

半导体中光的相干传播理论 (III)

甘子钊

杨国桢

(北京大学物理系)

(中国科学院物理研究所)

1980年12月29日收到

提 要

本文是半导体中光的相干传播理论的第三部分。在前面两篇文章的基础上^[1], 推导了光在半导体中相干传播的 Maxwell-Bloch 方程; 利用这组方程, 讨论了带间跃迁和激子跃迁两种情况的许多可能的相干传播效应。文中特别着重分析了自感透明现象, 证明了对于上述两种跃迁自感透明现象都是可能发生的。

一、引 言

在半导体中光的相干传播理论的前两部分(以下简称(I)和(II))中^[1], 讨论的是相干光波如何激发半导体中的电子空穴极化波的问题。为了分析半导体中光的相干传播现象, 在本文中, 我们一方面把极化波方程推广成它的传播方程的形式, 另一方面将建立与电子空穴极化波耦合的相干光波所满足的方程, 从而得到完整的 Maxwell-Bloch 方程组。然后, 从这些方程出发讨论一些具体的相干传播现象, 特别是自感透明现象。虽然半导体中带间跃迁和激子跃迁的自感透明现象实验上已有一些肯定的结果^[2], 但是理论上还存在一些不同的看法^[3,4]。本文将采用类似于(I)和(II)中所发展的一般理论来处理这个问题。

二、光波的相干传播方程

先讨论与电子空穴极化波相对应的电流密度。电流密度算符 $\hat{j}$ 的表达式为

$$\hat{j} = i \frac{e\hbar}{2m} N[\hat{\phi}^+(\nabla\phi) - (\nabla\hat{\phi}^+)\phi] - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}\hat{\phi}^+\hat{\phi}, \quad (1)$$

式中 N 指取算符的正规乘积。把(1)式在系统的量子态上求平均将得到电流密度的表达式。当然, 在光场下除去激发前面处理的近共振的电子空穴对以外, 还会激发其它能带的虚的电子空穴对。如果我们用通常讨论晶体光学性质的办法来处理除了近共振跃迁的带以外的其它带的跃迁^[5], 那么在我们讨论的频率范围中可以用一个介电系数来代替它们的作用。于是, 留下来与共振跃迁相联系的电流密度便是

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_p, \quad (2)$$

$\mathbf{j}_i$ 是带内运动所对应的极化电流密度, 可表为

$$\mathbf{j}_I = -\frac{e^2}{m_d c \Omega} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \mathbf{A}. \quad (3)$$

(3)式中 m_d 是电子-空穴的约化有效质量, $m_d^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$; Ω 是系统的体积; $\beta_{\mathbf{k}}$ 的意思见(I)和(II). (2)式中的 $\mathbf{j}_p$ 是带间跃迁对应的极化电流密度, 可表为

$$\mathbf{j}_p = \frac{e}{m \Omega} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{P}_{cv}(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{P}_{vc}(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}}], \quad (4)$$

其中 $\mathbf{P}_{cv}$ 和 $\mathbf{P}_{vc}$ 是动量算符的带间矩阵元(见(I)), m 是电子质量. 或者用(II)的(18)和(24)式引入的符号, $\mathbf{j}_I$ 和 $\mathbf{j}_p$ 可表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_I &= -\frac{e^2}{m_d c \Omega} \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \mathbf{A} = -\frac{e^2}{m_d c \Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} - z(\mathbf{k}) \right) \mathbf{A}, \\ \mathbf{j}_p &= \frac{e}{m \Omega} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{P}_{cv}(\mathbf{k}) d_{\mathbf{q}}^+(\mathbf{k}) + \mathbf{P}_{vc}(\mathbf{k}) d_{\mathbf{q}}^-(\mathbf{k})] \\ &= \frac{e}{m \Omega} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{P}_{cv}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{P}_{vc}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}}] / (1 + |\delta_{\mathbf{k}}|^2). \end{aligned} \quad (5)$$

现在, 我们转向求电磁波的传播方程

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6)$$

式中 ∇^2 是拉普拉斯算子. 为了讨论简明, 考虑一束沿 z 轴传播的光波, 略去它在 xy 平面上的变化, 并假设它是一束偏振方向平行 x 轴的线偏振光. 于是光波的矢量势可表示为

$$\mathbf{A} = A_0 \mathbf{e}_x \sin(\omega t - qz + \varphi), \quad (7)$$

振幅 A_0 和位相 φ 都只是 z 和 t 的缓变函数. 很显然, 不失讨论的一般性, 可进一步认为 φ 只是 z 的函数. 把(7)式代入(6)式的左边, 利用 A_0 和 φ 的缓变条件, 可以得到

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &\approx \mathbf{e}_x \left[\left(\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial A_0}{\partial z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \frac{\omega}{c} A_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) e^{-i(\omega t - qz + \varphi)} + \text{复共轭项} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

引入记号 $\tilde{A}_0 = A_0 e^{-i\varphi}$, (8)式可重新写作

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \approx \mathbf{e}_x \left[\frac{\omega}{c} \left(\frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial t} \right) e^{-i(\omega t - qz)} + \text{复共轭项} \right]. \quad (9)$$

用(9)式代入(6)式的左边, 把(3)式和(4)式代入(6)式的右边, 就可得到一个单色平面波入射到半导体中它的复振幅所满足的传播方程.

