

快加热环流器等离子体的位形演变

石 秉 仁

(中国西南物理研究所)

1980年9月16日收到

提 要

本文讨论了环流器等离子体在快加热过程中位形演变的近似描述问题。对两类重要的通量守恒演变系列,即绝热压缩和非压缩快加热,具体计算了平衡解。假定等离子体截面形状有任意的小变形,但初态位形只有一个椭圆磁轴,所用近似方法基于对反环径比展开。结果表明,这一方法可以成功地描述绝热压缩演变系列;对非压缩快加热,在磁轴位移不很大时,所得结果与严格的二维通量守恒解是相符的。

一、引 言

近年来在一些国际上著名的装置上对环流器等离子体成功地进行了二级加热。通过所谓通量守恒环流器理论研究^[1],发现环流器等离子体在快加热过程中的演变呈现出对未来环流器型反应堆十分有利的特性,因而引起了普遍的兴趣。本文讨论这种演变系列的近似描述方法,着重讨论两类加热模式,即绝热压缩和非压缩快加热(强流中性束注入、波加热等)。绝热压缩本身又有两种不同模式。大半径方向的压缩称 ATC 模式;小半径方向的压缩称 Tuman 模式。假定下述时标关系成立:

$$\tau_A \ll \tau_h \lesssim \tau_E \ll \tau_m,$$

其中 τ_A 为阿尔芬时间, τ_h 为加热时间, τ_E 为能量约束时间, $\tau_m = 4\pi L^2/\eta c^2$ 为磁扩散时间。这一时标关系使问题容易处理一些,但解析分析还很难做。本文试图用将等离子体参数对反环径比 $\epsilon = a/R_0$ 展开的方法^[2]来对等离子体的位形演变作一些解析分析。等离子体的截面形状任意,但与平均圆的偏离是小量。我们限于考察只有单个椭圆磁轴的情形,其电流分布一般是不均匀的。显然这类情况是值得研究的,它反映了当前环流器研究的主流方向。

二、一般理论及基本方程

在外部加热源作用下或者在受到绝热压缩时,环流器等离子体将从初态演变到另一平衡态,这种演变的流动速度要比阿尔芬速度 $V_A = (B^2/nM)^{1/2}$ 小得多。因此,任一时刻的等离子体位形将仍然由静磁流体方程组描述

$$\nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

对于轴对称系统, 可以引进极向通量 $\phi(R, z, t)$ 及电流通量函数 $I(\phi)$ 来描述磁场 $\mathbf{B}(R, z, t)$,

$$\mathbf{B} = \nabla\phi \times \nabla\theta + I(\phi)\nabla\theta, \quad (4)$$

ϕ 满足 Grad-Shafranov 方程^[2]

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{R^2} \right) = -\frac{4\pi}{c} R j_\theta, \quad (5)$$

$$= -4\pi R^2 \frac{dP}{d\phi} - I \frac{dI}{d\phi}. \quad (6)$$

现在的问题是要在初始条件 $\phi(R, z, 0)$, $P(t=0)$, $I(t=0)$ 给定, 并在 $P(\phi)$ 及 $I(\phi)$ 不断变化的情况下, 确定任一时刻的 ϕ . 因为我们假定加热很快, 因而可将磁扩散略去, 导致极向通量和环向通量保持守恒. 这又导致安全因子 $q(\phi)$ 守恒^[1].

$$q(\phi) = \frac{I(\phi)}{2\pi} V'(\phi) \langle R^{-2} \rangle = q(t=0), \quad (7)$$

式中 $\langle A \rangle$ 为

$$\langle A \rangle = \oint \frac{A dl}{B_p} / \oint \frac{dl}{B_p}, \quad (8)$$

且

$$V'(\phi) = \oint \frac{dl}{B_p}, \quad B_p = \frac{1}{R} |\nabla\phi|. \quad (9)$$

方程 (7) 构成了对方程 (6) 的限制^[1].

加热方程为^[3]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{3}{2} V'^{5/3}(\phi) P(\phi) \right] = V'^{5/3}(\phi) \langle Q \rangle, \quad (10)$$

Q 表示外加热源.

