

$L \otimes U(1)$ 群的引力规范场球对称静态解

张元仲 刘煜奋

(中国科学院理论物理研究所)

1980 年 12 月 10 日收到

提 要

寻找引力规范理论场方程的严格解要比寻找 Einstein 场方程的严格解更为困难。但是，对某些物理问题来说，能够求得牛顿型近似解和后牛顿型的近似解就足够了。本文研究了一种 Lorentz 群和 $U(1)$ 群为规范群的引力规范理论，求得了带电粒子的球对称静场的特殊有挠解，并求得了有挠的一阶近似解。

一、场方程和严格解

选取如下的作用量和 Lagrangian,

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x, \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = \chi R - \frac{\eta}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu},$$

其中, $\chi = (16\pi\kappa)^{-1}$, κ 是引力常数; η 是待定耦合常数, R 是 Riemann 标量曲率; $f_{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}^a$ 分别是 $U(1)$ 规范场强和 Lorentz 规范场强。

相应于 (1) 式的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{\eta}{2\chi} t_{\mu\nu} - \frac{1}{2\chi} T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$F_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}{}_{;\sigma} + F_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho} Y_{\sigma\lambda}^\sigma - F_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} Y_{\sigma\lambda}^\rho = 0, \quad (3)$$

$$f_{|\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

其中“|”是对 $\{e_\nu^\mu\}$ 的协变导数,“;”是对联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 的协变导数,

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu \text{ 是电磁势,}$$

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda,$$

$$F_{\beta\mu\nu}^a = \Gamma_{\beta\mu\nu}^a - \Gamma_{\beta\nu\mu}^a + \Gamma_{\sigma\nu}^a \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\mu}^a \Gamma_{\beta\nu}^\sigma,$$

$$Y_{\mu\nu}^\rho = T_{\mu\nu}^\rho + T_{\nu\mu}^\rho + T_{\nu\mu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \{\mu\nu\}^\rho,$$

$$T_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho).$$

这里 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 是(有挠的)联络, $T_{\mu\nu}^\rho$ 称为挠率张量, $Y_{\mu\nu}^\rho$ 称为组合挠率张量,

$$t_{\mu\nu} = F_{\beta\mu\sigma}^a F_{\alpha\nu}^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\beta\rho\sigma}^a F_a^{\beta\rho\sigma},$$

$$T_{\mu\nu} = f_{\mu\sigma} f_{\nu}^{\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\sigma\rho} f^{\sigma\rho}.$$

另外,三个 Bianchi 恒等式为

$$\varepsilon^{\rho\mu\nu\lambda} f_{\mu\nu,\lambda} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{\gamma\mu\nu\lambda} (F_{\beta\mu;\lambda}^{\alpha} - 2T_{\mu\nu}^{\rho} F_{\beta\rho\lambda}^{\alpha}) = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon^{\gamma\mu\nu\lambda} (2T_{\mu\nu;\lambda}^{\alpha} - F_{\mu\nu\lambda}^{\alpha} - 4T_{\mu\nu}^{\rho} T_{\rho\lambda}^{\alpha}) = 0. \quad (7)$$

其中 $\varepsilon^{\rho\mu\nu\lambda}$ 是四阶全反对称张量.

考虑球对称静态情况,线元为

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (8)$$

挠率张量 $T_{\mu\nu}^{\rho}$ 的非零独立分量为

$$T_{01}^0 = R_1(r), \quad T_{21}^2 = T_{31}^3 = R_2(r). \quad (9)$$

Riemann 曲率张量 $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ 和有挠的曲率张量 $F_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ 的非零独立分量如下:

$$\begin{aligned} A &\equiv F_{01}^{01} = e^{-\lambda} \left[\left(2R_1 - \frac{\nu'}{2} \right)' + \frac{1}{2} (\nu' - \lambda') \left(2R_1 - \frac{\nu'}{2} \right) \right], \\ B &\equiv F_{02}^{02} = F_{03}^{03} = -\frac{1}{r} (2rR_2 - 1) \left(2R_1 - \frac{\nu'}{2} \right) e^{-\lambda}, \\ C &\equiv F_{12}^{12} = F_{13}^{13} = \frac{1}{r} \left[(2rR_2)' - \frac{1}{2} \lambda' (2rR_2 - 1) \right] e^{-\lambda}, \\ D &\equiv F_{23}^{23} = \frac{1}{r^2} [1 - (2rR_2 - 1)^2 e^{-\lambda}], \\ E &\equiv R_{01}^{01} = -e^{-\lambda} \left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{4} (\nu' - \lambda') \right], \\ F &\equiv R_{02}^{02} = R_{03}^{03} = -\frac{1}{r} \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda}, \\ G &\equiv R_{12}^{12} = R_{13}^{13} = \frac{1}{r} \frac{\lambda'}{2} e^{-\lambda}, \\ H &\equiv R_{23}^{23} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned} \quad (10)$$

$$H \equiv R_{23}^{23} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-\lambda}). \quad (11)$$