为简单起见, 现进一步假定所讨论的半导体具有立方对称性. 于是, x 方向的偏振光也只在 x 方向感应极化电流密度分量. 同时, 适当选择布洛赫函数的位相, 使得 $\{P_{cv}(\mathbf{k})\}_x$ 取作实数, 即 $\{P_{cv}(\mathbf{k})\}_x = \{P_{vc}(\mathbf{k})\}_x = P(\mathbf{k}) = \text{实数}$. 再考虑到 A_0 的缓变条件, 可得到光波复振幅满足的方程为

$$\begin{aligned} \partial \tilde{A}_0 / \partial z + \frac{1}{c} \partial \tilde{A}_0 / \partial t &= -i \frac{2\pi e^2}{m_d c \omega \Omega} \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}}|^2 \tilde{A}_0 \\ &\quad + \frac{4\pi e}{m \omega \Omega} \sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}} e^{-iqz + i\omega t}. \end{aligned} \quad (10)$$

方程(10)便是决定光波传播的方程.

要考虑光波的空间传播问题,还必须把(I)和(II)中关于 $\alpha_k^* \beta_k$, $\alpha_k \beta_k^*$ 以及 $|\beta_k|^2$ 的方程,推广到光波的复振幅是 z 的缓变函数的情况. 这个推广是不困难的. 比如,考虑(II)中的(20)式:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} m_q(\mathbf{k}) &= \Lambda_+(\mathbf{k}) d_q^+(\mathbf{k}) - \Lambda_-(\mathbf{k}) d_q^-(\mathbf{k}) \\ &\quad + d_q^+(\mathbf{k}) \hat{V}(d_q^-(\mathbf{k})) - d_q^-(\mathbf{k}) \hat{V}^*(d_q^+(\mathbf{k})), \\ i\hbar \frac{d}{dt} d_q^+(\mathbf{k}) &= -\hbar\omega_q(\mathbf{k}) d_q^+(\mathbf{k}) - \Lambda_-[1 - 2m_q(\mathbf{k})] \\ &\quad - [1 - 2m_q(\mathbf{k})] \hat{V}^*(d_q^+(\mathbf{k})), \\ i\hbar \frac{d}{dt} d_q^-(\mathbf{k}) &= \hbar\omega_q(\mathbf{k}) d_q^-(\mathbf{k}) + \Lambda_+[1 - 2m_q(\mathbf{k})] \\ &\quad + [1 - 2m_q(\mathbf{k})] \hat{V}(d_q^-(\mathbf{k})). \end{aligned} \quad (11)$$

这些方程表示的是一个波矢为 $\mathbf{q}$ (因而振幅是恒定的)的电磁波激发电子空穴极化波的方程,此电子空穴极化波也具有总准动量 $\hbar\mathbf{q}$. 对于一个振幅缓变的光波,它产生的当然应是一个振幅缓变的极化波. 这种极化波可理解为一些不同波矢的极化波的叠加,“缓变”指的是包含的波矢 $\mathbf{q}$ 分布在一个很小的范围中. 于是不难进行所要求的推广. 我们先把 $\omega_q(\mathbf{k})$ 的表达式作些改变,容易证明:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_q(\mathbf{k}) &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + \frac{\hbar^2}{2m_h} \mathbf{k}^2 + E_g \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_d} \mathbf{K}^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \mathbf{q}^2 + E_g. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式中 $\hbar\mathbf{K}$ 是电子和空穴相对运动的动量, $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \frac{m_h}{m_e + m_h} \mathbf{q}$; m_d 是电子空穴的

约化有效质量, $m_d^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$; $M = m_e + m_h$; $\frac{\hbar^2}{2M} \mathbf{q}^2$ 是电子空穴对整体运动的动

能. 根据(11)式,可以把 $\omega_q(\mathbf{k})$ 写作 $\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q})$. 用了这些记号,(12)式可以按下列方法推广: $d_q^\pm(\mathbf{k})$ 和 $m_q(\mathbf{k})$ 改为 $d^\pm(\mathbf{K})$ 和 $m(\mathbf{K})$, 它们不仅是 $\mathbf{K}$ 的函数,而且还是空间坐标的函数;把 $\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q})$ 变为微分算符 $\omega(\mathbf{K}, -i\nabla)$. 于是,(12)式便变成 $m(\mathbf{K})$ 和 $d^\pm(\mathbf{K})$ 在坐标空间的传播方程. 与(12)式等价的(II)中的(26)式亦可作同样推广,电子空穴极化波的振幅 δ_k 便是空间坐标的函数,(II)中的(26)式改写成

