

T_c 级数解的收敛性质

吴杭生 顾一鸣

(中国科学技术大学)

1980年12月15日收到

提 要

本文证明了,当 $|\bar{z}_{ph}| < \min(|\bar{z}|, 1)$ 时,虽然 T_c 级数解的收敛圆是由奇点 $\bar{z}_{ph}$ 决定的,但是只要 $\frac{1}{\lambda} < \left[0.63 + 3\mu^+ \left(\frac{1}{A_1}\right)\right] \frac{1}{A_1}$, T_c 级数解在收敛圆外仍然是个很好的渐近展开式,其中 $\frac{1}{A_1} = \min(|\bar{z}|, 1)$; $\mu^+(x) = (1 - 2\mu^*x)\mu^*$.

—

最近,雷啸霖^[1]正确地指出,本文作者之一及其合作者在文献[2]中,对复变函数

$$z = F(y) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1} \quad (1)$$

的反函数 $y = G(z)$ 的奇点所作的分析是不完全的. 他证明了,除了文献[2]已考虑到的极点 $z = 1$ 和正则分枝点 $\bar{z}$ 外,位于 z 复平面的负实轴上的点

$$\bar{z}_{ph} = F(-\omega_{ph}^{-2}) = - \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_{ph}^2 - \omega^2} \quad (2)$$

也是函数 $y = G(z)$ 的分枝点. 这样,正确的计算 $\mu^* = 0$ 时、一级近似 T_c 级数解^[3]的收敛半径 $\frac{1}{A_1}$ 公式应为

$$\frac{1}{A_1} = \min(|\bar{z}_{ph}|, |\bar{z}|, 1), \quad (3)$$

而不是文献[2]给出的公式

$$\frac{1}{A_1} = \min(|\bar{z}|, 1). \quad (4)$$

可是,作者及其合作者通过一个具体例子对(3)式提出异议^[4]. 他们选取一个和 pb 谱很接近的有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$. 用数值计算方法计算得到,复变函数(1)式的反函数 $y = G(z)$ 的离原点最近的一对正则分枝点为

$$\begin{aligned} \bar{z}_+ &= 0.147 + 0.875i, \\ \bar{z}_- &= 0.147 - 0.875i; \end{aligned} \quad (5)$$

而分枝点 $\bar{z}_{ph}$ 为

$$\bar{z}_{ph} = -0.4844. \quad (6)$$

因此, 由 (3) 式定出的收敛半径 $\frac{1}{\Lambda_1}$ 应为

$$\frac{1}{\Lambda_1} = |\bar{z}_{ph}| = 0.4844. \quad (7)$$

作者等人接着计算 $\mu^* = 0$ 时一级近似 T_c 级数解的前 11 项, 发现即使 $\frac{1}{\lambda}$ 接近或略大于 $|\bar{z}_{ph}|$, 由这 11 项算出的 T_c 值和一级近似 Eliashberg 方程给出的 T_c 值很好符合, 看不到当接近或超出收敛圆时, 级数所应具有收敛很慢或发散现象。

本文是文献 [4] 的继续。在本文中, 我们企图进一步阐明奇点 $\bar{z}_{ph}$ 和 T_c 级数解的收敛性质的关系。下面限于讨论 $|\bar{z}_{ph}| < \min(|\bar{z}|, 1)$ 情形。显然, 这是我们唯一感兴趣的情形。

二

由 (1) 式定义的复变函数 $F(y)$ 是个多值函数。取 y 为正实数时, z 也为正实数的分枝^[2]。此分枝的反函数 $y = G(z)$ 也是多值函数。下面限于考虑当 z 位于 0 到 1 这一段正实轴上时, y 为正实数的那个分枝^[2]。

如果令 $y = 1/\lambda$, $y = (2\pi T_c)^{-2}$, 并把它看成复变量, 则 $\mu^* = 0$ 时, 一级近似 T_c 级数解正是复变函数 $z = F(y)$ 的反函数 $y = G(z)$ 在 $z = 0$ 邻域的幂级数表示式^[2]。根据复函数理论, 这个幂级数的收敛半径是由函数 $y = G(z)$ 离原点最近的奇点 $\bar{z}_{ph}$ 决定的, 即

$$\frac{1}{\Lambda_1} = |\bar{z}_{ph}|. \quad (8)$$

自然, 在收敛圆外, $y = G(z)$ 的幂级数表示式不再收敛。可是, 我们下面将证明, 只要 $|z| < \min(|\bar{z}|, 1)$, 它仍然是个很好的渐近展开式。

定理一: 设

$$F_1(y) = \int_0^{\omega_{ph}-\Delta} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2 y}{\omega^2 y + 1}, \quad (9)$$

其中 $0 < \Delta < \omega_{ph}$ 。证明在 Δ 足够小时, $z = F_1(y)$ 的反函数 $y = G_1(z)$ 按 z 展开的幂级数的收敛半径实际上是由 (4) 式给出的。