此外, 在磁轴上及在等离子体表面上的通量守恒条件为

$$\phi_{\max}(t) = \phi_{\max}(0), \quad \phi_b(t) = \phi_b(0). \quad (11)$$

若等离子体边界固定, (4)–(11) 式构成对问题的完整描述. 但实际情况常常要解给定外成形场条件下的自由边界问题. 本文则假定边界不严格固定, 但始终保持与某种限制器相切(在非压缩加热情况下). 详细讨论见后.

一般求解步骤为: 当压强 P 由加热方程 (10) 确定后, 电流通量 $I(\phi)$ 将由方程 (6) 的积分形式

$$\frac{1}{V'(\phi) \langle R^{-2} \rangle} \frac{d}{d\phi} \left(V'(\phi) \left\langle \frac{|\nabla\phi|^2}{R^2} \right\rangle \right) = -4\pi \frac{P'(\phi)}{\langle R^{-2} \rangle} - II'(\phi) \quad (12)$$

在约束条件 (7) 和 (11) 式下确定^[1]. 方程 (12) 属于“广义微分方程”, 其中一些量, 如 $V'(\phi) \langle R^{-2} \rangle$, $V'(\phi) \left\langle \frac{|\nabla\phi|^2}{R^2} \right\rangle$ 等, 只有在 ϕ 已知时才能定出^[1,4]. 事实上, 只能通过叠代方法求解. 本文试图用近似方法对问题进行解析处理.

三、近似方法

应用文献[2]中讨论的方法,可以把各种表面量如 $q(\psi)$, $V'(\psi)$, $\langle B_p^2 \rangle$ 等在二级精度上表示出来,其中极向通量 ψ 也达到二级精度,但磁面的位移和变形系数达到一级精度就可以了. 这种方法对电流分布没有任何限制,因而特别适宜于用来讨论平衡位形的演变.

引进原点在磁轴上的局部坐标系(图1)

$$\begin{aligned} R &= R_0 + r \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

假定磁面截面形状为

$$r = \rho + \sum_{n=1} a_n(\rho) \cos n\varphi, \quad (13)$$

其中 ρ 为所考虑磁面的平均半径. 作为基本假定,设 $|r - \rho|/\rho < 1$,

而且

$$a_n/\rho = O(\epsilon),$$

并设曲面随 φ 没有激烈起伏. 这时可将等离子体参数对反环径比 ϵ 展开,得到一组关于 ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 和 $a_{n,0}$, $a_{n,1}$ 的常微分方程系列. 它们与原先的二阶非线性偏微分方程(6)是等价的^[2]. 为了应用这些结果来研究位形演变问题,我们把文献[2]中对问题的提法做一些改变. 假定 $q(\psi)$ 已知(由初始分布求出),然后应用下述磁面量的近似公式:

$$V'(\psi) = \frac{4\pi^2 R_0 \rho}{|\psi'(\rho)|} \left\{ 1 + \frac{1}{2R_0} (2a_{1,0} + \rho a'_{1,0}) + \sum_{n=1} \left[\frac{a_{n,0} a'_{n,0}}{2\rho} - \frac{n^2 a_{n,0}^2}{4\rho^2} \right] + \dots \right\}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} q(\psi) &= \frac{I(\psi) \rho}{R_0 |\psi'(\rho)|} \left\{ 1 - \frac{1}{2R_0} \left(2a_{1,0} + \rho a'_{1,0} - \frac{\rho^2}{R_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1} \left[-\frac{a_{n,0} a'_{n,0}}{2\rho} - \frac{n^2 a_{n,0}^2}{4\rho^2} \right] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V'(\psi) \left\langle \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2} \right\rangle &= V'(\psi) \langle B_p^2 \rangle = 2\pi |\psi'(\rho)| \frac{\rho}{R_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2R_0} \left(-a_{1,0} + \rho a'_{1,0} + \frac{\rho^2}{R_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1} \left[-\frac{a_{n,0} a'_{n,0}}{2\rho} + \frac{a_{n,0}^2}{2} + \frac{n^2 a_{n,0}^2}{4\rho^2} \right] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\psi = \psi_0 + \psi_2. \quad (17)$$

