^2, \tag{19}
\end{aligned}$$

等等. 于是不难得到下列方程组:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) &= \Lambda_{+}(\mathbf{k})d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k}) - \Lambda_{-}(\mathbf{k})d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k}) \\
&\quad + d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k})\hat{V}(d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k})) - d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k})\hat{V}^{*}(d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k})), \\
i\hbar \frac{d}{dt} d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k}) &= -\hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k}) - \Lambda_{-}(\mathbf{k})[1 - 2m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})] \\
&\quad - [1 - 2m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})]\hat{V}^{*}(d_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{k})), \\
i\hbar \frac{d}{dt} d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k}) &= \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k}) + \Lambda_{+}(\mathbf{k})[1 - 2m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})] \\
&\quad + [1 - 2m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})]\hat{V}(d_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{k})). \tag{20}
\end{aligned}$$

这里 $\hat{V}$ 和 $\hat{V}^*$ 的定义为

$$\begin{aligned}\hat{V}(f(\mathbf{k})) &= \sum_{\mathbf{q}_1} V(\mathbf{q}_1) f(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1), \\ \hat{V}^*(f(\mathbf{k})) &= \sum_{\mathbf{q}_1} V^*(\mathbf{q}_1) f(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1).\end{aligned}\quad (21)$$

从(20)式容易证明

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [1 - 2m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})]^2 + d_{\mathbf{q}}^+(\mathbf{k}) d_{\mathbf{q}}^-(\mathbf{k}) \right\} = 0 \quad (22)$$

或

$$|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 + |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (23)$$

(23)式的物理意义是很清楚的。(20)式是描写相干激发电子空穴对的基本方程组。假如在(20)式中略去与相互作用势 V 有关的项, 则它完全等价于(I)的第四节的布洛赫方程, 很容易化作(I)中(20)式的形式。

对(20)式作一个变换, 引入新的变量:

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{d_{\mathbf{q}}^-(\mathbf{k})}{\frac{1}{2} + z_{\mathbf{k}}}, \quad \delta_{\mathbf{k}}^* = \frac{d_{\mathbf{q}}^+(\mathbf{k})}{\frac{1}{2} + z_{\mathbf{k}}}, \quad z_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} - m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}); \quad (24)$$

或者反之

$$d_{\mathbf{q}}^+(\mathbf{k}) = \delta_{\mathbf{k}}^*/(1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2), \quad d_{\mathbf{q}}^-(\mathbf{k}) = \delta_{\mathbf{k}}/(1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2). \quad (25)$$

从(20)式可得 $\delta_{\mathbf{k}}$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} &= \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})\delta_{\mathbf{k}} + (\Lambda_+ - \Lambda_- \delta_{\mathbf{k}}^2) \\ &\quad + \hat{V} \left(\frac{\delta_{\mathbf{k}}}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2} \right) - \delta_{\mathbf{k}}^2 \hat{V}^* \left(\frac{\delta_{\mathbf{k}}^*}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2} \right).\end{aligned}\quad (26)$$

(26)式是我们进一步讨论的基础。在下节中将阐明它的明显的物理意义。

四、电子空穴对的相干态

从(24)和(18)式, 并利用(23)式, 可以得到

$$\delta_{\mathbf{k}} = \beta_{\mathbf{k}}/\alpha_{\mathbf{k}}. \quad (27)$$

$\delta_{\mathbf{k}}$ 的物理意义是什么呢? 为弄清此问题, 可以回过来看波函数(17)式。按照 $D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$ 的定义(10)式, 显然有

$$\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} = \alpha_{\mathbf{k}} \exp \left[\frac{\beta_{\mathbf{k}}}{\alpha_{\mathbf{k}}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right]. \quad (28)$$

考虑到(28)式, 于是(17)式表示的波函数可以化成

$$\phi = \left(\prod_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \right) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{\beta_{\mathbf{k}}}{\alpha_{\mathbf{k}}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right) \phi_0. \quad (29)$$

