

随机磁场中的反常扩散效应

夏 蒙 焚

(北京大学理论物理研究所)

1981 年 1 月 7 日收到

提 要

本文讨论了随机磁场中反常扩散效应的特征,导出了扩散流及电场随时间变化的公式,指出,趋向于稳态所需的时间远小于粒子约束时间,因而反常扩散基本上是准稳态的形式.此时,存在明显的双极电场,而双极扩散流基本上是离子扩散的量级.

目前,反常输运效应仍是等离子体物理中一项重要的研究课题.近年来,人们对于低频磁扰动效应表现出特殊的兴趣^[1-7],因为这可能是反常输运现象的主要起因之一.但是,这种反常输运的规律尚不十分清楚.本文将讨论反常扩散问题.

低频静电湍流所引起的反常扩散一般是自动双极的,而低频磁扰动所引起的扩散流通常不是自动双极的,可出现明显的非双极效应.我们曾导出随机磁场中的动力学方程,并利用这个方程计算了扩散流,指出在准稳态情形将出现明显的双极电场^[7].

然而, Inoue 等人^[6]认为离子的极化漂移使得低频磁扰动所引起的扩散流的非双极效应可以略去,这阻碍了双极电场的建立,并使离子出现很强的损失、达到电子扩散的水平.

但是,本文指出,尽管离子的极化漂移使双极电场的建立时间增大几个量级,但它仍远小于粒子约束时间.因此,在输运问题中非双极效应实际上是很重要的.将出现电场并很快达到其稳态值,扩散流将降至离子扩散的水平.这与 Inoue 等人^[6]的结果很不相同.

存在随机磁场和径向电场时粒子流可表示为^[7]

$$\Gamma_{sj} = -\frac{\partial}{\partial x}(D_j n_j) + \frac{1}{q_j} \sigma_{sj} E_x, \quad (j = e, i). \quad (1)$$

这里 x 轴取在零级梯度方向; q_j 是粒子的电荷 ($q_i = e$, $q_e = -e$); D_j 与 σ_{sj} 是随机磁场中粒子的扩散系数和垂直电导率,有

$$D_j \cong D_0 v_j, \quad (2)$$

$$\sigma_{sj} \cong \alpha \frac{n_j e^2}{T_j} D_j, \quad (3)$$

式中 D_0 是反映随机磁场的参量, v_j 是平均热速度, α 是量级为 1 的数值系数. 由 (2), (3) 式可看出

$$\frac{D_i}{D_e} \sim \frac{\sigma_{si}}{\sigma_{se}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (4)$$

即离子的输运系数比电子的输运系数小得多。(1)式右端第一项为扩散项,(4)式表明这种扩散有很强的非双极性。

先考虑准稳态情形。此时扩散流必须达到双极 $\Gamma_{se} = \Gamma_{si} \equiv \Gamma_{s0}$ 。(5)
由(1)式与(5)式,可定出准稳态时的双极电场为

$$E_{x0} = -\frac{e}{\sigma_s} \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) \quad (6)$$

$$\sim + \frac{T_e}{e r_n}, \quad (7)$$

式中 $\sigma_s = \sigma_{se} + \sigma_{si} \simeq \sigma_{se}$, (8)

而 r_n^{-1} 反映 x 方向的梯度, r_n 与等离子体半径 a 同量级。例如对 $T_e \sim 1\text{keV}$ 的情形,由(7)式,从中心到边界的电势差 $\Delta\varphi \sim E_{x0} \cdot a \sim \frac{T_e}{e} \sim 10^3\text{V}$ 。这说明,在准稳态存在明显的双极电场。由(1)式与(6)式,得到准稳态时粒子的双极流为

$$\Gamma_{s0} = -\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}}} \left[\sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}} \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e) + \frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i) \right], \quad (9)$$

Γ_{s0} 是离子扩散流 $-\frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i)$ 的量级。例如对于温度均匀且 $T_e = T_i$ 的情形,有

$$\Gamma_{s0} \sim -2 \frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i). \quad (10)$$