因一级近似给出 $\psi_1 = 0$. ψ_0 满足

$$\frac{1}{\rho} (\rho \psi_0')' = -\frac{4\pi}{c} R_0 (j_1 + j_2), \quad (18)$$

其中

$$j_1(\rho) = c R_0 \frac{dP}{d\psi}, \quad (19)$$

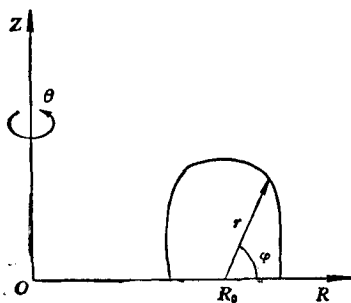


图1 坐标系

$$j_2(\rho) = \frac{c}{8\pi R_0} \frac{dI^2}{d\psi}. \quad (20)$$

由(15)式可知,对给定的 $q(\psi)$, 在最低一级近似下

$$\int_{\psi_m}^{\psi} q(\psi) d\psi = -\frac{B_0}{2} \rho^2. \quad (21)$$

这里 $\psi_m = \psi_{\max}$ 为椭圆磁轴处的 ψ 值. 由(21)式可以确定 ψ_0 , 将其代入(18)式, $(j_1 + j_2)$ 的形式就确定了. 在加热过程中, $P(\psi)$ 及 j_1 不断地变化. 保持 $(j_1 + j_2)$ 不变, 就可以定出相应的 j_2 的形式, 然后由(20)式定出电流通量函数 $I(\psi)$. 最后, 再利用描述 $a_{n,0}$ 的方程定出 $a_{n,0}$

$$a_{1,0}'' + \left(\frac{2\psi_0''}{\psi_0'} + \frac{1}{\rho} \right) a_{1,0}' = -\frac{1}{R_0} + 8\pi R_0 \rho \frac{dP}{d\psi} / \psi_0', \quad (22)$$

$$a_{n,0}'' + \left(\frac{2\psi_0''}{\psi_0'} + \frac{1}{\rho} \right) a_{n,0}' - \frac{n^2 - 1}{\rho^2} a_{n,0} = 0 \quad (n \geq 2). \quad (23)$$

加上相应的边界条件: $a_{n,0}(0) = 0$, $(n \geq 1)$, $a_{1,0}'(0) = 0$ 及 $a_{n,0}(a) = \varepsilon_n$ ($n \geq 2$), 就可以在最低一级近似下定出 $a_{n,0}$.

将 $V'(\psi)\langle B_p^2 \rangle$ 的方程(16)代入方程(12), 可得关于 ψ_2 的方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\rho\psi_2')' = & -\frac{1}{\rho} (\rho A_1(\rho)\psi_0')' - \frac{4\pi}{c} R_0 \left\{ \frac{\rho}{2R_0} \left(\frac{2a_{1,0}}{\rho} + a_{1,0}' \right) j_1(\rho) \right. \\ & \left. + \sum_{n=1} \left[\frac{a_{n,0}a_{n,0}'}{2\rho} - \frac{n^2 a_{n,0}^2}{4\rho^2} \right] (j_1 + j_2) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

上式中 $A_1(\rho)$ 代表方程(16)中花括号中那一部分量. 同时, $I(\psi)$ 的显示式可以直接写出来,

$$\begin{aligned} I(\psi) & \cong \left[I_0^2 + \frac{8\pi R_0}{c} \int_0^{\rho} j_2(\rho') \psi_0'(\rho') d\rho' \right]^{1/2} \\ & \cong I_0 \left[1 + \frac{\beta(0)}{2} \left(1 - \frac{P(\rho)}{P_0} \right) - \frac{1}{2I_0^2} \left(\psi_0'^2 + 2 \int_0^{\rho} \frac{\psi_0'^2}{\rho'} d\rho' \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\beta(0) = 8\pi P_0 / B_0^2, \quad (26)$$

P_0 是磁轴处的压强值.

