

McMillan T_c 公式的解析推导 (II)

$\mu^* \neq 0$ 情形

吴杭生 顾一鸣 茅德强

(中国科学技术大学)

1980年12月15日收到

提 要

本文把文献[1]的理论以及所得到的 T_c 公式推广到 $\mu^* \neq 0$ 情形, 得到

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \cdot (\omega_{\log}/\omega_c)^{\mu^*/(\lambda-\mu^*)} \cdot \exp\left\{-\frac{1+\lambda}{\lambda-\mu^*}\right\}.$$

其中 $\gamma = C = 0.5772$ 是 Euler 常数.

一

在文献[1]中, 我们在 $\mu^* = 0$ 情形, 从 Eliashberg 方程解析地导出了如下的 McMillan T_c 公式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \cdot \exp\left(-\frac{1+\lambda}{\lambda}\right), \quad (1)$$

并分析了这个 T_c 公式的适用范围. 在(1)式中, $\ln \gamma = C = 0.5772$ 是 Euler 常数.

在这篇文章中, 我们企图把文献[1]的理论和 T_c 公式(1)推广到 $\mu^* \neq 0$ 情形.

二

线性 Eliashberg 方程为^[2]

$$G_n \bar{\Delta}_n = \sum_{m=0}^{j_c} (\lambda_{n-m} + \lambda_{n+m+1}) \bar{\Delta}_m - 2\mu^* \sum_{m=0}^{j_c} \bar{\Delta}_m \quad 0 \leq n \leq j_c, \quad (2)$$

其中

$$G_n = 2n + 1 + \lambda + 2 \sum_{l=1}^n \lambda_l; \quad (3)$$

$$\lambda_l = \lambda \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + l^2(2\pi T)^2}. \quad (4)$$

μ^* 是库仑赝势. 它的数值依赖截止频率 ω_c . 我们把 ω_c 取为 McMillan 反解程序 (inversion program)^[4] 所用的截止频率. 相应的 $\mu^*(\omega_c)$ 就是隧道实验定出的 μ^* 值. j_c 是由下式确定的整数:

$$\omega_c < (2j_c + 1)\pi T < \omega_c + 2\pi T. \quad (5)$$

采用文献 [1] 的方法, 把方程 (2) 改写为

$$\left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\pi T} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{(2n+1)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \right\} \bar{\Delta}_n \\ = \frac{\lambda}{\pi T} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2n+1} \bar{\Delta}(x) - \frac{2\mu^*}{2n+1} \bar{\Delta}(0), \quad (6)$$

其中

$$\bar{\Delta}(x) = \sum_{n=0}^{j_c} \bar{\Delta}_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]; \quad (7)$$

$$\bar{\Delta}(0) = \sum_{n=0}^{j_c} \bar{\Delta}_n. \quad (8)$$

$K(\xi)$ 是文献 [1] 引入的谱函数. 它的定义为

$$K(\xi) = \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \omega e^{-\xi\omega}. \quad (9)$$

把方程 (6) 两端乘以 $\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]$, 并对 n 从零到 j_c 求和, 得到

$$\bar{\Delta}(y) + \frac{\lambda}{2\pi T} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \Phi(x, y) \\ = \frac{\lambda}{\pi T} \sum_{n=0}^{j_c} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1} \int_0^\infty dx K\left(\frac{x}{2\pi T}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \bar{\Delta}(x) \\ - 2\mu^* \bar{\Delta}(0) \sum_{n=0}^{j_c} \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right]}{2n+1}. \quad (10)$$

这里

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \sum_{n=0}^{j_c} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right] \bar{\Delta}_n \\ = \frac{1}{4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \left\{ \int_0^{y+x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) - \int_0^{y-x} d\xi \bar{\Delta}(\xi) \right\}. \quad (11)$$

方程 (10) 就是线性 Eliashberg 方程 (2). 它只不过是后者的另一种表述形式.

