

平面屏系统中标量光波传播的 矩阵理论(柱坐标)

李 先 枢

(中山大学物理系)

1980年9月12日收到; 12月25日收到修改稿

提 要

本文在文献[8]的基础上,提出了一个平面屏系统中标量光波传播的矩阵理论.由于采用的是柱坐标系,所以它主要适宜于具有理想轴对称性的系统.它的主要优点,是较便于处理上述系统中某些用已有理论实际上较难处理的光传播问题.本文中未考虑散射屏.

这个理论的适用范围是:系统中所有平面屏都垂直光传播轴;可对每一屏的衍射应用本文的衍射公式和近似条件;在反射、吸收和增益屏上的入射光锥角较小等.

作为应用的例子,本文得出和讨论了无源光学谐振腔中振荡模的矩阵方程.把它和已有的 Fox 和 Li^[1,2] 的积分方程作了比较,表明了矩阵方程具有某些重要的实际优点.

一、引 言

由于相干光源的出现等原因,光传播光学近廿年来有了蓬勃的发展^[1]. 60年代初,人们已成功地建立了以光线变换矩阵为基础的矩阵光学^[2]. 对高斯光束引入所谓复光线表示和用光线变换矩阵表示衍射积分的核^[3],又进一步扩充了矩阵光学的应用范围.然而所有这些理论或方法,都要以光线的概念为基础,具有几何光学或准几何光学的性质.离散傅里叶变换^[4]与近年来的某些其它发展^[5-7],虽可在物理光学个别问题的处理中应用矩阵运算,然而讨论的对象却比较特殊.特别是文献[8]中已经指出,人们不能或不宜用这些工作为基础,建立一个比较普遍和实用的标量波传播的矩阵理论.

本文在文献[8]的基础上,具体得到了一个比较普遍和实用的、平面屏系统中标量光波传播的矩阵理论.这是一个彻底且比较普遍的标量波理论,可用来处理由多种平面屏组成的光学系统;它自然地是以文献[8]为基础的、更普遍的标量波传播的矩阵理论的一个组成部份.

本文未考虑散射;其结果的适用范围是:所有平面屏垂直光传播轴;每一个屏的衍射可适用本文第二节的衍射公式和近似条件.在反射、吸收和增益屏上,入射光光锥角较小等.

由于所用坐标系的原因,本文结果显然较适宜于处理具有理想轴对称性的系统.

二、衍射积分及其近似处理

考虑由各种平面屏、共轴理想透镜与自由空间组成的光学系统。在标量理论中,反射屏自然可与相应透射屏等价(光传播方向不同);而衍射、位相变换、吸收或增益(入射光锥角较小时)以及其它平面屏,都可用一适当共轴薄透镜后¹⁾紧贴一平面光滤来表示。因此,这种光滤的“衍射”,是本文要处理的最基本问题。平面屏引起的干涉也自然地包括于其中。

1) 基本衍射积分

据基尔霍夫衍射理论得出,当入射单色波 $\Phi'(\rho', \varphi', z)$ ^[8] 满足条件

$$-\frac{\partial}{\partial z} \Phi' \approx ik\Phi' \quad (2.1)$$

时,垂直于光传播轴的不透明平面屏上开孔 $\mathcal{A}$ 的衍射积分^[9] 在

$$\frac{1}{s} \ll k$$

区域为(参看图 1)

$$u(P) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \Phi'(\rho', \varphi', z_0) \frac{e^{-iks}}{s} [1 - \cos(z, s)] dS. \quad (2.2)$$

这里 $u(P)$ 为衍射场在点 $P(\rho, \varphi, z)$ 的复振幅,符号规定同文献[8]。 z 为光传播轴, $\mathcal{A}$ 中面元 $dS(\rho', \varphi', z_0)$ 至 P 点距离为 s , 均如图 1 所示。取初步近似

$$\cos(z, s) \approx -1, \quad (2.3)$$

(2.2)式便成为

$$u(P) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} \Phi'(\rho', \varphi', z_0) \frac{e^{-iks}}{s} dS. \quad (2.4)$$