这里“,”表示对 r 的导数. 由方程 (4) 和 (5) 可以求得电磁场的能量-动量张量^[4],

$$T_{\mu}^{\nu} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{Q^2}{2r^4}, \quad (12)$$

其中 Q 是带电粒子的电荷. 利用 (10) 和 (11) 式的记号,注意到 (12) 式,方程 (2)–(7) 共包含七个独立的方程:

$$E + 2F + \frac{\eta}{2\chi} (A^2 + 2B^2 - 2C^2 - D^2) = -\frac{1}{2\chi} \omega, \quad (13)$$

$$E + 2G + \frac{\eta}{2\chi} (A^2 - 2B^2 + 2C^2 - D^2) = -\frac{1}{2\chi} \omega, \quad (14)$$

$$F + G + H + \frac{\eta}{2\chi} (D^2 - A^2) = \frac{1}{2\chi} \omega, \quad (15)$$

$$A' + \frac{2}{r}A + 2B\left(2R_2 - \frac{1}{r}\right) = 0, \quad (16)$$

$$C' + C\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) + B\left(2R_1 - \frac{\nu'}{2}\right) + D\left(2R_2 - \frac{1}{r}\right) = 0, \quad (17)$$

$$D' + \frac{2}{r}D + 2C\left(2R_2 - \frac{1}{r}\right) = 0, \quad (18)$$

$$B' + B\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) + A\left(2R_2 - \frac{1}{r}\right) + C\left(2R_1 - \frac{\nu'}{2}\right) = 0. \quad (19)$$

现在我们寻找方程(13)—(19)的某些特殊的严格解.

可以证明, 如下的关系式能够满足场方程(13)—(19):

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon}{r^2},$$

$$A = D, B = C \text{ 或 } A = -D, B = -C, \quad (20)$$

其中 m 为积分常数, $\epsilon = -4\pi\kappa Q^2$, κ 是引力常数. 根据物理上的要求, $m = \kappa M$, M 是带电粒子的质量. 现在求方程(20)的某些特殊解, 这种解必须满足物理条件: 当 $M = Q = 0$ 时, $R_1 = R_2 = 0$. 方程(20)的一个明显解是 $B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$. 将这个解代入方程(10)可求出 R_1 和 R_2 , 但是这个解不满足上述物理条件. 方程(20)的另一个明显解是 $A = B = C = D = 0$. 将这个条件代入(10)式, 可以得到满足物理条件的挠率解,

$$R_1 = \frac{1}{4}\nu', R_2 = \frac{1}{2r}(1 - e^{-\frac{\nu}{2}}), \quad (21)$$

其中 ν' 和 $e^{-\frac{\nu}{2}}$ 可由(20)式得到. 除这个解外, 其他情况 ($A \neq 0, B \neq 0$ 的情况)可由(20)和(10)式化为如下非线性方程:

$$y'' \mp 2e^{-\nu}yy' + \frac{2}{r}(1 \mp e^{-\nu})y' = 0, \quad (22)$$

其中

$$y = -\frac{1}{r} - e^\nu\left(2R_1 - \frac{\nu'}{2}\right). \quad (23)$$

文献[2]用多项式的形式求解了方程(23).

二、近 似 解

现在我们利用文献[3]的方法求方程(13)—(19)的近似解, 然后与严格解(21)式进行比较. 由物理条件知道, 当 $M = Q = 0$ (即 $m = \epsilon = 0$) 时, $R_1 = R_2 = 0, e^\nu = e^\lambda = 1$. 因此, 到 m 和 ϵ 的一阶近似, $R_1 = o(m, \epsilon), R_2 = o(m, \epsilon), e^\nu = 1 + o(m, \epsilon), e^\lambda = 1 + o(m, \epsilon)$. 所以, 方程(13)—(17)变成

$$E + 2F = -\frac{1}{2\chi}\omega, \quad (24)$$

$$E + 2G = -\frac{1}{2\chi}\omega, \quad (25)$$

$$F + G + H = \frac{1}{2\chi} \omega, \quad (26)$$

$$A' + \frac{2}{r} A - \frac{2}{r} B = 0, \quad (27)$$

$$C' + \frac{1}{r} C - \frac{1}{r} D = 0, \quad (28)$$

其中诸量由(10)和(11)式给出的一阶近似形式为

$$A = 2R_1' - \frac{v''}{2}, B = \frac{1}{r} \left(2R_1 - \frac{v'}{2} \right),$$

$$C = \frac{1}{r} (2rR_2)' + \frac{1}{2r} \lambda', D = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-\lambda}) + \frac{4}{r} R_2, \quad (29)$$

$$E = -\frac{v''}{2}, F = -\frac{1}{2r} v',$$

$$G = \frac{1}{2r} \lambda', H = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-\lambda}). \quad (30)$$