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \delta_K &= \hbar\omega(\mathbf{K}, -i\nabla) \delta_K + (\Lambda_+ - \Lambda_- \delta_K^2) \\ &\quad + \hat{V} \left(\frac{\delta_K}{1 + |\delta_K|^2} \right) - \delta_K^2 \hat{V}^* \left(\frac{\delta_K^*}{1 + |\delta_K|^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

注意到光波振幅的缓变条件, $d_q^\pm(\mathbf{K})$ 和 δ_K 等随空间坐标的变化应取如下的形式:

$$\sim A \exp(\pm i q z), \quad (14)$$

A 与 $\exp(\pm i q z)$ 相比是 z 的缓变函数. 把这形式代入上述推广了的 δ_K (或 $d^\pm(\mathbf{K})$) 的方程中,就可得到极化波振幅的方程. 例如令

$$\delta K = \rho_{0k} \exp(-i\omega t + iqz), \quad (15)$$

从方程(13)和条件(14)式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{0k}}{\partial t} + u_q \frac{\partial \rho_{0k}}{\partial z} = & -i\Delta\omega(K, q)\rho_{0k} - i(\varepsilon - \varepsilon^* \rho_{0k}^2) \\ & - \frac{i}{\hbar} \hat{V} \left(\frac{\rho_{0k}}{1 + |\rho_{0k}|^2} \right) + \frac{i}{\hbar} \rho_{0k}^2 \hat{V}^* \left(\frac{\rho_{0k}^*}{1 + |\rho_{0k}|^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式就是极化波振幅的方程, 方程中

$$\begin{aligned} \Delta\omega(K, q) &= \omega(K, q) - \omega, \\ \varepsilon &= \Lambda_+ \exp(-iqz + i\omega t) \text{ 中的缓变部分,} \\ u_q &= \frac{\hbar}{M} q, \end{aligned} \quad (17)$$

u_q 是电子空穴对极化波的传播速度.

我们归纳一下上面所得到的结果. 一束单色平面波在半导体中传播时, 光波的复振幅所满足的方程是(10)式, 它的左边是光的传播项, 右边是光波和激发的电子空穴极化波的耦合项. 同样, 电子空穴极化波亦可表示为 $\sim A \exp(\pm i(qz - \omega t))$ 的形式, A 是它的缓变振幅, 它满足的方程和 (II) 的方程(20)或 (26) 是相似的, 只要把算符 $\frac{d}{dt}$ 换为算符 $\frac{D}{Dt} \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_q \frac{\partial}{\partial z} \right)$, u_q 是电子空穴对的整体传播速度, 并把方程右端的光场换为它的缓变振幅形式. 把相干光波满足的方程(10)和电子空穴极化波方程(例如(16)式)联立, 便得到完整的 Maxwell-Bloch 方程.

三、带间跃迁情况

当一束相干光和半导体的带间跃迁接近共振时, 即光的频率接近于连续的带间跃迁频率而不是分立的激子谱线时, 光波和电子空穴波的缓变振幅所满足的方程应是 (10) 式以及类似于(11)式的方程. 光场的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial t} = & -i \frac{2\pi e^2}{m_d c \omega Q} \sum_{\mathbf{k}} m_q(\mathbf{k}) \tilde{A}_0 \\ & + \frac{4\pi e}{m\omega Q} \sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) D_q^-(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (18)$$

电子空穴波的方程为

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} D_q^+(\mathbf{k}) &= i\Delta\omega_q(\mathbf{k}) D_q^+(\mathbf{k}) + i \frac{\varepsilon^*}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \hat{V}^*(D_q^+(\mathbf{k})), \\ \frac{D}{Dt} D_q^-(\mathbf{k}) &= -i\Delta\omega_q(\mathbf{k}) D_q^-(\mathbf{k}) - i \frac{\varepsilon}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \hat{V}(D_q^-(\mathbf{k})), \\
\frac{\partial}{\partial t} M_q(\mathbf{k}) &= -\frac{i}{\hbar} \varepsilon D_q^+(\mathbf{k}) + \frac{i}{\hbar} \varepsilon^* D_q^-(\mathbf{k}) \\
& -\frac{i}{\hbar} D_q^+(\mathbf{k}) \hat{V}(D_q^-(\mathbf{k})) + \frac{i}{\hbar} D_q^-(\mathbf{k}) \hat{V}^*(D_q^+(\mathbf{k}));
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
M_q(\mathbf{k}) &= m_q(\mathbf{k}), \\
D_q^\pm(\mathbf{k}) &= d_q^\pm(\mathbf{k}) \exp[\mp i(\omega t - qz)], \\
\Delta\omega_q(\mathbf{k}) &= \omega_q(\mathbf{k}) - \omega.
\end{aligned} \tag{19}$$