至此尚未涉及 $P(\psi)$ 的确定问题. 它与具体的加热方法有关. 对于绝热压缩, $Q = 0$, 故得

$$[P(\psi)V'(\psi)^{5/3}]_t = [P(\psi)V'(\psi)^{5/3}]_{t=0}. \quad (27)$$

再与粒子守恒律结合起来^[3]

$$\frac{d}{dt} [V'(\psi)n(\psi)] = 0, \quad (28)$$

则得

$$[P(\psi)n(\psi)^{-5/3}]_t = [P(\psi)n(\psi)^{-5/3}]_{t=0}. \quad (29)$$

对于非压缩快加热, $P(\psi)$ 的变化与外能源有关. 本文将采用预先指定 $P(\psi)$ 的方法而不讨论加热的细节. 这时问题化为在同样的 $q(\psi)$ 下对不同的 $P(\psi)$ (包括大小及分布) 来确定平衡系列.

四、绝 热 压 缩

绝热压缩的有效性早为实验所证实. Greene 等人曾对圆截面均匀电流分布的环流器等离子体的绝热压缩做过巧妙的理论分析^[5]. 本文利用前面讨论的方法来分析非圆截面及任意电流分布情形. 作为例子, 设 $q(\phi)$ 有如下形状:

$$q(\phi) = q(0)[3 - 2\phi/\phi_m]. \quad (30)$$

利用边界上 $\phi_b = 0$, 在最低一级近似下得

$$\phi_0(\rho) = \frac{\phi_m}{2} [3 - (1 + 8x^2)^{1/2}], \quad (31)$$

其中

$$x = \rho/a, \quad \phi_m = B_0 a^2 / 4q(0),$$

B_0 是磁轴处的环向场强. 相应的电流分布

$$j_1 + j_2 = j_0(1 + 4x^2)/(1 + 8x^2)^{3/2}, \quad (32)$$

其中

$$j_0 = B_0 c / 2\pi R_0 q(0).$$

设初始压强分布为

$$P(\rho) = \frac{P_0}{2} (3 - \sqrt{1 + 8x^2}), \quad (33)$$

于是得

$$I(\rho) = I_0 \left\{ 1 + \frac{\beta(0)}{2} (\sqrt{1 + 8x^2} - 1) - \frac{a^2}{16R_0^2 q^2(0)} \left[\ln(1 + 8x^2) + \frac{8x^2}{1 + 8x^2} \right] \right\}. \quad (34)$$

如果 $q(\phi)$ 和 $P(\rho)$ 有更复杂的形式, 则需要做一些简单的数值计算.

现假定压缩的定标关系为

$$I(t)/I(0) = \sigma, \quad R_0(t)/R_0(0) = \xi. \quad (35)$$

再利用 (27) 式, 在最低一级近似下得^[5]

$$P_0(t)/P_0(0) = \xi^{10/3} \sigma^{5/3} \equiv \delta. \quad (36)$$

等离子体的小半径按

$$B_0(t)a^2(t) = B_0(0)a^2(0) \quad (37)$$

变化. 显然, 等离子体位形的演变不仅与这些定标关系有关, 而且与外场有关. 这里我们限于讨论边界上变形系数给定的情形, 相应的外维持场可以用‘虚壳原理’求出^[6]. 在物理上, 外维持场是由垂直场及各种多极场组成的. 其中垂直场确定了磁轴的位移, 多极场则确定磁面的变形. 我们知道, 对圆截面等离子体, 外维持场主要是垂直场, 即^[7]

$$\mathbf{B}_{\perp 0} = \mathbf{e}_z \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_0}{\partial R} = \mathbf{e}_z \frac{J_p}{c R_0} \left(\ln \frac{8R_0}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right), \quad (38)$$