显然, 方程(24)–(26)与广义相对论中的场方程相同, 所以它们的解与广义相对论中的解(到 m 的一阶近似)相同, 即

$$e^v = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon}{r^2}, \quad (31)$$

$$e^\lambda = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}. \quad (32)$$

此外, 从方程(27), (28)和(29)容易解出满足物理条件的挠率解:

$$R_1 = \frac{a}{r^2} + \frac{\epsilon}{2r^3}, \quad (33)$$

$$R_2 = \frac{b}{r^2} - \frac{\epsilon}{4r^3}, \quad (34)$$

其中 a 和 b 是积分常数. 方程(31)–(34)就是场方程给出的带电粒子的引力场的一阶近似解. 严格解的一阶近似形式必定与(31)–(34)式吻合. 事实上, 严格解(20)和(21)式在一阶近似下就相应于近似解(33)和(34)式中的常数 $a = m/4$, $b = -m/4$ 的情况. 由文献[4]知道, 当 $Q \neq 0$ 时, 场方程不存在无挠球对称静态解. 近似解(33)和(34)式与这一结论是一致的.

感谢何祚庥和郭汉英的有益讨论.

参 考 文 献

- [1] R. Adler, *et al.*, Introduction to General Relativity, McGraw-Hill Book Comp., New York, Second ed., (1975), p. 489.
- [2] Y. F. Liu and C. L. Tsou, *ACTA Phys. Polonica*, **B10**(1979), 893.
- [3] 张元仲, 科学通报, 待发表.
- [4] 钟在哲, 科学通报, **26**(1981), 76; 张元仲, 科学通报, 待发表.

THE SPHERICALLY SYMMETRIC AND STATIC SOLUTIONS IN THE $L \otimes U(1)$ GAUGE THEORY OF GRAVITATION

ZHANG YUAN-ZHONG LIU YU-FEN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is more difficult to find an exact solution of the field equations in the gauge theory of gravitation as compared with finding that in Einstein's theory. As far as some problems in physics are concerned, however, it is sufficient to obtain a Newtonian approximate solution and a post-Newtonian approximate solution. In this note the $L \otimes U(1)$ gauge theory of gravitation is discussed. A special exact solution and the approximation to first order to the spherically symmetric and static field of a charged mass point are obtained.