(2.4) 式就是满足条件(2.3)式时,任意标量光场 Φ' 入射时的第一种瑞利-索末菲公式^[10]。虽然,按条件(2.1)式,基尔霍夫衍射理论似要求入射波近于平面波,但 Marchand 和 Wolf 曾证明,基尔霍夫衍射理论与瑞利-索末菲理论的结果,对于非平面波的某些情况,实际上

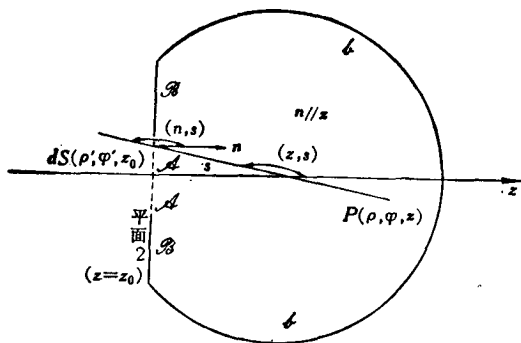


图 1(a) 衍射积分(2.2)式中所用符号的图示

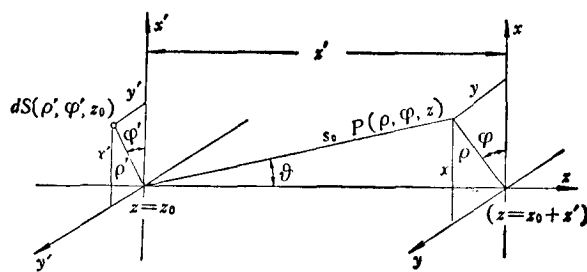


图 1(b) 本文所用坐标系

1) 当透镜看作无限薄时,平面屏紧贴透镜前、后表面的效果应相同。

也是一样的^[11]。此外瑞利-索末菲公式目前已有广泛实际应用^[10]。故应认为(2.4)式适用于较广泛范围。

2) 近似条件

为简化基本衍射积分(2.4)式, 须引入近似条件。近期来流行一种费涅耳近似条件^[10], 但本文作者认为, 它不宜用来讨论远衍射场。事实上按本文符号, 该条件可写为

$$\cos(z, s) \approx -1, \quad s = z'; \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{8\lambda} \left\{ \frac{1}{z'^3} [(x'^2 + y'^2) - 2(x'x + y'y) + (x^2 + y^2)]^2 \right\}_{\max} \ll 1. \quad (2.6)$$

令 $\vartheta_m \approx \tan \vartheta_m = (\sqrt{x^2 + y^2}/z')_{\max}$ 表近似条件允许讨论的最大衍射角(图1(b)), 当 z 轴穿过开孔时据(2.6)式

$$\lim_{z' \rightarrow \infty} \vartheta_m^4 \lesssim \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{z'} \right]_{\max}^4 \ll \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{8\lambda}{z'}. \quad (2.7)$$

可见上述近似条件不能用来讨论远衍射场随 ϑ 的分布。因此如果使用上述近似条件, 就必须把远、近¹⁾衍射场用两个近似条件、两个衍射公式分别讨论, 较不方便。

为把远、近衍射场用同一个近似条件与公式来讨论, 作者提出如下的近似条件:

$$\cos(z, s) \approx -1, \quad s \approx s_0; \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{8\lambda} \left\{ \frac{1}{s_0^3} [2(x'x + y'y) - (x'^2 + y'^2)]^2 \right\}_{\max} \ll 1. \quad (2.9)$$

易证: 至少在 x', y' 可与 x, y 反号时, (2.8), (2.9)式允许讨论的衍射场区域, 包含了上述习用费涅耳近似条件与习用夫琅和费近似条件^[12]所允许讨论的区域的总和, 并较这个总和还要大。