利用(27)式, 除去归一化因子外, 波函数为

$$\psi \sim \exp \left[\sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right] \psi_0. \quad (30)$$

引入记号:

$$\sum_{\mathbf{k}} |\delta_{\mathbf{k}}|^2 = \lambda \quad (31)$$

和

$$\delta_{\mathbf{k}}/\lambda = f_{\mathbf{k}}, \quad (32)$$

则(30)式成为

$$\psi \sim \exp \left[\lambda \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix} \right] \psi_0. \quad (33)$$

再定义算符:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^* D \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}, \\ \hat{E}^+ &= \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} D^+ \begin{pmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

(33)式就可写作

$$\psi \sim \exp(\lambda \hat{E}^+) \psi_0. \quad (35)$$

从(35)式可见, ψ 在形式上类似于 Glauber 所首先强调的相干态波函数^[9]. 但是 ψ 与相干态波函数有一个本质的不同. Glauber 的相干态波函数中的场的产生算符是满足玻色型的交换关系的, 也就是说描述的场是玻色场. 然而在(35)式中的算符 $\hat{E}^+$, 并不满足玻色型交换关系, $[\hat{E}, \hat{E}^+] = \hat{E} \hat{E}^+ - \hat{E}^+ \hat{E}$ 不等于 1, 而是

$$[\hat{E}, \hat{E}^+] = 1 + \sum_{\mathbf{k}} |f_{\mathbf{k}}|^2 (a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}). \quad (36)$$

因此, $\hat{E}^+$ 不能简单地看成是一个玻色场的产生算符. 为了进一步了解 $\hat{E}^+$ 非玻色性的含义, 我们考察波函数 $\hat{E}^+ \psi_a$ 的性质, 如果某一状态 ψ_a 满足:

$$\langle \psi_a | a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}} | \psi_a \rangle = n_{\mathbf{k}}$$

和

$$\left\langle \psi_a \left| \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \right| \psi_a \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = n_a,$$

即状态 ψ_a 激发了 n_a 个粒子, 那末对于状态 $\psi_b = \hat{E}^+ \psi_a$ 则有

$$\left\langle \psi_b \left| \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \right| \psi_b \right\rangle = n_a + \left(1 - \sum_{\mathbf{k}} |f_{\mathbf{k}}|^2 n_{\mathbf{k}} \right). \quad (37)$$

从(37)式可见, 只有对激发的粒子数目很小的状态, $\hat{E}^+$ 的作用是产生一个电子空穴对. 同样, 只有对激发粒子数目很小时, $\hat{E}$ 的作用是消灭一个电子空穴对; 或者说, 只有对激发的粒子数很小的状态, 可以近似地有

$$[\hat{E}, \hat{E}^+] \approx 1, \quad (38)$$

即认为 $\hat{E}$ 和 $\hat{E}^+$ 具有玻色场的消灭和产生算符的性质, 从而(35)式具有 Glauber 的相干态的性质, ψ 便是这种玻色场的振幅为 λ 的相干态, 并可看作这种玻色场对应的经典波的量子描述. 在我们讨论的情况下, 这个近似的玻色场便是电子空穴对极化波, ψ 便是经

典的极化波的量子描述, $|\lambda|^2$ 是平均激发“对”的数目, 相应于经典极化波振幅的平方. Hopfield 正是把激子(电子空穴对)极化波当作一个玻色场, 而建立了关于激子极化子的理论^[10]. 因此, 我们可以说, 方程(26)正是关于激发电子空穴极化波的方程. 在低激发(即 λ 很小)时, 可以近似地把这种极化波看作是玻色场. 同时, (26)式也就近似于一个线性方程式:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \delta_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})\delta_{\mathbf{k}} + \hat{V}(\delta_{\mathbf{k}}) + \Lambda_+. \quad (39)$$

由于 $\hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) + \hat{V}$ 正是电子空穴对(电子和空穴的相互作用势能是 V)的哈密顿量, Λ_+ 正是光波激发电子空穴对的相互作用, 不难看出, (39)式等效于文献[10]中关于激子极化波的方程. 但是 $|\delta_{\mathbf{k}}|$ 比较大时, (26)式的非线性性质就比较明显, 不能作(39)式那样的线性近似, 而这时非玻色性也就很显著. 所以从一定意义上讲, 激发方程(26)的非线性就是电子空穴对的非玻色性的反映.