方程(19)和方程(16)是等价的。(19)式中的 ε 和 ε^* 的定义见(17)式。注意在 $M_q(\mathbf{k})$ 的方程中没有把 $\frac{\partial}{\partial t}$ 换成 $\frac{D}{Dt}$, 这是容易理解的, 因为 $M_q(\mathbf{k}) (= |\beta_k|^2)$ 不包含 β_k 的位相的信息。可以仿照 (I) 和 (II) 中的做法, 唯象地给方程(19)加上弛豫项:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} D_q^+(\mathbf{k}) &= i\Delta\omega_q(\mathbf{k}) D_q^+(\mathbf{k}) + i\frac{\varepsilon^*}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \\
& + \frac{i}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \hat{V}^*(D_q^+(\mathbf{k})) - \frac{1}{\tau_T} D_q^+(\mathbf{k}), \\
\frac{D}{Dt} D_q^-(\mathbf{k}) &= -i\Delta\omega_q(\mathbf{k}) D_q^-(\mathbf{k}) - i\frac{\varepsilon}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \\
& - \frac{i}{\hbar} [1 - 2M_q(\mathbf{k})] \hat{V}(D_q^-(\mathbf{k})) - \frac{1}{\tau_T} D_q^-(\mathbf{k}), \\
\frac{\partial}{\partial t} M_q(\mathbf{k}) &= -\frac{i}{\hbar} \varepsilon D_q^+(\mathbf{k}) + \frac{i}{\hbar} \varepsilon^* D_q^-(\mathbf{k}) - \frac{i}{\hbar} D_q^+(\mathbf{k}) \hat{V}(D_q^-(\mathbf{k})) \\
& + \frac{i}{\hbar} D_q^-(\mathbf{k}) \hat{V}^*(D_q^+(\mathbf{k})) - \frac{1}{\tau_l} M_q(\mathbf{k}),
\end{aligned} \tag{20}$$

τ_T 和 τ_l 分别是横向和纵向弛豫时间。

带间跃迁产生的电子空穴对是激子的电离状态, 即激子的连续谱状态。我们知道, 对光跃迁现象来说, 这时电子和空穴间的相互作用并不带来本质的影响。后面我们将从数学形式上对此作更仔细的说明。于是, 略去方程(20)中包含 $\hat{V}$ 的项, 这样得到的方程与 (I)

中第五节的结果是等价的, 除了把那里的 $\frac{d}{dt}$ 换成这里的 $\frac{D}{Dt}$ 以外, 其它没有什么差别。

在 (I) 中已经指出, 这样的系统和一个非均匀展宽的二能级系统形式上是等效的。同时, 场方程(18)中, 如果略去带内作用对电流密度的贡献, 即略去方程右端第一项, 则方程(18)就和通常二能级原子系统中光的传播方程没有区别。在上面的近似下, 方程(18)和(20)相当于通常二能级原子系统的 Maxwell-Bloch 方程^[6]。众所周知, 一系列的相干传播现象, 例如由吸收饱和而产生的强的光学克尔效应, 频率和振幅的自调制^[7], 连续波传播的不稳定性与光学双稳现象^[8], 都是这样一组非线性传播方程的结果。因此可以期望, 在适当的条件下, 在半导体带间跃迁中会观察到上述相干传播现象。

在这里, 我们将着重讨论超短脉冲在系统中的传播问题。假设脉冲的持续时间小于

系统的弛豫时间, 于是在方程(20)中的弛豫项可以略去, 也就是说可以从方程(19)或与它等价的方程(16)来进行分析. 利用里卡提方程理论中常用的标准变换, 引入新的变量 $W_{\mathbf{k}}$, 它与 $\rho_{0\mathbf{k}}$ 的关系为

$$\rho_{0\mathbf{k}} = \frac{i}{\varepsilon^* W_{\mathbf{k}}} \left[\frac{D}{Dt} W_{\mathbf{k}} - \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) W_{\mathbf{k}} \right], \quad (21)$$

于是方程(16)可化为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{D}{Dt} - \left(\frac{D\varepsilon^*}{Dt} \right) + \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] \left[\frac{D}{Dt} - \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] W_{\mathbf{k}} \\ &= -|\varepsilon|^2 - i\varepsilon^* W_{\mathbf{k}} \hat{U}(\rho_{0\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (22)$$

这里算符 $\hat{U}$ 的定义为

$$\hat{U}(\rho_{0\mathbf{k}}) = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho_{0\mathbf{k}}}{1 + |\rho_{0\mathbf{k}}|^2} \right) + \frac{i}{\hbar} \rho_{0\mathbf{k}}^2 \hat{\mathcal{V}}^* \left(\frac{\rho_{0\mathbf{k}}^*}{1 + |\rho_{0\mathbf{k}}|^2} \right); \quad (23)$$

微分算符的定义为

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

再引入新变量

$$\begin{aligned} v_{2\mathbf{k}} &= W_{\mathbf{k}}, \\ v_{1\mathbf{k}} &= -\frac{1}{\varepsilon^*} \left[\frac{D}{Dt} - \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] v_{2\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (24)$$