把 k_s 展为如下级数:

$$k_s = k_{s_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{2(x'x + y'y)}{s_0^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{s_0^2} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{2(x'x + y'y)}{s_0^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{s_0^2} \right]^2 + \dots \right\}. \quad (2.10)$$

因 $x'^2 + y'^2 = \rho'^2$, 由图1(b)及(2.9)式得

$$\frac{k\rho'^2}{2s_0} \approx \frac{k\rho'^2}{2z'}. \quad (2.11)$$

令

$$p = \frac{x}{s_0}, \quad g = \frac{y}{s_0}, \quad c = \frac{e^{-ik s_0}}{s_0}, \quad (2.12)$$

以(2.8)–(2.12)式代入(2.4)式得

$$u(P) = \frac{ic}{\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \Phi(\rho', \varphi', z_0) e^{-jk\rho'^2/2z'} e^{ik(p x' + g y')} dx' dy'. \quad (2.13)$$

1) 本文所谓近衍射场, 系按近十年来某些外国文献中的说法, 指的只是习用费涅耳近似条件允许讨论的衍射场空间范围, 并不能包括很近衍射屏的衍射场区域。

3) 一般平面屏的衍射公式

考虑图 2 所示系统, 开孔 $\mathcal{A}$ 处为一平面光滤, 置于紧贴薄透镜¹⁾后的平面 2 上. 光

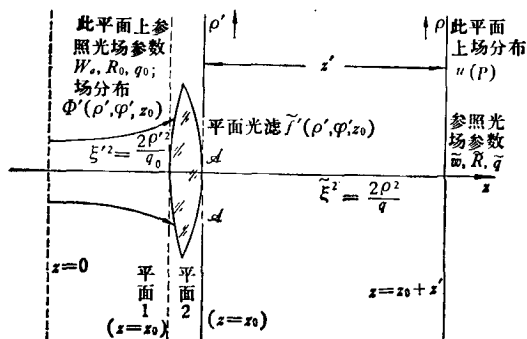


图 2 所讨论的装置

(对薄透镜, 开孔紧贴透镜前或后表面时, 结果应一样)

$z=0$; 平面 1 ($z=z_0$), $\xi'^2 = 2\rho'^2/q_0$, 场分布 $\Phi'(\rho', \varphi', z_0)$,
此平面上参照光场参数: w_a, R_0, q_0 ; 平面 2 ($z=z_0$), $\mathcal{A}, \mathcal{A}$, 平
面光滤 $\tilde{f}'(\rho', \varphi', z_0)$, $\uparrow \rho'$; $z=z_0+z'$, $\xi^2 = 2\rho^2/\tilde{q}$, 参照光
场参数: $\tilde{w}, \tilde{R}, \tilde{q}$; 此平面上场分布 $u(P)$, $\rho \uparrow$

滤复振幅透射系数为 $\tilde{f}'(\rho', \varphi')$ ——也叫光瞳函数. 设 $\Phi'(\rho', \varphi', z_0)$ 是紧贴透镜前表面 1 上的入射场分布, f 为薄透镜焦距, 那么据文献 [10], (2.13) 式成为

$$u(P) = \frac{ic}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\rho', \varphi', z_0) \tilde{f}'(\rho', \varphi') e^{ik\rho'^2(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} e^{ik(p x' + q y')} dx' dy'. \quad (2.14)$$

现在如文献 [8], 引入参照高斯光场 $u_G(\xi'^2, z_0)$, 它所联系的高斯光束的腰部中心取为坐标原点. 它在开孔平面 ($z=z_0$) 上的参数设为: $q=q_0, w=w_a, R=R_0$, 并引入变量 $\xi^{[8]}$. 取该平面上面元 dS 的坐标为 (ξ', φ', z_0) . 把 $\tilde{f}'$ 展为傅里叶级数

$$\tilde{f}'(\rho', \varphi') \equiv \tilde{f}(\xi', \varphi') = \sum_{s'=\pm 1} \sum_{l'=0}^{\infty} \widetilde{C}_{s'l'}(\xi') e^{is'l'\varphi'}. \quad (2.15)$$