证明: 仿照文献 [1] 和 [2] 的讨论, 不难看到, $y = G_1(z)$ 的奇点有如下几种: 一是使 $F_1'(y) = 0$ 的正则分枝点 $\bar{z}(\Delta)$ 。设离原点 $z = 0$ 最近的这一类分枝点为 $\bar{z}_+(\Delta)$ 和 $\bar{z}_-(\Delta)$ 。另一是位于正实轴上的极点:

$$z_p(\Delta) = \int_0^{\omega_{ph}-\Delta} d\omega g(\omega) = 1 - \int_{\omega_{ph}-\Delta}^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega). \quad (10)$$

最后一个就是雷啸霖指出的奇点:

$$\bar{z}_{ph}(\Delta) = - \int_0^{\omega_{ph}-\Delta} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{(\omega_{ph} - \Delta)^2 - \omega^2}. \quad (11)$$

注意到, 只要 $\Delta \neq 0$, 则 $g(\omega_{ph} - \Delta) \neq 0$, 因而

$$\bar{z}_{ph}(\Delta) \rightarrow -\infty. \quad (12)$$

这样,复变函数 $y = G_1(z)$ 按 z 展开的幂级数的收敛半径 $\frac{1}{\Lambda_1(\Delta)}$ 不再由奇点 $\bar{z}_{ph}(\Delta)$, 而是由正则分枝点 $\bar{z}_{\pm}(\Delta)$ 和极点 $z_p(\Delta)$ 中离原点最近的一个决定的,从而

$$\frac{1}{\Lambda_1(\Delta)} = \min(|\bar{z}_{\pm}(\Delta)|, |z_p(\Delta)|). \quad (13)$$

当 Δ 足够小时, $\bar{z}_{\pm}(\Delta) \doteq \bar{z}_{\pm}$, $z_p(\Delta) \doteq 1$, 因而 (13) 式实际上就是 (4) 式.

定理二: 证明只要把 Δ 取得足够地小, 便可使得在 $z = 0$ 的邻域中, $|G(z) - G_1(z)|$ 小于任一指定的小数.

证明: 根据文献 [1] 和 [2] 以及上面对复变函数 $y = G(z)$ 和 $y = G_1(z)$ 的奇点进行的分析, 立刻看出, 在 $z = 0$ 的足够小的邻域中, $y = G(z)$ 和 $y = G_1(z)$ 均是解析函数. 因为当 $\Delta = 0$ 时, $G(z) = G_1(z)$, 所以当 $\Delta \neq 0$ 时, 只要把 Δ 取得足够地小, 便可以使得在 $z = 0$ 邻域中, $|G(z) - G_1(z)|$ 小于任一指定的小数.

推论: 把 $G(z)$ 和 $G_1(z)$ 分别按 z 展开:

$$y = G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n; \quad (14)$$

$$y = G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n z^n, \quad (15)$$

其中系数 b_n 和 b'_n 均是实数^[3]. 当 Δ 足够小时, 这两个级数前面足够多项的系数实际上相等, 即

$$b_n \doteq b'_n, \text{ 当 } n = 1, 2, \dots, N \text{ 时.} \quad (16)$$

N 是足够大的正整数.

证明: 在 $z = 0$ 附近的足够小的邻域 S 中, 级数 (14) 和 (15) 式以及它们的差

$$G(z) - G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \quad (17)$$

均是一致收敛的. 因此, 给定任一个小量 ε , 存在一个大整数 N , 使得下面不等式成立:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \right| < \varepsilon/2. \quad (18)$$

由定理二知: 在邻域 S 中, 对给定的小量 ε , 存在一个大于零的小数 δ . 当 $\Delta < \delta$ 时, $|G(z) - G_1(z)| < \varepsilon/2$, 从而

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \right| < \varepsilon/2. \quad (19)$$

由 (18) 和 (19) 式以及下面不等式:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N (b_n - b'_n) z^n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - b'_n) z^n \right|, \end{aligned} \quad (20)$$

得到

$$\left| \sum_{n=1}^N (b_n - b'_n) z^n \right| < \varepsilon. \quad (21)$$

由于只要 z 是邻域 S 中任意一点, 不等式 (21) 均成立, 所以 $|b_n - b'_n|$ 必须均应是微量, 因而 (16) 式成立.

由定理一知, 级数 (15) 的收敛半径为 $\min(|\bar{z}_{\pm}|, 1)$, 因而比级数 (14) 式的收敛半径 $\bar{z}_{ph}$ 要大. 因此, 由上述的推论便能看出, 虽然当 $|z| > |\bar{z}_{ph}|$ 时, 级数 (14) 式不收敛, 但只要 $|z| < \min(|\bar{z}_{\pm}|, 1)$, 它仍然是个很好的渐近展开式. 由此我们便能理解作者等人在文献 [4] 指出现象了.