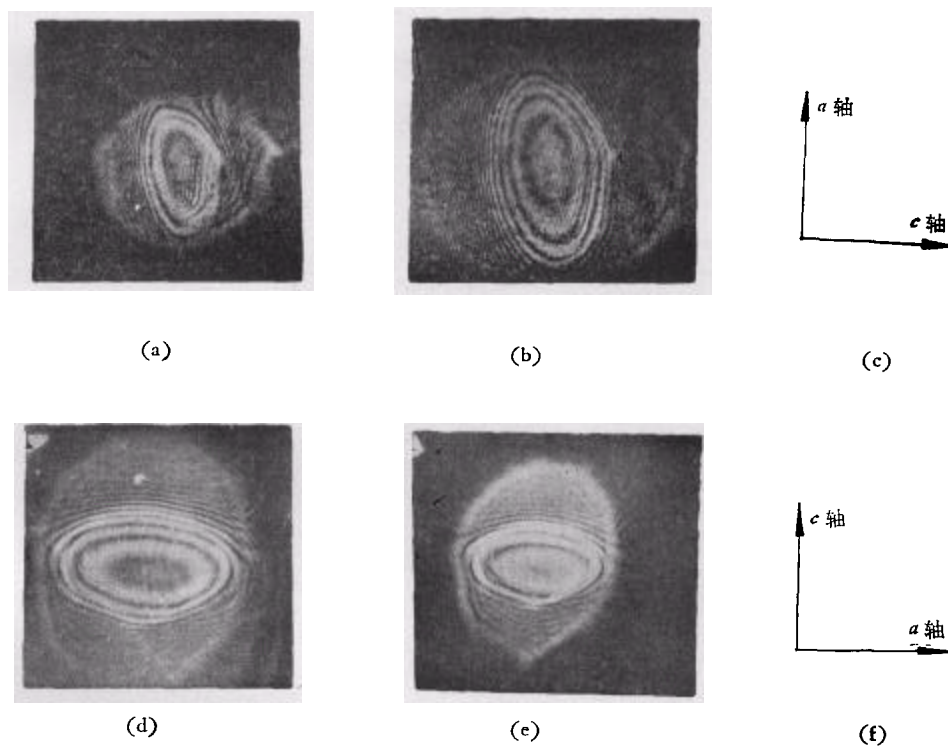


图3 b 轴 Nd:YAP 棒的等色线图 实验时 $\phi 5.2 \times 104$ 毫米的 b 轴 Nd:YAP 棒放在双椭圆镀金聚光腔内。图 (a), (d) 输入灯的电功率为 5100 瓦;图 (b) (e) 输入 5918 瓦。图 (a), (b) 晶体 c 轴平行于灯平面;图 (d) (e) 晶体 a 轴平行于灯平面。入射 He-Ne 激光偏振方向与灯平面成 45° 。图 (c), (f) 给出晶轴取向。图中间亮暗相间的椭圆是等色线图, 外面的大椭圆是平行 c 轴方向的人射偏振光经晶体聚焦后, 在焦外纸屏上的光强分布

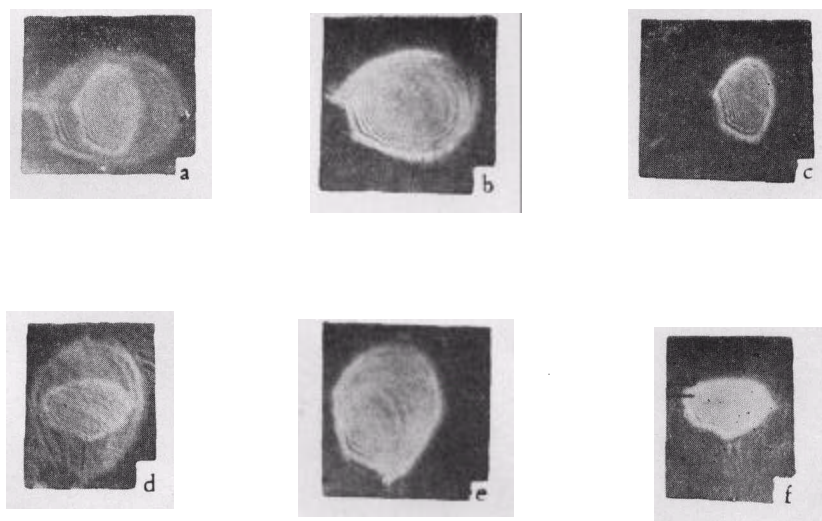
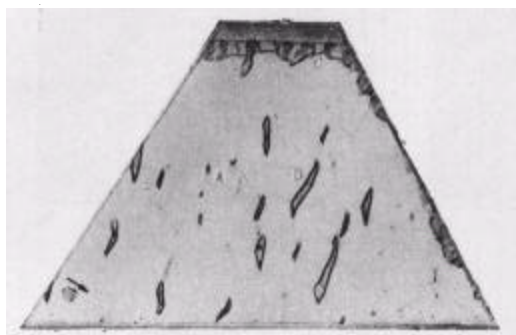
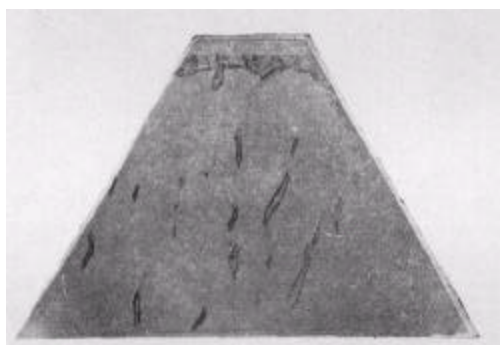


