

T_c 级数的收敛半径对声子谱高频行为的敏感性

雷 啸 霖

(中国科学院上海冶金研究所)

1980年11月26日收到

提 要

通过实例说明,超导临界温度级数的收敛半径是声子谱高频端行为的敏感量。因此,以它作 A, B 两类超导体分类的判据是不适宜的。

一、引 言

为了描述 T_c 对有效声子谱依赖关系的不同,吴杭生和吉光达^[1] 提出把超导体分成 A 型和 B 型两种。前者 $\lambda < \lambda_1$; 后者 $\lambda > \lambda_1$ 。这里 $1/\lambda_1$ 是线性化的 Eliashberg 方程按 $1/\lambda$ 展开的幂级数解^[2,3]

$$(2\pi T_c)^{-2} = \frac{c_0}{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + c_1 \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} \frac{1}{\lambda} + \left(c_2 \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + c_2 \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right) \frac{1}{\lambda^2} + \dots \right\} \quad (1)$$

的收敛半径。最近,周子舫等^[4] 证明: 线性化的 Eliashberg 方程与作代换 $T_c \rightarrow \beta T_c$, $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} = \lambda / [I_\beta(\lambda, \mu^*) + Z_\beta(\lambda, \mu^*)\mu^*]$ 后 $\mu^* = 0$ 的一级近似 T_c 方程等价, 其中取 $\beta = 0.871(0.63 + 1.1\mu^*)^{-1/2}$ 时 $I_\beta(\lambda, \mu^*) \simeq 0.63$, $Z_\beta(\lambda, \mu^*) \simeq 3(1 - 2\mu^*/\lambda)$ 。这样,只要求出一级 T_c 级数的收敛半径 $1/\lambda_1$, 级数(1)式的收敛半径问题也就解决了。

记 $y = (2\pi T_c)^{-2}$, $z = 1/\lambda$, $\mu^* = 0$ 的一级近似 T_c 方程可写作

$$z = F(y) = \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} g(\omega) d\omega, \quad (2)$$

其中 $g(\omega) = \frac{2}{\lambda \omega} \alpha^2(\omega) F(\omega)$ 是归一化的有效声子谱, ω_{ph} 是声子频率的上限。将积分号内的函数形式上展开

$$\frac{1}{\omega^2 y + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\omega^2 y)^n, \quad (3)$$

逐项积分, 可把方程(2)写成级数形式

$$z = \sum_{l=1}^{\infty} a_l x^l = x \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} a_l x^{l-1} \right). \quad (4)$$

这里 $x = y \langle \omega^2 \rangle$, $a_l = (-1)^{l-1} \langle \omega^{2l} \rangle / \langle \omega^2 \rangle^l$, 其中 $\langle \omega^n \rangle = \int \omega^n g(\omega) d\omega$ 是 n 次矩。将级数(4)式按拉格朗日公式

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} a_l t^{l-1}\right)^n} \right]_{t=0} z^n \quad (5)$$

反演, 得到级数

$$x \equiv y\langle\omega^2\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad (6)$$

其中

$$b_1 = 1, \quad (6a)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \sum_{\{m_i\}} a_{m_1+1} a_{m_2+1} \cdots a_{m_k+1} \quad (n \geq 2), \quad \left(m_i \geq 1, \sum_{i=1}^k m_i = n-1\right). \quad (6b)$$

(6) 式就是一级近似 T_c 级数^[2].

在文献 [5] 中, 我们指出: 位于复平面负实轴上的点

$$\bar{z}_{ph} = F(-\omega_{ph}^{-2}) \equiv \int_0^{\omega_{ph}} \frac{\omega^2 g(\omega)}{\omega^2 - \omega_{ph}^2} d\omega \quad (7)$$

一般情况下是复变函数 $z = F(y)$ 的反函数 $y = F^{-1}(z)$ 的分支点. 因此, 如果它离原点的距离比 $F^{-1}(z)$ 的其他奇点更近, 它将决定级数 (6) 式的收敛半径.