这组新变量与 $\rho_{0\mathbf{k}}$ 的关系很容易从(21)式得到

$$\rho_{0\mathbf{k}} = -i v_{1\mathbf{k}} / v_{2\mathbf{k}}. \quad (25)$$

利用(24)式, 可把方程(22)化成

$$\begin{aligned} & \left[\frac{D}{Dt} + \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] v_{1\mathbf{k}} = \varepsilon v_{2\mathbf{k}} + i v_{2\mathbf{k}} \hat{U} \left(-i \frac{v_{1\mathbf{k}}}{v_{2\mathbf{k}}} \right), \\ & \left[\frac{D}{Dt} - \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] v_{2\mathbf{k}} = -\varepsilon^* v_{1\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (26)$$

可以把(26)式变成一组形式上更为对称的方程. 为此引入记号 $\hat{H}$, 定义为下列运算:

$$\hat{H}(x_{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{\hbar x_{\mathbf{k}}} \hat{\mathcal{V}} \left(\frac{x_{\mathbf{k}}}{1 + |x_{\mathbf{k}}|^2} \right) + \frac{x_{\mathbf{k}}}{\hbar} \hat{\mathcal{V}}^* \left(\frac{x_{\mathbf{k}}^*}{1 + |x_{\mathbf{k}}|^2} \right), \quad (27)$$

并通过下列变换引入新的变量 $u_{1\mathbf{k}}$ 和 $u_{2\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} u_{1\mathbf{k}} &= \exp \left[i \int^t \hat{H} \left(\frac{v_{1\mathbf{k}}}{v_{2\mathbf{k}}} \right) dt \right] v_{1\mathbf{k}}, \\ u_{2\mathbf{k}} &= \exp \left[i \int^t \hat{H} \left(\frac{v_{1\mathbf{k}}}{v_{2\mathbf{k}}} \right) dt \right] v_{2\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (28)$$

显然, 利用(27)和(28)式, 方程(26)可化成

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{D}{Dt} + \frac{i}{2} \left[\Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) - \hat{H} \left(\frac{u_{1\mathbf{k}}}{u_{2\mathbf{k}}} \right) \right] \right\} u_{1\mathbf{k}} = \varepsilon u_{2\mathbf{k}}, \\ & \left\{ \frac{D}{Dt} - \frac{i}{2} \left[\Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) - \hat{H} \left(\frac{u_{1\mathbf{k}}}{u_{2\mathbf{k}}} \right) \right] \right\} u_{2\mathbf{k}} = -\varepsilon^* u_{1\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (29)$$

这是一组形式上很对称的方程. $\rho_{0\mathbf{k}}$ 与 $u_{1\mathbf{k}}$ 和 $u_{2\mathbf{k}}$ 的关系为

$$\rho_{0\mathbf{k}} = -iu_{1\mathbf{k}}/u_{2\mathbf{k}}. \quad (30)$$

由于 $\hat{\nu} \approx \hat{\nu}^*$ ($\hat{\nu}$ 和 $\hat{\nu}^*$ 的定义详见 (II) 的(21)式), 从(27)式可看出

$$\hat{n}(x_{\mathbf{k}}) \approx -\hat{n}\left(\frac{1}{x_{\mathbf{k}}}\right).$$

这就是说, 激发很弱与激发很强时, 电子和空穴间的相互作用对传播方程(29)的影响是类似的. 大家知道, 在通常的弱激发的光吸收中, 电子空穴相互作用的影响是不重要的. 所以, 可以近似地把(29)式中的 $\hat{n}$ 项略去, 便得到

$$\begin{aligned} \left[\frac{D}{D_t} + \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] u_{1\mathbf{k}} &= \varepsilon u_{2\mathbf{k}}, \\ \left[\frac{D}{D_t} - \frac{i}{2} \Delta\omega(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \right] u_{2\mathbf{k}} &= -\varepsilon^* u_{1\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (31)$$

从(17)式可见, ε 是正比于 $\tilde{A}_0$ 的. 因此, (31)式的右端包含 $\tilde{A}_0$ 和 $\tilde{A}_0^*$, 这样的方程很类似于 Захаров-Шабат 型的方程^[9]. 如果再略去 $\tilde{A}_0$ 的方程(18)中的 J_1 项 (右端第一项), 那么方程(18)和(31)就完全和 Захаров-Шабат 方程一样了. 我们知道^[10,11], 一个非均匀展宽的二能级系统中自感透明脉冲的问题, 可以化作 Захаров-Шабат 方程的形式, 并且利用 Захаров-Шабат^[9] 提出的反散射方法可以求得方程的解.

综上所述, 在带间跃迁情况下, 忽略对它没有本质影响的电子空穴间的相互作用后, 借助于方程(18)和(31), 可以说明自感透明脉冲在半导体中是能够发生的. 当然, 如果进一步考虑 $\hat{n}$ 项对自感透明脉冲的影响, 并从数学上严格论证, 还是一个有待解决的问题.