为了使上述讨论更明确, 我们把(26)式具体地写出来. 按照(I)中第三节的做法, 可以把 Λ_+ 和 Λ_- 按 ω 的各级谐波展开, 例如:

$$\Lambda_+ = \sum_m G_m e^{-im\omega t}. \quad (40)$$

各级谐波中贡献最大的是 $m\omega \approx \omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})$ 的项, 除这项之外的其它谐波项可以略去. 为简明起见, 假定贡献最大的项就是 $m=1$ 的项. 同时, 按(15)和(9)式中 $V(\mathbf{q}_1)$ 的定义, $V(\mathbf{q}_1)$ 也包含有 ω 的各次谐波项, 如果只取它的零次谐波项, 则 $\hat{V}(\mathbf{q})$ 可近似地表为

$$\hat{V}(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}) = -2 \sum_{\mathbf{q}_1} v(\mathbf{q}_1) f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1}.$$

正如(5a)式所表明: $-2 \sum_{\mathbf{q}} v(\mathbf{q}_1) e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}}$ 是相距为 $\mathbf{r}$ 的一对电子空穴的相互作用势. 于是(26)式的具体形式为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = & \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})\delta_{\mathbf{k}} + \hat{V}\left(\frac{\delta_{\mathbf{k}}}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2}\right) + G_1 e^{-i\omega t} \\ & - G_1^* e^{i\omega t} \delta_{\mathbf{k}}^2 - \delta_{\mathbf{k}}^2 \hat{V}^*\left(\frac{\delta_{\mathbf{k}}^*}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

当 $\delta_{\mathbf{k}}$ 很小时, (41)式近似为

$$i\hbar \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})\delta_{\mathbf{k}} + \hat{V}(\delta_{\mathbf{k}}) + G_1 e^{-i\omega t}. \quad (42)$$

如果定义算符

$$\hat{H}_{\text{exc}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) + \hat{V},$$

$\hat{H}_{\text{exc}}$ 正是激子的哈密顿量; 或者说它是一对有库仑作用势的电子空穴的哈密顿量. 于是(42)式可改写为

$$\left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H}_{\text{exc}}\right)\delta_{\mathbf{k}} = G_1 e^{-i\omega t}. \quad (43)$$

上式的物理意义是很清楚的. 再定义

$$\Delta \hat{H}_{\text{exc}}(\delta_{\mathbf{k}}) = -\left[\hat{V}\left(\frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2 \delta_{\mathbf{k}}}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2}\right) + \delta_{\mathbf{k}}^2 \hat{V}^*\left(\frac{\delta_{\mathbf{k}}^*}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2}\right)\right]. \quad (44)$$

(41)式可写作

$$i\hbar \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = \hat{H}_{\text{exc}}\delta_{\mathbf{k}} + G_1 e^{-i\omega t} - \delta_{\mathbf{k}}^2 G_1^* e^{i\omega t} + \Delta \hat{H}_{\text{exc}}(\delta_{\mathbf{k}}). \quad (45)$$

注意到 $\Delta \hat{H}_{\text{exc}}(\delta_{\mathbf{k}})$ 的最低项是 $|\delta_{\mathbf{k}}|^3$ 项,所以如果取近似到 $|\delta_{\mathbf{k}}|^2$ 项,(41)式便为

$$i\hbar \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} - \hat{H}_{\text{exc}}\delta_{\mathbf{k}} = G_1 e^{-i\omega t} - \delta_{\mathbf{k}}^2 G_1^* e^{i\omega t}. \quad (46)$$