周子舫等^[6]不同意这个看法. 他们用一个具体的谱计算了级数 (6) 式的前 11 项, 发现即使 $1/\lambda$ 接近或略大于 $|\bar{z}_{ph}|$, 由这 11 项算出的 T_c 值与直接数字解方程 (2) 所得的 T_c 值仍符合得很好. 据此他们认为级数 (6) 式的收敛半径不可能被 $\bar{z}_{ph}$ 限制.

本文中我们就这个问题作进一步讨论.

二、收敛半径是声子谱高端行为的敏感量

考虑谱

$$g_1(\omega) = \begin{cases} 4\omega(1-\omega^2) & \text{当 } \omega \leq 1, \\ 0 & \text{当 } \omega > 1. \end{cases} \quad (8)$$

其形如图 1 实线所示, $\omega_{ph} = 1$. 相应的函数 (2) 式为

$$z = F_1(y) = 1 + \frac{2}{y} - 2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \right) \ln(y+1), \quad (9)$$

它将有割缝 $(-\infty, -1)$ 的 y 平面映射到 z 平面由曲线 γ_1^+ 和 γ_1^- 所围的区域(图 2). 点 $\bar{z}_{ph}$ 为 $\bar{z}_{ph1} = F_1(-1) = -1$, 它并不对相应级数 (6) 式的收敛半径有新的限制.

再考虑谱

$$g_2(\omega) = \begin{cases} 4(1-4\Delta)\omega(1-\omega^2) + \Delta\omega(4-\omega^2) & \text{当 } \omega \leq 1, \\ \Delta\omega(4-\omega^2) & \text{当 } 1 < \omega \leq 2, \\ 0 & \text{当 } \omega > 2, \end{cases} \quad (10)$$

其中 Δ 是一个很小的正数. $g_2(\omega)$ 谱形与 $g_1(\omega)$ 谱形的区别不大, 只是高频端拖了一个很

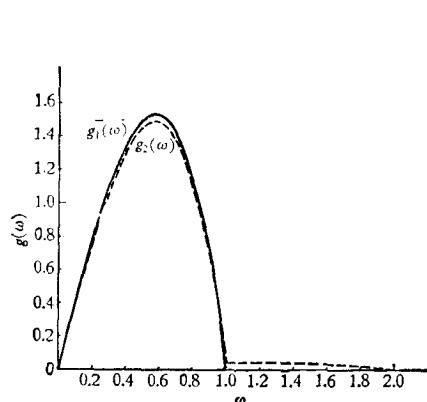


图 1

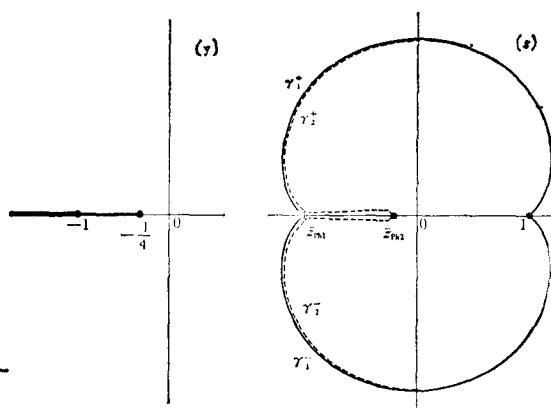


图 2

小的长尾巴。但现在最高声子频率变为 $\omega_{ph} = 2$ 。相应于 $g_2(\omega)$ 的函数 (2) 式为

$$z = F_2(y) = F_1(y) - 4\Delta(F_1(y) - 1) + 2\Delta \left[\frac{1}{y} - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} \right) \ln(4y + 1) \right], \quad (11)$$