四、激子跃迁情况

当入射的相干光的频率和半导体中某一分立的激子谱线接近共振时, 在 (II) 的第四至六节中已经证明, 这样的系统和一个等效的二能级原子系统是完全类似的. 在本节中, 我们将讨论此系统中光的相干传播现象. 与 (II) 中的(53)式一样, 令

$$\rho_{0\mathbf{k}} = \tilde{l}_{1s, \mathbf{k}}, \quad (32)$$

$f_{1s, \mathbf{k}}$ 是激子在布洛赫波表象中的 $1s$ 态波函数. 把(32)式代入(16)式, 并引入下列记号:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) |f_{1s, \mathbf{k}}|^2 f_{1s, \mathbf{k}}}{\sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) f_{1s, \mathbf{k}}^*} \approx \frac{\sum_{\mathbf{k}} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2 f_{1s, \mathbf{k}}}{\sum_{\mathbf{k}} f_{1s, \mathbf{k}}^*}, \\ \frac{\hbar}{2} &= \sqrt{r} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) f_{1s, \mathbf{k}}^* e^{i\varphi} \\ &\approx \varepsilon(\mathbf{k}) \left[\left(\sum_{\mathbf{k}} f_{1s, \mathbf{k}}^* \right) \left(\sum_{\mathbf{k}} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2 f_{1s, \mathbf{k}} \right) \right]^{1/2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (33)$$

(33)式中 φ 为光波的位相, 其含义见(7)式; 从(17)式 ε 的定义中知道, ε 一般是与 $\mathbf{k}$ 有关的, 但作为近似在这里先略去它与 $\mathbf{k}$ 的依赖关系. 再引入符号:

$$\delta\omega_{\mathbf{q}} = \Delta\omega_1 - u_{\mathbf{q}} \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$u = \sqrt{r} e^{i\varphi} l_1, \quad (34)$$

则(16)式化成下列方程:

$$\frac{D}{Dt} u = -i\delta\omega_q u + \frac{\hbar}{2} (1 + u^2). \quad (35)$$

如果作 (II) 中(63)和(64)式所示的变换, 于是(35)式可化成一个自旋在外场下进动的方程的形式:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{m} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u + u^*}{1 + |u|^2}, \quad m_y = \frac{1}{2i} \cdot \frac{u - u^*}{1 + |u|^2}, \\ m_z &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2}, \quad \mathbf{H} = (0, -\hbar, \delta\omega_q). \end{aligned} \quad (37)$$

方程(36)与 (II) 中(65)式的区别仅在于以 $\frac{D}{Dt}$ 代替 $\frac{d}{dt}$, 原因是这里的 $\frac{D}{Dt}$ 表示了激发的电子空穴波——激子波的传播。

一般说来, 我们还必须考虑到激子谱线有一个宽度, 应该用线型函数 $\alpha(\Delta\omega_1)$ 来描述它, $\alpha(\Delta\omega_1)$ 满足

$$\begin{aligned} \int \alpha(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_1) &= 1, \\ \Delta\omega_1 &= \frac{1}{\hbar} (E_1 - \hbar\omega). \end{aligned} \quad (38)$$

这样一来, 由于与激子态的光激发有关的物理量一般是 $\Delta\omega_1$ 的函数, 因此应把它们对线型函数作平均, 此平均用记号 $\langle \dots \rangle$ 表示:

$$\langle f \rangle = \int f(\Delta\omega_1) \alpha(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_1). \quad (39)$$

对(10)式右端取平均, 并利用(5), (15), (32)–(34)式, 不难得到入射波的缓变振幅所满足的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial t} &= -i \frac{2\pi e^2}{m_d c \omega Q r} \left\langle |u|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{|f_{1s, \mathbf{k}}|^2}{1 + \frac{|u|^2}{r} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2} \right\rangle \tilde{A}_0 \\ &+ \frac{4\pi e}{m\omega \sqrt{Q} r} e^{-i\varphi} \left\langle u \sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{f_{1s, \mathbf{k}}}{1 + \frac{|u|^2}{r} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

上式右边的第一项是与带内运动相应的极化项; 从物理上讲, 它是光激发的电子和空穴对自由载流子介电函数的贡献, 略去它不影响问题的实质. 略去(40)式右端第一项, 并且引入下面的记号:

$$Q_0 = Qr, \quad \phi_{1s}(0) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{Q}} f_{1s, \mathbf{k}}, \quad \chi_2 = \frac{4\pi e}{m\omega} P(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{Q_0}} \phi_{1s}(0), \quad (41)$$

(40)式就可近似写作

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{A}_0 = \left\langle u \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{f_{1s, \mathbf{k}}}{1 + \frac{|u|^2}{r} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2} \right\rangle \chi_2 e^{-i\varphi} / \phi_{1s}(0). \quad (42)$$