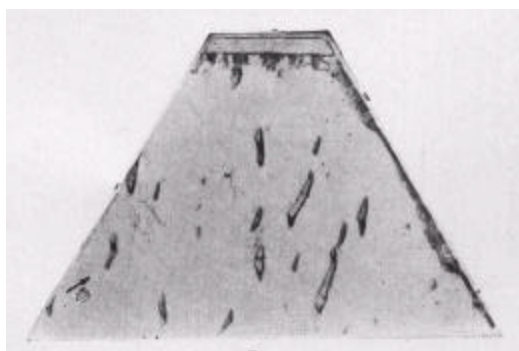
图4 准直的 He-Ne 激光通过光泵的 b 轴 Nd:YAP 棒后, 在距离棒端面 98 厘米处得到的照片 图 (a), (b), (c) 是晶体 c 轴平行于灯平面时, He-Ne 光不起偏、沿 c 轴方向起偏和沿 a 轴方向起偏三种情况下得到的结果;图 (d), (e), (f) 是晶体 a 轴平行于灯平面时, 上述三种情况下得到的结果。Nd:YAP 晶体尺寸为 $\phi 5.2 \times 104$ 毫米, 输入灯的功率为 5120 瓦



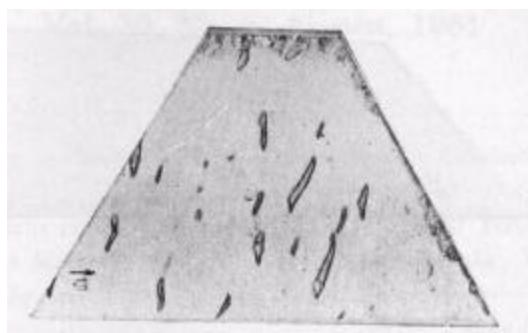
(a) $[1\bar{1}00]$ 衍射



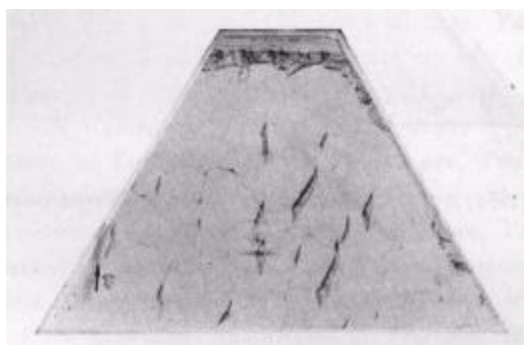
(b) $[\bar{T}2\bar{T}0]$ 衍射



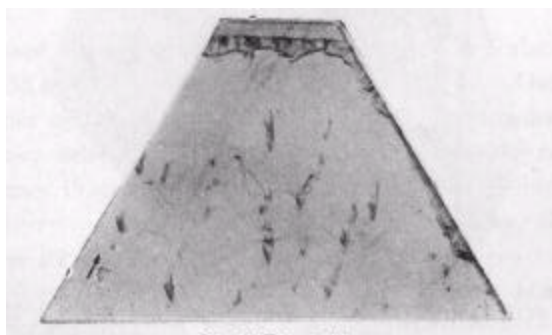
(c) $[10\bar{1}0]$ 衍射



(d) $[2\bar{1}\bar{1}0]$ 衍射



(e) $[01\bar{1}0]$ 衍射

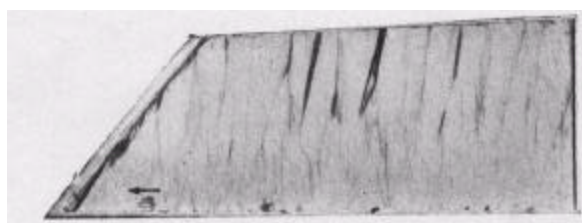


(f) $[1120]$ 衍射

图 2 (0001) 片形貌图 $\text{MoK}\alpha_1$ 辐射; 样品厚度 $750\mu\text{m}$; $\mu t = 0.74$, $\times 1.25$ (下同)



(a) $[0003]$ 衍射



(b) $[\bar{1}2\bar{1}0]$ 衍射

图3 $m(10\bar{1}0)$ 片形貌图 $\text{MoK}\alpha_1$ 辐射；样品厚度 $670\text{ }\mu\text{m}$ ； $\mu t = 0.65$

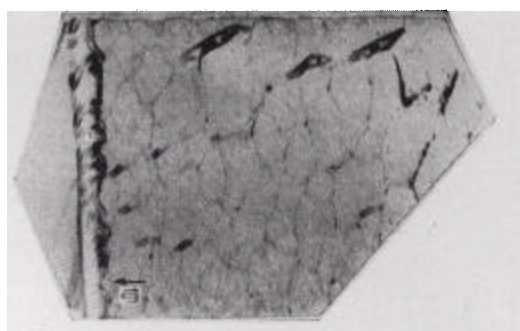


图4 $R(10\bar{1}1)$ 片形貌图 $[\bar{1}2\bar{1}0]$ 衍射； $\text{MoK}\alpha_1$ 辐射样品厚度 $750\text{ }\mu\text{m}$