(46)式比(43)式多出了一项,它代表激发的饱和效应,在下一节中将看到它的具体物理图象. 下一节中还要阐明 $\Delta \hat{H}_{\text{exc}}$ 反映了激子谱线的移动. 我们概括本节的内容: (26)式是激发电子空穴极化波的基本方程,方程的非线性反映了电子空穴对的非玻色性,这是由于构成对的电子和空穴都是费密子的缘故. 当激发很弱时,电子空穴对近似于玻色子,方程(26)可近似为线性方程,它正是通常的激子极化子方程. 当激发较强时,方程(26)的非线性就显示出来,如果只考虑到 $|\delta_{\mathbf{k}}|^2$ 项,非线性表现为激发的饱和效应.

五、分立激子态的相干激发

电子空穴间的库仑吸引作用,导致在禁带中产生分立的激子能级,即在带间跃迁的吸收边之前存在分立的激子谱线. 本节中考虑相干光波的频率与某一分立的激子谱线接近共振的情况,即考虑激子谱线的相干激发问题. 我们采用方程(45)作为讨论的出发点,并令

$$\delta_{\mathbf{k}} = \rho_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}, \quad (47)$$

则(45)式可化成

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{\mathbf{k}} = (H_{\text{exc}} - \hbar\omega)\rho_{\mathbf{k}} + G_1 - G_1^* \rho_{\mathbf{k}}^2 + \Delta \hat{H}_{\text{exc}}(\rho_{\mathbf{k}}) \quad (48)$$

激子波函数 $f_{i\mathbf{k}}$ 满足下列本征方程:

$$H_{\text{exc}} f_{i\mathbf{k}} = E_i f_{i\mathbf{k}}. \quad (49)$$

E_i 是激子态的本征能量,包括连续谱和分立谱;各个不同的激子态是互相正交的,同时 $f_{i\mathbf{k}}$ 是归一的. 假定方程(48)的解可表成

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_i l_i f_{i\mathbf{k}}, \quad (50)$$

式中求和遍及所有的激子态,包括连续谱和分立谱. 把(50)式代入(48)式,得到关于 l_i 的方程

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dl_i}{dt} = & \hbar\Delta\omega_i l_i + A_i - \sum_{\mathbf{k}} f_{i\mathbf{k}}^* G_1^* \left(\sum_j l_j f_{j\mathbf{k}} \right)^2 \\ & + \sum_{\mathbf{k}} f_{i\mathbf{k}}^* \Delta H_{\text{exc}} \left(\sum_j l_j f_{j\mathbf{k}} \right), \end{aligned} \quad (51)$$

其中

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{\hbar} (E_i - \hbar\omega),$$

$$A_i = \sum_{\mathbf{k}} G_i f_{i\mathbf{k}}^*. \quad (52)$$

如果相干光波的频率很接近某一分立激子谱线, 并与其它谱线离得比较远, 于是我们可以近似地认为主要激发的仅是这根分立谱线的激子. 为了具体起见, 比如可认为它就是激子的最低分立态, 叫做 $1s$ 态. 在这样假定下, (50) 式可近似写成

$$\rho_{\mathbf{h}} = l_1 f_{1s, \mathbf{h}}. \quad (53)$$

方程(51)则成为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dl_1}{dt} = & \hbar \Delta \omega_1 l_1 + A_1 - \left(\sum_{\mathbf{k}} G_1^* |f_{1s, \mathbf{h}}|^2 f_{1s, \mathbf{h}} \right) l_1^2 \\ & + \sum_{\mathbf{k}} f_{1s, \mathbf{h}}^* \Delta H_{\text{exc}}(l_1 f_{1s, \mathbf{h}}). \end{aligned} \quad (54)$$