进一步作下列近似:

$$\frac{1}{\phi_{1s}(0) \sqrt{Q}} \left\langle u \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{1s, \mathbf{k}}}{1 + \frac{|u|^2}{r} |f_{1s, \mathbf{k}}|^2} \right\rangle \approx \left\langle \frac{u}{1 + |u|^2} \right\rangle, \quad (43)$$

可以从 r 与 $\phi_{1s}(0)$ 的定义(33)式和(41)式中看出上述近似是合理的. 于是方程(42)简化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{A}_0 = \chi_2 \left\langle \frac{u}{1 + |u|^2} \right\rangle e^{-i\varphi} = \chi_2 \langle m_x + im_y \rangle e^{-i\varphi}. \quad (44)$$

再引入记号:

$$M_+ = (m_x + im_y) e^{-i\varphi}, \quad M_- = (m_x - im_y) e^{i\varphi}, \quad M_z = m_z \quad (45)$$

和

$$\chi_3 = \frac{e}{mc\hbar} \sqrt{Q_0} P(\mathbf{k}) \phi_{1s}(0), \quad (46)$$

方程(36)化成为

$$\frac{D}{Dt} M_z = -\frac{1}{2} \chi_3 (\tilde{A}_0 M_+ + \tilde{A}^* M_-), \quad \frac{D}{Dt} M_+ = -i\delta\omega_1 M_+ + \chi_3 \tilde{A}_0 M_z, \quad (47)$$

方程(44)化成为

$$\frac{D}{Dt} M_- = i\delta\omega_1 M_- + \chi_3 \tilde{A}_0^* M_z, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{A}_0 = \chi_2 \langle M_+ \rangle. \quad (48)$$

(47)和(48)式组成的联立方程组便是激子线中光的相干传播的基本方程.

作变数替换

$$Z = z - u_q t, \quad \tau = \left(t - \frac{z}{c}\right) / \left(1 - \frac{u_q}{c}\right), \quad (49)$$

(47)和(48)式化成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial Z} &= \chi_2 \langle M_+ \rangle / (1 - u_q/c), & \frac{\partial M_+}{\partial \tau} &= -i\delta\omega_1 M_+ + \chi_3 \tilde{A}_0 M_z, \\ \frac{\partial M_-}{\partial \tau} &= i\delta\omega_1 M_- + \chi_3 \tilde{A}_0^* M_z, & \frac{\partial M_z}{\partial \tau} &= -\chi_3 (\tilde{A}_0 M_+ + \tilde{A}_0^* M_-) / 2. \end{aligned} \quad (50)$$

方程(50)与通常处理二能级非均匀展宽原子系统的相干传播方程组完全相同^[10,12,13]. 这组方程可用反散射方法来求解.

相干脉冲光在用方程(50)描写的系统中的传播,可以有两种模式^[14]: 一种叫辐射模式,一种叫孤立子模式. 当入射的光脉冲比较弱(脉冲的面积较小)时,它在这个系统中的传播的模式是辐射模式. 这种模式与通常光在吸收介质中的传播模式是类似的,传播过程中光脉冲随传播距离增加而近于指数衰减,同时介质从光脉冲中获得能量. 由于激发很弱,把非线性方程(50)线性化得到的结果在定性上是能正确地描述这个现象的. 但是当入射光脉冲比较强(脉冲面积比较大,并超过某一阈值)时,将会出现“孤立子”型传播模式. 脉冲在传播中逐渐“整形”成为一个或多个“孤立子”脉冲,“孤立子”脉冲在传播中不

衰减并能保持形状不变. 这一点从物理上是不难理解的. 孤立子脉冲相当于这样的情况: 脉冲的前半部分把系统激发到激发态, 并使激发饱和, 接着脉冲的后半部分又使系统产生受激发射, 系统回到初态; 在这样的过程中系统和光波只是来回地交换能量, 两者都没有从对方获得能量. (II) 中的第五节的末尾我们曾从另一角度定量地叙述了分立激子态的这个物理图象. 这种“孤立子”脉冲就是所谓的自感透明脉冲^[15]. 许多作者^[9,10,13,14]所介绍的反散射方法不仅为方程(50)的求解提供了方法, 并且对上述两种传播模式的物理图象提供了鲜明的数学表达方式. 特别是按照文献[11]中提出的概念, 可把入射脉冲“分解”为辐射模式和孤立子模式的叠加, 在传播过程中辐射模式逐渐衰减, 余下的孤立子模式保持不变, 相当于脉冲进行了“整形”.