文献 [1] 已着重指出, 尽管有效声子谱 $\alpha^2 F(\omega)$ 是一个复杂的函数, 可是它的 Laplace 变换 $K\left(\frac{x}{2\pi T}\right)$ 却是一个光滑的单调减函数, 并且它实际上仅在一个小区间 $0 \leq x \lesssim x_0$ 内不为零, 其中

$$x_0 = \alpha T. \quad (12)$$

α 是个大于 1 并随材料而异的常数。在温度足够低, 使得 $x_0 \lesssim \frac{\pi}{100}$ 时, 利用谱函数这个性质, 可把方程 (10) 加以简化, 并得到下面的定 T_c 方程:

$$1 + \lambda = \lambda \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) S\left(\frac{\omega}{T_c}\right) - 2\mu^* \sum_{n=0}^{j_c} \frac{1}{2n+1} - \epsilon, \quad (13)$$

其中

$$S(\eta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\eta^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + \eta^2}; \quad (14)$$

$$\epsilon = 2\lambda \sum_{n=j_c+1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{(2n+1)^2 \pi^2 T_c^2 + \omega^2}. \quad (15)$$

由方程 (10) 导出方程 (13) 的计算过程, 已在文献 [1] 详细解释了, 这里不再重复。

利用不等式^[3]

$$\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) \frac{\omega^2}{\omega^2 + a^2} \leq \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle + a^2}, \quad (16)$$

立刻得出

$$\epsilon < 2\lambda \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\pi^2 T_c^2} \sum_{n=j_c+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}. \quad (17)$$

把右边求和用积分替代, 并注意到 $\omega_c = (2j_c + 1)\pi T_c$, 得到

$$\epsilon < \frac{\lambda}{2} \frac{\langle \omega^2 \rangle}{\omega_c^2} \doteq 5 \times 10^{-3} \lambda. \quad (18)$$

可见, ϵ 很小, 可以略去。文献 [1] 已证明了, 当温度足够低, 使得 $x_0 < \frac{\pi}{100}$ 成立时,

$$\int_0^{\omega_{ph}} d\omega g(\omega) S\left(\frac{\omega}{T_c}\right) = \ln(2\gamma \omega_{log}/\pi T_c). \quad (19)$$

又

$$2 \sum_{n=0}^{j_c} \frac{1}{2n+1} = \ln(2\omega_c \gamma / \pi T_c). \quad (20)$$

把 (19) 和 (20) 式代入 (13) 式, 得到下面的 T_c 公式:

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{log} \exp \left\{ - \frac{1 + \lambda + \mu^* \ln(\omega_c / \omega_{log})}{\lambda - \mu^*} \right\}. \quad (21)$$

此公式可以改写成和 McMillan T_c 公式相仿的形式:

$$T_c = a \omega_0 \exp \left\{ - b \frac{1 + c\lambda}{\lambda - d(1 + q\lambda)\mu^*} \right\}, \quad (22)$$

但其中的参量应为

$$\omega_0 = \omega_{log} \cdot (\omega_{log} / \omega_c)^{\frac{\mu^*}{\lambda - \mu^*}}; \quad (23)$$

$$a = \frac{2\gamma}{\pi}, \quad b = c = d = 1, \quad q = 0. \quad (24)$$

在推导 T_c 公式(21)时,要求温度足够低,使得 $x_0 \lesssim \frac{\pi}{100}$ 成立. 利用(12)式,并令其中 T 等于 T_c , 由 $x_0 \lesssim \frac{\pi}{100}$ 得到

$$T_c \lesssim \frac{0.36}{\alpha} \quad (\text{K}). \quad (25)$$

这个不等式给出了 T_c 公式(21)的适用范围^[1].

参 考 文 献

- [1] 吴杭生、茅德强、顾一鸣, 物理学报, **30**(1981), 1141.
- [2] C. R. Leavens, Solid State Communication, **15**(1974), 1529.
- [3] P. B. Allen, R. C. Dynes, *Phys. Rev. B*, **12**(1975), 905.
- [4] W. Hubin, Technical Report, No. 182, Department of Physics, University of Illinois, (1970).

AN ANALYTIC DERIVATION FOR THE McMillan T_c FORMULA (II) CASE OF $\mu^* \neq 0$

WU HANG-SHENG GU YI-MING MAO DE-QIANG

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

In the present paper, the theory and the T_c formula which were presented in the previous paper of this series, are extended to the case of $\mu^* \neq 0$. The result obtained by the authors is as follows

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_{\log} \cdot \left(\frac{\omega_{\log}}{\omega_c} \right)^{\mu^*/(\lambda - \mu^*)} \cdot \exp \left\{ - \frac{1 + \lambda}{\lambda - \mu^*} \right\}.$$

$\ln \gamma = C = 0.5772$ is Euler constant.