我们定义

$$\sigma_1 = \frac{1}{A_1} \sum_{\mathbf{k}} (G_1^* |f_{1s, \mathbf{h}}|^2 f_{1s, \mathbf{h}}), \quad (55)$$

$$\alpha(|l_1|) = \frac{1}{|l_1|^2 l_1} \sum_{\mathbf{k}} f_{1s, \mathbf{h}}^* \Delta H_{\text{exc}}(l_1 f_{1s, \mathbf{h}}). \quad (56)$$

从 ΔH_{exc} 的定义(44)式很易得到

$$\begin{aligned} \alpha(|l_1|) = & - \sum_{\mathbf{k}} \left[f_{1s, \mathbf{h}}^* \hat{V} \left(\frac{|f_{1s, \mathbf{h}}|^2 f_{1s, \mathbf{h}}}{1 + |l_1|^2 |f_{1s, \mathbf{h}}|^2} \right) \right. \\ & \left. + |f_{1s, \mathbf{h}}|^2 f_{1s, \mathbf{h}} \hat{V}^* \left(\frac{f_{1s, \mathbf{h}}^*}{1 + |l_1|^2 |f_{1s, \mathbf{h}}|^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

于是, 方程(54)可化成为

$$i\hbar \frac{dl_1}{dt} = [\hbar \Delta \omega_1 + \alpha(l_1) |l_1|^2] l_1 + A_1 (1 - \sigma_1 l_1^2). \quad (58)$$

σ_1 是一个与 l_1 无关的常数, 一般说, 它是一个复数, 记作 $\sigma_1 = |\sigma_1| e^{i\varphi}$. 我们引入新的变量:

$$u = i \sqrt{|\sigma_1|} e^{i\frac{\varphi}{2}} l_1, \quad (59)$$

$$h = 2A_1 e^{i\frac{\varphi}{2}} \frac{\sqrt{|\sigma_1|}}{\hbar} \quad (60)$$

以及

$$\delta \omega_1(|l_1|) = \Delta \omega_1 + \frac{1}{\hbar} \alpha(|l_1|) |l_1|^2. \quad (61)$$

那末方程(58)可简化成

$$\frac{du}{dt} = -i \delta \omega_1 u + \frac{1}{2} h (1 + u^2). \quad (62)$$

这里 $\delta \omega_1$ 是 $|l_1|$ 的函数, 因而也是 $|u|$ 的函数, 它的最低次项是 $|u|^2$. 方程(62)等效于一个自旋在外场下运动的方程, 根据这种类型的里卡提方程的几何理论, 这是不难证明的. 为此引入变量:

$$m_x = \frac{1}{2} \frac{u + u^*}{1 + |u|^2},$$

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{1}{2i} \frac{u - u^*}{1 + |u|^2}, \\ m_z &= \frac{1}{2} \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2} \end{aligned} \quad (63)$$

或写作

$$u = \frac{m_x + im_y}{\frac{1}{2} + m_z}, \quad u^* = \frac{m_x - im_y}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (64)$$

于是方程(62)可写成

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (65)$$

其中

$$\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z), \quad \mathbf{H} = (0, -\hbar, \delta\omega_1). \quad (66)$$

所以, 分立的激子谱线的相干激发等效于一个二能级原子系统的相干激发. 等效的二能级原子的能级差为^[1]

$$\Delta E = \hbar(\omega + \delta\omega) = \hbar\omega_{\text{exc}} + \alpha(l_1)|l_1|^2, \quad (67)$$

ω_{exc} 是激子谱线的频率. 从(59)和(63)式可得

$$|l_1|^2 = \frac{1}{|\sigma_1|} \frac{\frac{1}{2} - m_z}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (68)$$

由(67)和(68)式可见, 等效的二能级原子的能级差与激发的程度有关. 在激发不很强时,

$$\Delta E \approx \hbar\omega_{\text{exc}},$$

与弱场下激子谱线重合. (67)式表明了激子谱线的位置随场强增加发生的位移, 实验上曾观察到此现象^[3,4].