作为一个例子, 用标准的反散射方法, 可找到方程(50)的单个孤立子脉冲——自感透明脉冲的解, 其形式如下:

$$A_0(z, t) = 4a \exp[i(\xi_1 X - 2bT - \theta)] \operatorname{sech}(\xi_2 X - 2aT + \varphi). \quad (51)$$

(51) 式中 θ, φ 是常数; $\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x})$; 参数 a, b, ξ_1 和 ξ_2 由下列关系联系着:

$$\xi_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b-x}{(b-x)^2 + a^2} \alpha'(x) dx, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(b-x)^2 + a^2} \alpha'(x) dx, \quad (52)$$

其中

$$\alpha'(x) = 2\chi_3 \alpha(2\chi_3 x), \quad (53)$$

α 是线型函数(38)式, 变量 X 和 T 为

$$X = \chi_2 Z = \chi_2(z - u_q t), \quad T = \chi_3 \tau = \chi_3 \left(t - \frac{z}{c} \right) / \left(1 - \frac{u_q}{c} \right). \quad (54)$$

从(51)式可以看到, 这个脉冲的高度是 $4a$; 持续时间是 $\frac{1}{c} [2a\chi_3/(c - u_q) + u_q\chi_2\xi_2/c]^{-1} \approx \chi_3/2a$; 脉冲传播的速度为

$$v = \left(\frac{2a\chi_3}{c} + \xi_2\chi_2 \right)^{-1} \left(\frac{2a\chi_3}{c} + \xi_2\chi_2 \frac{u_q}{c} \right) c \approx \left(1 + \frac{\xi_2\chi_2 c}{2a\chi_3} \right)^{-1} c. \quad (55)$$

上式表明: 脉冲传播速度是与脉冲的高度和持续时间相联系着的, 并且 $v \ll c$, 这正是自感透明脉冲的显著特点之一.

在方程(50)中亦可唯象地引入横向弛豫时间和纵向弛豫时间; 并且可以期望, 除自感透明外, 其它一些相干传播效应亦可在近共振的激子跃迁中观察到.

五、结 束 语

在(I)和(II)中, 我们证明了: 对半导体的带间跃迁和激子跃迁来说, 都可以在一定程度上等效于一个二能级原子系统在外场下的近共振跃迁. 在本文中, 我们进而得到了相当于通常的 Maxwell-Bloch 方程的相干传播方程; 因而可以期望, 二能级原子系统的各种相干传播现象同样会在半导体中发生. 我们特别讨论了自感透明问题, 证明了在一定近似条件下相干传播方程可以化成可用反散射方法求解的标准形式, 从而也就证明了半导体中自感透明现象的存在, 此结论和文献[3]的结论是不同的. 可以预期, 在半导体中的

光的相干传播效应今后将会受到更广泛地注意。

本文的大部分工作是作者们于 1979 年 6 月至 9 月在国际理论物理中心 (ICTP, 意大利) 访问时进行的, 部分内容曾在国际理论物理中心内部报告 IC/80/60 上登载, 这次发表时作了修改和补充。

作者们对访问期间国际理论物理中心给予的盛情接待表示谢意。黄昆教授对这个工作给以很多帮助, 特此感谢。

参 考 文 献

- [1] 甘子钊、杨国桢, 物理学报, **30**(1981), 878
- [2] Т. Л. Гварджаладзе, А. З. Грасюк, В. А. Коваленко, *ЖЭТФ*, **64** (1973), 446; Ф. Брюкнер, В. С. Днепровский, Д. Г. Коцуг, *Письма в ЖЭТФ*, **20** (1974), 10.
- [3] E. Hanamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **37**(1974), 1545; 1553.
- [4] J. Goll, H. Haken, *Phys. Rev. A*, **18**(1978), 2241.
- [5] 例如: J. Callaway, "Quantum Theory of the Solid State", Chap 6, Academic Press, (1976).
- [6] L. Allen, J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two-Level Atom", Wiley, New York, (1975).
- [7] F. T. Arecchi, V. Degiorgio, C. G. Someda, *Phys. Lett. A*, **27**(1968), 588.
- [8] S. L. McCall, *Phys. Rev. A*, **9**(1974), 1515; R. Bonifacio, L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A*, **18**(1978), 1129.
- [9] B. E. Захаров, А. Б. Шабар, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118.
- [10] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, *J. Math. Phys.*, **15**(1974), 1852.
- [11] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **LIII**, **4**(1974), 249.
- [12] G. L. Lamb, Jr., *Phys. Rev. A*, **9**(1974), 422.
- [13] G. L. Lamb, Jr., *Rev. Mod. Phys.*, **43**(1971), 99.
- [14] D. J. Kaup, *Phys. Rev. A*, **16**(1977), 704.
- [15] S. L. McCall, E. L. Hahn, *Phys. Rev.*, **183**(1969), 457.

A THEORY OF COHERENT PROPAGATION OF LIGHT WAVE IN SEMICONDUCTORS (III)

GAN ZI-ZHAO

(Department of Physics, Peking University)

YANG GUO-ZHEN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper is the third part of a theory of the coherent propagation of light in semiconductors. Based on the previous papers (I) and (II)^[1], the Maxwell-Bloch equation describing the coherent propagation of light in semiconductors is derived; the equation is then used to discuss a number of possible effects of coherent propagation in both interband transitions and exciton transitions. In particular, the phenomena of self-induced transparency are analysed, and it is shown that the phenomena may occur in the above two transitions.