它将有割缝的 $(-\infty, -\frac{1}{4})$ 的 y 平面映射到 z 平面曲线 γ_2^+ 和 γ_2^- 所围的区域。这时 z_{ph}

变到 $z_{ph2} = F_2\left(-\frac{1}{4}\right) = -0.096 - 3.6\Delta$; 而由 $F'(y) = 0$ 决定的奇点 $z_{\pm}$ 变化甚微。

按照文献 [5], z_{ph2} 将决定相应的级数 (6) 式的收敛半径。

显然, 如果 Δ 非常小, 则对应于谱 $g_1(\omega)$ 和谱 $g_2(\omega)$ 的 Eliashberg 方程的差别及一级近似 T_c 方程 (2) 的差别将非常小; 因而这两个谱的物理效果几乎是一样的, 由它们所代表的超导体应当属于同一类。但是, 上面的讨论表明: 不管 Δ 多么小, $g_2(\omega)$ 所对应级数的收敛半径比 $g_1(\omega)$ 所对应级数的收敛半径要小得多。

直接从级数 (6) 式的形式看, 出现这种情况并不奇怪。因为 (6) 式中 z 的 n 次幂的系数包含有 ω 的 $2n$ 次矩与二次矩的 n 次方之比:

$$\alpha(n) = \frac{\langle \omega^{2n} \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^n}.$$

对谱 $g_1(\omega)$, $\langle \omega^n \rangle = 8/(n+2)(n+4)$; 而对谱 $g_2(\omega)$, $\langle \omega^n \rangle = 8[1 + (2^{n+2} - 4)\Delta]/(n+2)(n+4)$ 。虽然它们的低次矩几乎一样, 高次矩则大不相同。由于 $\Delta > 0$, 当 n 充分大时总可以使 $2^{2n}\Delta \gg 1$ 及 $\Delta^{1/n} \sim 1$, 从而两个谱的 $\alpha(n)$ 之比可达

$$\left[\frac{\alpha_2(n)}{\alpha_1(n)} \right]^{1/n} > \frac{4}{1 + 12\Delta}.$$

所以 $g_2(\omega)$ 级数的收敛半径完全可能比 $g_1(\omega)$ 级数的收敛半径小得多。

三、一个收敛半径为零的例子

为了突出显示声子谱高频端细微末节对收敛半径的严重影响以及条件 $F'(y) = 0$ 决定的奇点不足以确定一级 T_c 级数的收敛半径, 我们不妨考虑一个随 ω 衰减很快, 但理论

上无穷拖尾的谱:

$$g_3(\omega) = 2\omega e^{-\omega^2}. \quad (12)$$

由(7)式,当 $\omega_{ph} \rightarrow \infty$ 时, $\bar{z}_{ph} = 0$. 所以按照文献[5], 相应于这个谱的级数(6)式的收敛半径为零. 我们现在用另一方法证明这一点. 实际上, 对于 $g_3(\omega)$,

$$\langle \omega^{2n} \rangle = 2 \int_0^\infty \omega e^{-\omega^2} \omega^{2n} d\omega = n!,$$

级数(4)式的收敛半径显然为零. 从而立即推得级数(6)式的收敛半径必定为零. 这可证明如下. 假定级数(6)式的收敛半径大于零, 即存在 $\delta > 0$, 当 $|z| < \delta$ 时级数(6)式是收敛的. 因而在这个区域它代表一个解析函数: $x = G(z)$. 这个函数确定了 z 平面到 x 平面的一个映射. 由于

$$b_1 = 1 \neq 0,$$

按照反函数定理^[7], 必定存在一个 $\rho > 0$, 在 $|x| < \rho$ 的区域该映射确定一个单值解析函数 $z = G^{-1}(x)$. 这个函数在 $x = 0$ 点的泰勒展式可按拉格朗日公式而求得

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{\sum_{l=1}^{\infty} b_l t^{l-1}} \right)^n \right]_{t=0} x^n. \quad (13)$$

因此这个级数的收敛半径 $R \geq \rho > 0$. 但是级数(6)式正是级数(4)式按照拉格朗日公式形式计算而得到的, 所以按(13)式再反演一次得到的级数就是级数(4)式. 这表明级数(4)式的收敛半径需大于零. 所述结论得证.