现在求激发的激子的密度

$$N_{\text{exc}} = \frac{1}{Q} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{Q} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2}, \quad (69)$$

式中 Q 是系统的体积. 把(53)式代入上式得

$$N_{\text{exc}} = \frac{|l_1|^2}{Q} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|f_{1s, \mathbf{k}}|^2}{1 + |l_1|^2 |f_{1s, \mathbf{k}}|^2}. \quad (70)$$

在激发比较弱时近似有

$$N_{\text{exc}} \approx \frac{|l_1|^2}{Q} = \frac{1}{|\sigma_1|Q} \cdot \frac{\frac{1}{2} - m_z}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (71)$$

于是可以形象地说, 单位体积中激发出来的激子数近似等于等效原子的密度为 $(|\sigma_1|Q)^{-1}$ 的处于激发态的等效原子数.

如果取 $1s$ 激子波函数是类氢的 $1s$ 波函数

$$f_{1s, \mathbf{k}} = \frac{8 \sqrt{\pi} a^{3/2}}{(1 + a^2 k^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}, \quad (72)$$

式中 a 是类氢原子(激子)的玻尔半径, 把(72)和(55)式代入(71)式中, 可求得

$$N_{\text{exc}} = \frac{2}{7\pi} a^{-3} \frac{\frac{1}{2} - m_z}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (73)$$

这意味着 $1s$ 激子谱线的相干激发的问题, 可以近似地当做密度为 $\frac{2}{7\pi} a^{-3}$ 的激发的二能级原子的问题处理, 二能级的能级差由(67)式给出. 当然严格一点说, 激发的激子密度应从(70)式得到

$$N_{\text{exc}} = \frac{64}{7\pi^2 a^3} |u|^2 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^4 + \frac{128}{7} |u|^2},$$

$$|u|^2 = \frac{\frac{1}{2} - m_z}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (74)$$

当 $\frac{128}{7} |u|^2 \ll 1$ 时,

$$N_{\text{exc}} \approx \frac{2}{7\pi} a^{-3} \frac{\frac{1}{2} - m_z}{\frac{1}{2} + m_z}. \quad (75)$$

此结果与(73)式是相同的.

现在讨论在恒定外光场下激子相干激发的问题. 如果略去(61)式中的 $|l_1|^2$ 项, 并取初始条件

$$\mathbf{m}(t=0) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

那么方程(65)的解为

$$\mathbf{m}(t) = \left(\frac{1}{2\omega_r} \sin \omega_r t, \frac{\hbar \Delta \omega_1}{2\omega_r^2} (\cos \omega_r t - 1), \right. \\ \left. \frac{1}{2\omega_r^2} (\hbar^2 \cos \omega_r t + \Delta \omega_1^2) \right), \quad (76)$$

其中 $\omega_r = \sqrt{\Delta \omega_1^2 + \hbar^2}$, 相应于拉比进动频率. 把(76)式代入(64)式得

$$|u|^2 = \frac{\eta^2 (1 - \cos \omega_r t)}{2 + \eta^2 (1 + \cos \omega_r t)}, \quad (77)$$

式中 $\eta = \hbar / \Delta \omega_1$ 是一个表示激发光频率失谐程度的量.

由于 $|u|^2$ 直接反映激发的激子数目, 因此从(77)式可见, 激发激子数目以频率 ω_r 周期地变化. 开始时系统吸收光, 激子数目增加, 经过 π / ω_r 的时间到达极大值; 极大值的

数值与失谐程度有关, η 愈大, 则达到的极大值也愈大. 接着系统通过受激发射把能量放回到光场, 激子数目减少, 到时间为 $2\pi/\omega$, 时激子数目下降为零. 然后又重复这个循环过程.