现考虑趋向于准稳态的弛豫过程。弛豫时间一般大于随机磁场中的关联时间(后者是具有微观尺度的量),因而在弛豫过程中(1)式仍适用^[7],但在总粒子流中还要包括极化漂移引起的流^[6]

$$\Gamma_{pi} = \frac{n_i c^2 m_j}{q_j B_0^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (11)$$

总粒子流为 $\Gamma_j = \Gamma_{sj} + \Gamma_{pj}$. (12)

由(11)式可看出电子的极化漂移流远小于离子的极化漂移流

$$|\Gamma_{pe}/\Gamma_{pi}| \sim m_e/m_i. \quad (13)$$

电场 E_x 是电荷分离形成的静电场,由泊松方程 $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi e(n_i - n_e)$ (14)

与连续方程 $\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\frac{\partial \Gamma_j}{\partial x}$ (15)

决定。由(12),(14)及(15)式,得到 $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -4\pi e(\Gamma_{si} - \Gamma_{se} + \Gamma_{pi} - \Gamma_{pe})$. (16)

将(11)式代入(16)式,得到 $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{4\pi e}{\epsilon_{\perp}} (\Gamma_{si} - \Gamma_{se})$, (17)

其中 $\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi n_i m_i c^2}{B_0^2} + \frac{4\pi n_e m_e c^2}{B_0^2} \simeq 1 + \frac{c^2}{c_A^2}$, (18)

其中 $c_A = \sqrt{B_0^2/4\pi n_i m_i}$ 是阿耳芬速度。将(1)式代入(17)式,得到

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{4\pi \sigma_s}{\epsilon_{\perp}} E_x - \frac{4\pi e}{\epsilon_{\perp}} \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i). \quad (19)$$

$$\text{令} \quad \tau_0 = \frac{\epsilon_{\perp}}{4\pi\sigma_s}, \quad (20)$$

$$\text{并利用(6)式, 则(19)式变为} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} (E_{x0} - E_x). \quad (21)$$

由于 τ_0 比粒子约束时间小得多, 可以近似地认为 E_{x0} 与 τ_0 在弛豫过程中 ($\Delta t < \tau_0$) 保持不变, 则方程(21)式的解为 $E_x = E_{x0}(1 - e^{-t/\tau_0})$. (22)

由(22)式可以看出, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $E_x \rightarrow E_{x0}$, 弛豫时间即为 τ_0 . 由(17)及(20)式容易看出, 不考虑离子极化漂移时弛豫时间为 $1/4\pi\sigma_s$, 而离子极化漂移效应使之增大 $\epsilon_{\perp}$ 倍. 在典型的托卡马克参量 ($n \sim 5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, $B_0 \sim 3 \times 10^4 \text{G}$) 下, 有 $\epsilon_{\perp} \sim 10^3 \gg 1$. 离子极化漂移效应使扩散流的非双极效应大为削弱, 使双极电场的建立时间增大几个量级, 这一点是与 Inoue 等人^[6]的结果一致的.

现将 τ_0 与准稳态情形粒子的约束时间 τ_n 作比较. 由(10)式, 准稳态时粒子损失以 D_i 为标志, 故

$$\tau_n \sim a^2/D_i. \quad (23)$$

$$\text{由(20), (23)式及(3), (18)式, 得到} \quad \frac{\tau_0}{\tau_n} \sim \epsilon_{\perp} \sqrt{\frac{m_i T_i}{m_e T_e}} \left(\frac{\lambda_D}{a}\right)^2 \sim \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}} \left(\frac{\rho_i}{a}\right)^2, \quad (24)$$