J_p 为总的欧姆电流, 而

$$\Lambda = \frac{8\pi\langle\rho\rangle}{\beta_p^2(a)} + \frac{l_i}{2} - 1, \quad (39)$$

$$l_i = \iint B_p^2 \rho d\rho d\varphi / \pi a^2 B_p^2(a). \quad (40)$$

另一方面, 根据虚壳原理, 在等离子体存在的区域中, 有

$$\phi_c(R, z, t) = \frac{c}{4\pi} \oint G(R, z; R', z') \frac{1}{R'} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n'} \right] dl', \quad (41)$$

积分沿等离子体边界进行, 式中 G 为函数,

$$G(R, z; R', z') = \frac{4}{c} \left(\frac{RR'}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right],$$

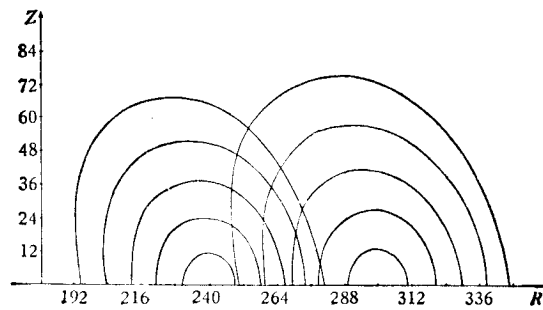
K 和 E 分别为第一、二类完全椭圆积分, 其宗量 k 满足

$$k^2 = 4RR' / [(R + R')^2 + (z - z')^2].$$

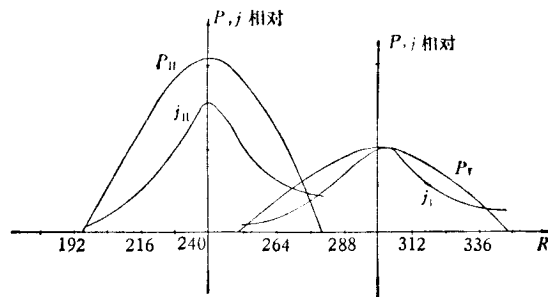
将方程 (13) 代入 (41) 式, 由 $dl' = r'd\varphi'$, $\partial\phi/\partial n' = \phi'(\rho')|\nabla\rho'|$ 及

$$\begin{aligned} |\nabla\rho'| \left[\rho' + \sum_{n=1} a_n(\rho') \cos n\varphi' \right] &\cong \rho' + (a_1 - \rho' a'_1(\rho')) \cos \varphi' \\ &+ \sum_{n=2} (a_n - \rho' a'_n(\rho')) \cos n\varphi' + o(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (42)$$

立即可以看到, 前面两项恰好表示圆截面等离子体的贡献, 其半径与非圆截面等离子体的平均半径相等. 所以为进行绝热压缩所需的垂直场仍由 (38) 式表示, 只是其中的半径应理解为平均半径. 至于多极场, 其情况较复杂, 需进行一些数值分析.



(a) 磁面



(b) 中平面上压强及电流分布

图2 非圆截面环流器在绝热压缩过程中的演变 初始参数为 $R_0 = 300$ 厘米, $\epsilon_2 = -0.2$, $\epsilon_3 = 0.1$, $\beta_p = 0.375$, 压缩参数: $\xi = 1.25$, $\sigma = 1$