作者及其合作者在文献 [5] 中证明了: 把 $\mu^* = 0$ 时, 一级近似 T_c 级数解中的 λ 换为

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{I(\lambda, \mu^*) + Z(\lambda, \mu^*)\mu^*}, \quad (22)$$

便可得到严格的 T_c 级数解^[3]. 在 (22) 式中, $I(\lambda, \mu^*)$ 和 $Z(\lambda, \mu^*)$ 的近似表示式为^[5]

$$I(\lambda, \mu^*) \doteq 0.63; \quad (23)$$

$$Z(\lambda, \mu^*) \doteq \frac{3\mu^+ \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\mu^*}, \quad (24)$$

其中 $\mu^+(x) = (1 - 2\mu^*x)\mu^*$. 利用这个结果, 从上面对 $\mu^* = 0$ 时, 一级近似 T_c 级数解得出的结论, 立刻得出: 即使当 $1/\lambda$ 超过 $[0.63 + 3\mu^+(\bar{z}_{ph})] \cdot \bar{z}_{ph}$, 但只要小于 $1/\Lambda = \left(0.63 + 3\mu^+\left(\frac{1}{\Lambda_1}\right)\right) \frac{1}{\Lambda_1}$ 时, 严格 T_c 级数解虽然是不收敛, 但是是一个很好的渐近展开式, 其中 $1/\Lambda_1$ 是由 (4) 式给出的.

三

在文献 [6] 中, 吉光达和本文作者之一证明了, 在 T_c 级数解的适用范围内, 决定 T_c 的主要参量不是 λ , 而是 $\sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle}$. 因此, 他们建议: 把超导体分为 A 型 ($\lambda < \Lambda$) 和 B 型 ($\lambda > \Lambda$) 两种. 决定 A 型超导体 T_c 的主要参量是 λ ; 而决定 B 型的是 $\sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle}$. 基于文献 [2] 对 T_c 级数解收敛问题的分析, 文献 [6] 的作者把 $1/\Lambda$ 定义为 T_c 级数解的收敛半径, 即

$$\frac{1}{\Lambda} = \left(0.36 + 3\mu^+\left(\frac{1}{\Lambda_1}\right)\right) \frac{1}{\Lambda_1}, \quad (25)$$

其中

$$\frac{1}{\Lambda_1} = \min(|\bar{z}_{\pm}|, 1). \quad (26)$$

在考虑到分枝点 $\bar{z}_{ph}$ 后, (25) 和 (26) 两式定义的 Λ 是否仍然可以用来作为两类超导体的分界呢?

回答是肯定的. 因为当 $|\bar{z}_{ph}| > \min(|\bar{z}_{\pm}|, 1)$ 时, T_c 级数解收敛半径不受 $\bar{z}_{ph}$ 的影

响. 两类超导体分界处的 $\lambda = \Lambda$ 值自然仍然是由 (25) 和 (26) 两式给出的. 至于 $|\bar{z}_{ph}| < \min(|\bar{z}_{\pm}|, 1)$ 情形, $\bar{z}_{ph}$ 虽然影响 T_c 级数解的收敛半径, 但不影响它的适用范围, 因而仍然可以采用 (25) 和 (26) 式定义的 Λ 来划分超导体. 只不过此时, $1/\Lambda$ 不再理解为 T_c 级数解收敛半径而已.

史济怀教授和作者进行过多次有益的讨论. 刘长汶同志阅读了此文的初稿, 并提出了十分宝贵的意见. 作者谨向他们致以诚挚的谢意.

参 考 文 献

- [1] 雷啸霖, 物理学报, **29** (1980), 1333.
- [2] 龚昌德、吴杭生、蔡建华、蔡俊道、吉光达, 物理学报, **27** (1978), 85.
- [3] 吴杭生、蔡建华、龚昌德、吉光达、蔡俊道, 物理学报, **26** (1977), 509.
- [4] 周子舫、茅德强、顾一鸣、吴杭生, 物理学报, **29** (1980), 1338.
- [5] 周子舫、吴杭生、茅德强、顾一鸣, 物理学报, **29** (1980), 1186.
- [6] 吴杭生、吉光达, 物理学报, **27** (1978), 746.

NOTE ON THE CONVERGENCE PROPERTIES OF THE T_c SERIES SOLUTION

WU HANG-SHENG GU YI-MING

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

The analysis of the present paper shows that in the case of $|\bar{z}_{ph}| < \min(|\bar{z}|, 1)$, the T_c series solution, although does not converge outside the convergence circle determined by the singular point $\bar{z}_{ph}$, is an asymptotic power series so long as $1/\lambda$ is less than $[0.63 + 3\mu^+(\frac{1}{\Lambda_1})] \frac{1}{\Lambda_1}$, where $\frac{1}{\Lambda_1} = \min(|\bar{z}|, 1)$; $\mu^+(x) = (1 - 2\mu^* x)\mu^*$.