其中 λ_D 与 ρ_i 分别是德拜长度与离子迴旋半径. 在典型的托卡马克参量 ($n \sim 5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, $B_0 \sim 3 \times 10^4 \text{G}$, $T_e \sim T_i \sim 1 \text{keV}$, $a \sim 30 \text{cm}$) 下, 有 $\tau_0/\tau_n \sim 4 \times 10^{-4} \ll 1$. 这个结果表明, 尽管由于离子的极化漂移效应而使弛豫时间增大了大约三个量级, 但它仍比粒子约束时间小三个量级以上, 因而在输运问题所关心的时间尺度内这个弛豫阶段是不重要的. 由(1), (11), (12)及(22)式, 可以得到粒子流随时间的变化为

$$\begin{aligned} \Gamma_e \cong & -\frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e) + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}}} \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) (1 - e^{-t/\tau_0}) \\ & + \frac{n_e m_e}{n_i m_i} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\perp}}\right) \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) e^{-t/\tau_0}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_i \cong & -\frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i) - \frac{\sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}}}{1 + \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}}} \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) (1 - e^{-t/\tau_0}) \\ & - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\perp}}\right) \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) e^{-t/\tau_0}. \end{aligned} \quad (26)$$

当 $t \gg \tau_0$ 时, $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i0}$ [见(9)式]. 而在 $t \ll \tau_0$ 时 $E_x \sim 0$, 有

$$\Gamma_e \sim -\frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e) + \frac{m_e}{m_i} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\perp}}\right) \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i) \sim -\frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e), \quad (27)$$

$$\Gamma_i \sim -\frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i) - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\perp}}\right) \frac{\partial}{\partial x} (D_e n_e - D_i n_i), \quad (28)$$

$$\text{而} \quad \left| \frac{\Gamma_e - \Gamma_i}{\Gamma_e} \right| \sim \left| \frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{m_e}{m_i} \right| \ll 1. \quad (29)$$

因此,在整个弛豫过程中,离子流始终很接近于电子流. 在 $t < \tau_0$ 时, E_x 很小, 电子有很高的损失率(以 D_e 标志), 而离子流的主要贡献来自极化漂移, 这使离子流也达到电子扩散水平; 随着 E_x 的增大, 电子流逐渐下降, 离子流也相应下降, 到 $t \gg \tau_0$ 时, 趋向于稳态值, 离子流降至离子扩散水平(即以 D_i 标志). 由于 $\tau_0 \ll \tau_n$, 故离子极化漂移导致的增强损失在输运问题中是不重要的.

以上结果表明, 对于随机磁场中的反常扩散效应, 由于 $\tau_0/\tau_n \ll 1$, 在整个输运问题中扩散流基本上处于准稳态, 极化漂移引起的离子反常损失是不重要的, 扩散的非双极性导致的双极电场起重要作用, 它使随机磁场中的反常扩散(以 D_i 标志)比反常电子热导(以 D_e 标志, 因电场不能使它发生量级的变化)^[7]小得多.

随机磁场中这种稳态输运特征与实验结果一致. 在托卡马克实验中有很高的电子热导, 而反常扩散较低, 但二者的差别比理论上小. 这说明可能存在其它反常输运机制, 其量级处于随机磁场中电子热导与扩散二者之间. 例如静电湍流引起的反常输运其电子热导与扩散是同量级的. 这可使电子热导与扩散之间的差别减小.

参 考 文 献

- [1] T. H. Stix, *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 353.
- [2] A. B. Rechester *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 38.
- [3] C. Chen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 653.
- [4] T. Yamagishi, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 2431.
- [5] H. E. Mynick *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 506.
- [6] S. Inoue *et al.*, *Nucl. Fusion*, **19**(1979), 1252.
- [7] 夏蒙芬、胡慧玲, 物理学报, **29**(1980), 1254.

THE ANOMALOUS DIFFUSION EFFECT IN A STOCHASTIC MAGNETIC FIELD

XIA MENG-FEN

(*Institute of Theoretical Physics, Peking University*)

ABSTRACT

In this paper the effects of diffusion in a stochastic magnetic field are discussed. The time-dependent equations for diffusion flux and ambipolar electric field are derived. The results show that the relaxation time is much less than the life-time of particles, so that the quasi-stationary state can be reached. The ambipolar electric field is important and the ambipolar diffusion flux is of the same order of the ion diffusion level.