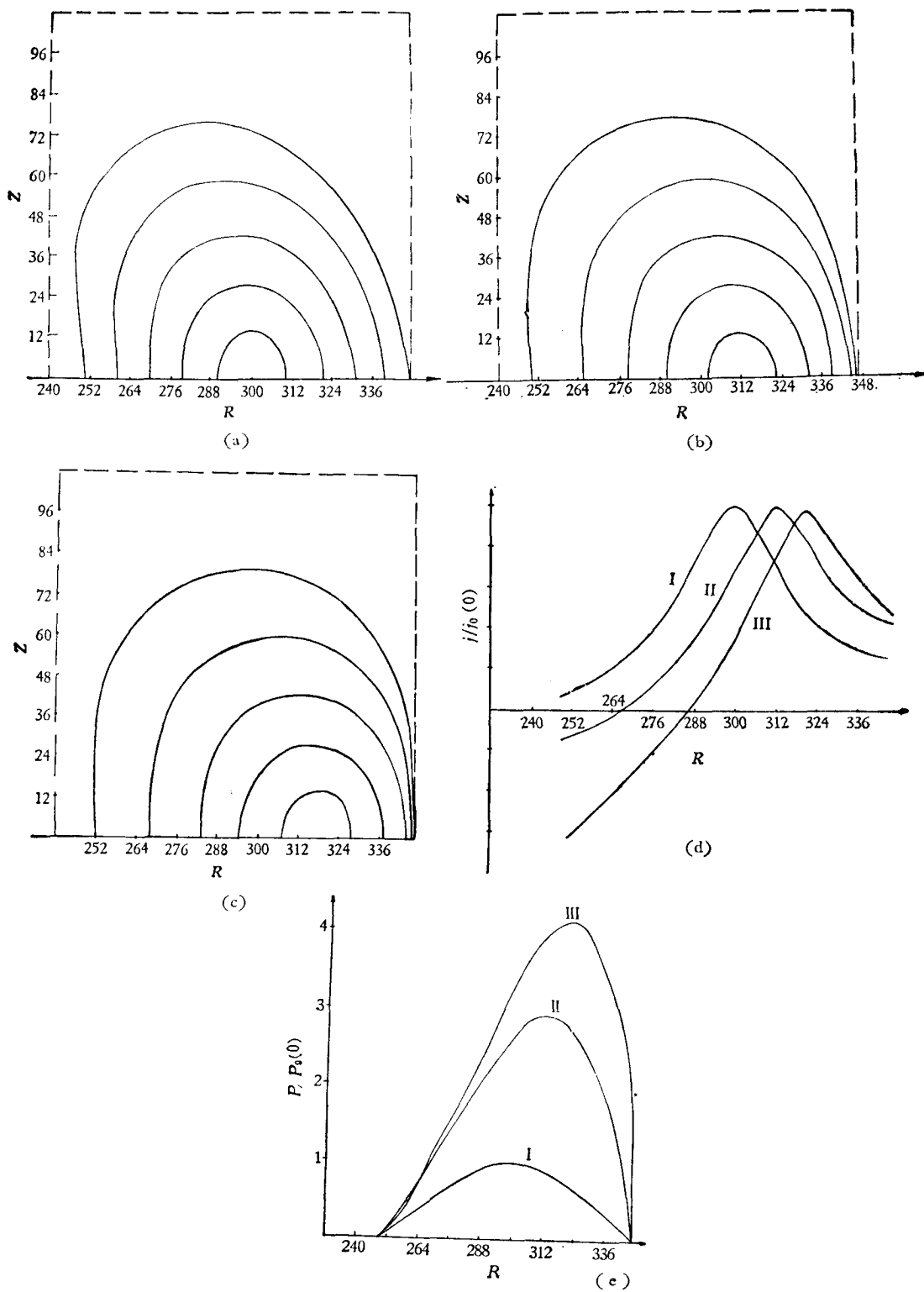


图3 非压缩快加热过程中位形演变 ($\alpha = 1$ 情形) (a)–(c) 为磁面位形, 分别对应于 $\beta_p = 0.375, 1.2, 1.78$, 相应的 $j_z, P(\psi)$ 在 $z = 0$ 平面上的分布示于 (d) 和 (e) 中