应当指出, $z = 0$ 显然不是条件 $F'(y) = 0$ 所确定的奇点. 因此文献[3]提供的办法不能对这类谱形的收敛半径给出正确的判断.

诚然, 实际声子谱频率总是有上限的. 但是把象(12)式这种谱在例如 $\omega = 3$ 处截断显然对 T_c 已不产生任何可察觉的效应, 把它作为某种实际谱的近似也无不可. 但是, 就是这样一个迅速衰减的尾巴竟使得级数(6)式的收敛半径变为零. 很难想象一个物理上有意义的量会是这样.

四、结 语

两个谱, 如果只是高端行为或小拖尾的长短有所不同, 它们对应的 T_c 方程以及级数(6)式的前面一些项显然差别很小. 但是, 一个级数的收敛半径是决定于 n 非常大的那些项的行为, 而不取决于级数前几项的性质. 对于某一个 z , 从级数(6)式的前面一些项计算出的 T_c 值与直接从方程(2)数值解得到的 T_c 值接近到一定程度并不能说明级数(6)式对这个 z 值是收敛的. 级数(6)式的第 n 项含有一直到 $2n$ 次的矩 $\langle \omega^{2n} \rangle$, 当 n 很大时, $\langle \omega^{2n} \rangle$ 对 $g(\omega)$ 的高端行为是很敏感的, 拖一点尾巴 $\langle \omega^{2n} \rangle$ 就会有很大变化, 从而会使收敛半径大不一样. 因此, 测试声子谱时高端行为微小的不精确性, 在物理上本来没有什么影响, 却会显著改变收敛半径的数值.

综上所述, 我们认为一级 T_c 级数(6)式的收敛半径 $1/\Delta_1$, 因而幂级数解(1)式的收敛半径 $1/\Delta$, 并不是一个在物理上有意义的量. 因此, 用它作为超导体分类的判据是不适

宜的。按 T_c 对有效声子谱依赖关系的不同把超导体分为两类是很好的想法,但分类的判据不能是级数的收敛半径。

鉴于周子舫等^[6]对迄今已有的声子谱的计算得到的 $|\bar{z}_{ph}|$ 值都是如此之小,以致没有一个超导体的 $1/\lambda$ 小于 $|\bar{z}_{ph}|$, 因而级数(1)式不能认为是实际超导体的严格的 T_c 公式。当然,用它的前面一些项来作近似 T_c 公式是很好的,这已为文献[1—4]的大量数值计算所证明。

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、吉光达, 中国科学, 1979, 6, 657.
- [2] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26** (1977), 509.
- [3] 蔡俊道、吉光达、吴杭生、龚昌德、蔡建华, 物理学报, **28** (1979), 393.
- [4] 周子舫、吴杭生、茅德强、顾一鸣, 物理学报, **29** (1980), 1186.
- [5] 雷啸霖, 物理学报, **29** (1980), 1333.
- [6] 周子舫、茅德强、顾一鸣、吴杭生, 物理学报, **29** (1980), 1338.
- [7] 例如, A. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 第四章, (1957).

SENSITIVITY OF THE RADIUS OF CONVERGENCE OF THE SERIES FOR SUPERCONDUCTING T_c TO THE HIGH- FREQUENCY BEHAVIORS OF PHONON SPECTRAL FUNCTION

LEI XIAO-LIN

(Shanghai Institute of Metallurgy, Academia Sinica)

ABSTRACT

On the basis of a recent discussion on the analytical properties of the first order equation for T_c , we show, by concrete examples, that the radius of convergence of the series for superconducting critical temperature is so sensitive to the high-frequency behaviors of the phonon spectral function, that it is inadequate for it to serve as a critical quantity in the criterion for dividing superconductors into type A and type B.