六、分立激子态的弛豫

和 (I) 中一样, 可以唯象地引入激子的横向弛豫时间和纵向弛豫时间. 把 (65) 式改写为

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{H} - \hat{R}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0), \quad (78)$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1/\tau_T & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau_T & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau_l \end{pmatrix}. \quad (79)$$

τ_T 和 τ_l 的物理意义可以按 (I) 中第五节所作的讨论来理解, 更详细和具体的分析将在另外的工作中谈及. 引入弛豫时间以后, 此系统将有稳态解存在, 从而激子谱线将会有和一般的二能级系统完全类似的吸收饱和和功率加宽等现象出现. 另外 (67) 式还给出了随激发场强度的增加激子吸收峰向带边移动的结果. 这些理论结果与有关的实验报道^[3,4]是相符合的.

七、小 结

在本文中, 我们分析了电子和空穴间的相互作用对相干激发的影响, 得到了相干激发的基本方程, 其中特别着重讨论了分立的激子态相干激发的问题.

从讨论中, 我们看到电子空穴极化波的相干激发是非线性的. 只有在激发的“对”的数目比较小时, 此激发方程才近似于线性; 也正是在这种情形时, 电子空穴极化波才近于一个玻色场. 过去关于激子(电子空穴)极化波与光波的耦合的理论^[10], 恰好相应于这种低激发情况. Кельдыш^[12] 曾指出过, 在激发的激子数目比较大时, 即平均的激子间距离与激子的“半径”可比拟时, 激子的非玻色性必须加以考虑. 在本文中, 我们比较严格地分析了这个问题, 得到了物理图象比较鲜明的理论形式. Hanamura^[7] 关于激子线的自感透明现象的理论中也注意了这个问题, 但他的理论分析的途径是与本文不同的, 我们认为他的理论分析是有些缺点的.

分立的激子能级的相干激发可以等效于一个二能级“原子”系统的激发, 从而人们可以期望, 关于二能级系统和相干近共振光波的相互作用的各种现象, 都可能在分立的激子态上出现. 这是一个很有意思的尚待探索的领域.

参 考 文 献

- [1] 甘子钊、杨国桢, 物理学报, **30**(1981), 878.
- [2] Ф. Брюкнер, В. С. Внелровский, Д. Г. Кошуг, Письма в ЖЭТФ, **20** (1974), 10.
- [3] J. Shah, R. F. Lehen, C. Lin, Solid State Comm., **18**(1976), 1035.

- [4] H. M. Gibbs, A. C. Cossard, S. L. McCall, A. Passner, W. Wiegmann, *Solid State Comm.*, **30**(1979), 271.
- [5] H. Haken, *Z. Physik*, **258**(1973), 231; **262**(1973), 119.
- [6] J. Goll. H. Haken, *Phys. Rev.*, **A18**(1978), 2241.
- [7] E. Hanamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **37**(1974), 1545; 1553.
- [8] R. S. Knox, "Solid State Physics", Supplement 5, Academic Press, New York and London, (1963).
- [9] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130**(1963), 2529; **131**(1963), 2766.
- [10] J. J. Hopfield, *Phys. Rev.*, **112**(1958), 1555.
- [11] A. Abragam, "The Principle of Nuclear Magnetism", Oxford, Clarendon, (1961).
- [12] Л. В. Кельдыш, *ЖЭТФ*, **54** (1968), 978.

A THEORY OF COHERENT PROPAGATION OF LIGHT WAVE IN SEMICONDUCTORS (II)

GAN ZI-ZHAO

(Department of Physics, Peking University)

YANG GUO-ZHEN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper is the second part of a theory of the coherent propagation of light wave in semiconductors. After considering the interaction between electrons, the problem of a semiconductor interacting with light is discussed and the equation of exciton polarization wave excited by light wave is obtained. We point out that the equation can be approximated by a set of linear ones and the exciton polarization wave can be regarded as a Bose field only in the limit of low excitation. In this paper, the problem of coherent excitation of discrete exciton level is also discussed specifically. It is shown that the discrete exciton level system excited coherently is approximately equivalent to a two-level atom system excited by light wave in which the difference of energy level is dependent on the degree of excitation and the density of equivalent "two-level atoms" is determined by features of the exciton state wave function.