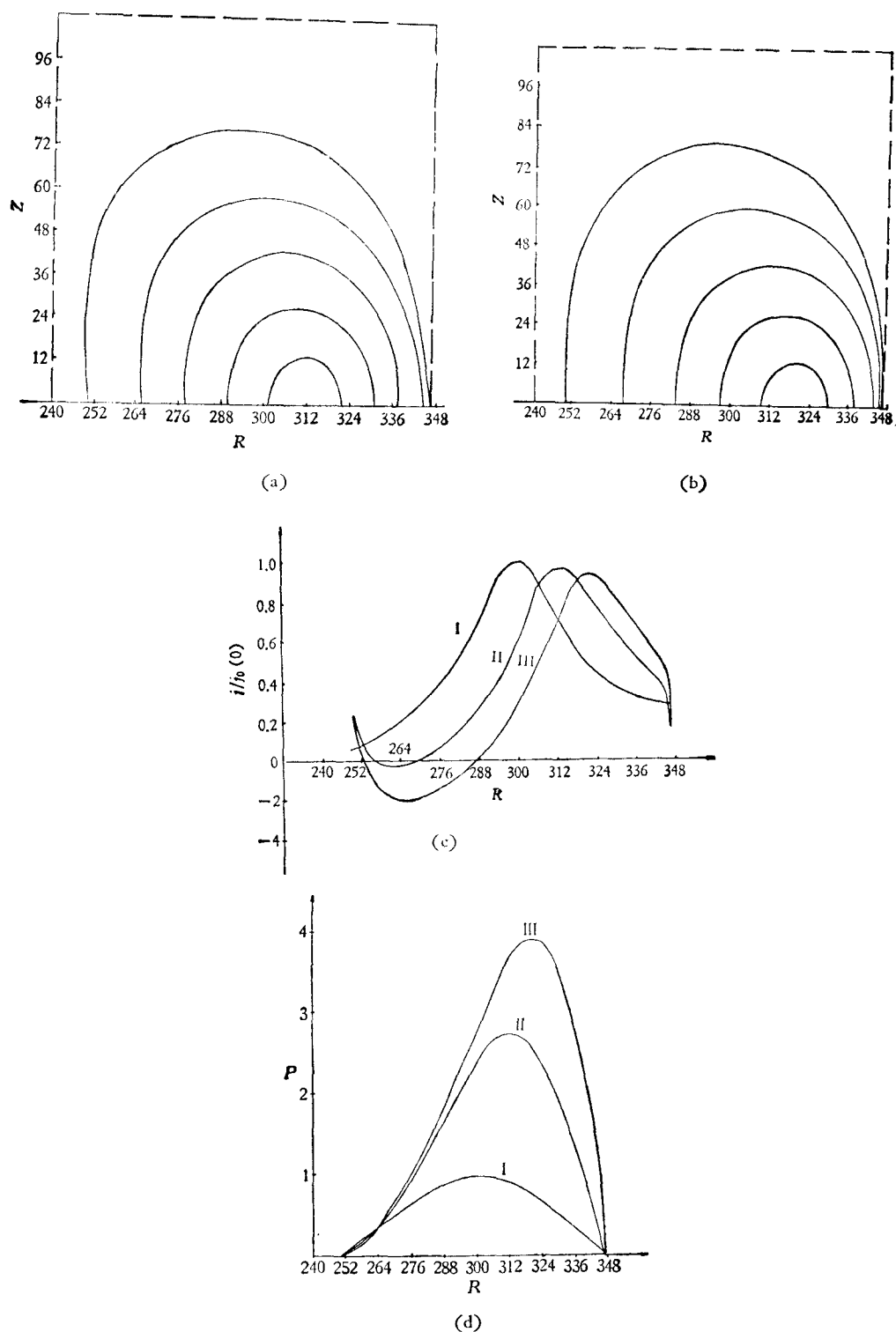


图4 非压缩快加热过程中位形演变 ($\alpha = 1.4$ 情形) (a) 和 (b) 为加热后磁面位形, 分别对应于 $\beta_p = 1.13$ 和 1.67 , 相应的 i_0 和 $P(\psi)$ 在 $z = 0$ 平面上的分布示于 (c) 和 (d) 中。初始位形与前图同。

在压缩过程中,总电流及中心电流密度都将发生变化.可证在最低一级近似下有

$$j_0(t)/j_0(0) = \sigma \xi^2, \quad (43)$$

$$J_p(t)/J_p(0) = \xi. \quad (44)$$

图 2 是一个大半径绝热压缩的例子.可以看到,压缩过程中 β_p 变化不大.这就使压缩前后的磁面相对变化不很大.在物理上允许的参数范围内,用上述方法可以很好地描述这类位形演变.

五、非压缩快加热过程中环流器等离子体位形的演变

和文献[1,8]中研究通量守恒演变的数值解时的做法类似,我们将预先指定不同时刻 $P(\phi)$,然后考察位形如何从初态演变到 t 时刻的状态.作为例子,取一个和图 2 中相同的初态分布,相应于不同的 $P_0(t)$ 或 $\beta_p(t)$,即可算得一系列位形,它们有相同的 $q(\phi)$ 分布.

设 t 时刻的压强分布如下:

$$P(t) = P_0(t) [\phi_0(\rho)/\phi_m]^\alpha, \quad (45)$$

且 $t = 0$ 时 $\alpha = 1$, 即与 (33) 式分布一致. $\alpha > 1$ 时,压强分布的半宽度变窄.图 3, 4 分别为 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 1.4$ 的计算结果.计算程序大致为:将 (45) 式中 $P(\phi)$ 代入位移公式,求出位移 $a_{1,0}(t)$ 后,根据等离子体表面与孔阑相切条件,再求出不同 $P_0(t)$ 或不同 $\beta_p(t)$ 下的新的磁轴位置,随后计算磁面位形和电流 j_θ , 压强 $P(\phi)$ 在 $z = 0$ 平面上的分布.结果分别在相应的图中表示出.

非压缩加热是在环向磁场和极向磁场都变化不大的条件下进行的,所以与绝热压缩加热不同,随着压强加大, β_p 和 β 的变化都较大,这就导致磁面位移很快加大.从我们的计算结果得知,只要位移还不太大(对应于 $\beta_p \leq 2$, 具体极限又与压强分布的形状有关),本文给出的结果与严格的二维非线性方程的通量守恒解基本相符^[8].当压强进一步加大时,靠近边界区域的计算误差很大,而且已不反映物理事实.因这时位移随 β_p 线性增大的条件已不成立,同时 a_1 已不再远小于 a , 本文的近似假设不再成立.但如果用适当的方法来处理 ϕ 和 a_n 方程中 a_1 的非线性项,就可以对高 β 环流器的平衡性质作类似的近似描述.这一工作正在进行中.

丁厚昌同志非常仔细地阅读了本文并提出宝贵意见,特致衷心谢意.

参 考 文 献

- [1] Y-K. M. Peng and R. A. Dory, *Nucl. Fusion*, **17**(1977), 21.
- [2] 石秉仁, 科学通报, **26**(1981), 144.
- [3] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine, *Rev. Mod. Phys.* **48**(1976), 239.
- [4] H. Grad, P. N. Hu and D. C. Stevens, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **72**(1975), 3789.
- [5] J. M. Greene, J. L. Johnson and K. E. Weimer, *Phys. Fluids*, **14**(1971), 671.
- [6] L. E. Zhaharov, *Nucl. Fusion*, **13**(1973), 595.
- [7] V. S. Muchvatov and V. D. Shafranov, *Nucl. Fusion*, **11**(1971), 605.
- [8] Y-K. M. Peng et al., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 467.

EVOLUTION OF TOKAMAK PLASMA DURING FAST HEATING

SHI BING-REN

(*Southwestern Institute of Physics Leshan, Sichuan, China*)

ABSTRACT

The approximate description of tokamak plasma evolution during fast heating is discussed. The equilibrium configuration of two important types of flux-conserving evolution of tokamak plasma are obtained: the adiabatic compression and the noncompressional fast heating. It is assumed that the plasma shape is noncircular with small arbitrary deformations from the average circles and there exists only one elliptic magnetic axis for the initial configuration. By means of expansion of the plasma parameters in terms of the inverse aspect ratio, the problem becomes tractable analytically. It is demonstrated that this method can be used successfully to describe the evolution sequence of adiabatic compression; as far as the noncompressional fast heating is concerned. The results are also in consistence with that of two-dimensional computation if the displacement of the magnetic axis (or the poloidal beta value) remains not very large.