$\Phi'(\rho', \varphi', z_0)$ 用文献 [8] 的方法表示为

$$\Phi'(\rho', \varphi', z_0) \equiv \Phi(\xi', \varphi', z_0) = \sum_{s'=\pm 1} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(s'l')} \Psi_n^{(s'l')}(\xi', \varphi', z_0). \quad (2.16)$$

$\Psi_n^{(s'l')}(\xi', \varphi', z_0)$ 即文献 [8] 中元模场表示式. 而 (2.14) 式可写为

$$u(P) = \sum_{s'=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(s'l')} u_n^{(s'l')}(P), \quad (2.17)$$

其中 $u_n^{(s'l')}(P)$ 为单元模场 $\Psi_n^{(s'l')}$ 产生的衍射场,

$$u_n^{(s'l')}(P) = \frac{ic}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{l'n'}(\xi', z_0) \tilde{f}(\xi', \varphi') e^{ik\rho'^2(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} e^{is'l'\varphi'} e^{ik(p x' + q y')} dx' dy'. \quad (2.18)$$

当 $|\tilde{f}| \approx 1$, 表示平面屏有增益或吸收作用. 令

1) 如光滤前为理想厚透镜, 据文献 [10], 所得结果仅差一模为 1 的复常数.

$$\vartheta = \rho/s_0; \quad (2.19)$$

$$p = \vartheta \cos \varphi, g = \vartheta \sin \varphi; x' = \rho' \cos \varphi', y' = \rho' \sin \varphi' \quad (2.20)$$

(参见图 1 (b)), 并以 (2.20) 式代入 (2.18) 式, 得

$$\begin{aligned} u_n^{(s'l')}(P) &= \frac{\pi c}{2\lambda} q_0 \sum_{s'l'=-\infty}^{\infty} j^{l+1} e^{jsl\varphi} \int_0^{\infty} \phi_{l'n}(\xi', z_0) \widetilde{C_{sl-s'l'}}(\xi') \\ &\quad \times e^{ik\rho'(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} J_l(k\rho'\theta) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.21)$$

由上可见, $u(P)$ 所含对称元素都是开孔函数 $\Phi'f'$ 中已有的. 如果光瞳函数是理想轴对称的, 例如理想轴对称平面光滤紧贴在一共轴圆孔上, 圆孔半径为 a , 那么 (2.21) 式便可简化为

$$\begin{aligned} u_n^{(sl)}(P) &= \frac{\pi c}{2\lambda} q_0 j^{l+1} e^{jsl\varphi} \int_0^{a^2/q_0} \phi_{l'n}(\xi', z_0) \widetilde{C_0}(\xi') \\ &\quad \times e^{ik\rho'(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} J_l(k\rho'\theta) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.22)$$

如果开孔内处处透射性质相同, 则 $\widetilde{C_0}(\xi') = C_0$ 为一常数. 如果开孔前无透镜, 则 $f \rightarrow \infty$. (2.22) 式表明, 当光瞳函数对光传播轴理想对称时, 入射场中 $s'l'$ 不同的傅里叶成份的衍射完全可以分开来考虑. 这就解释了现有无源腔理论^[2] 中以柱坐标表示的横模场函数只是对 φ 的单一傅里叶成份的原因.

4) 相关参照光场 $u_G^{(r)}(\xi_r^2, z'_0)$

引入 “ $z = z_0 + z'$ 平面的相关参照(高斯)光场”

$$u_G^{(r)}(\xi_r^2, z'_0) = e^{-\xi_r^2/2} u_G(0, z_0), \quad (2.23)$$

其中

$$\xi_r^2 = \frac{2\rho'^2}{q'_0} = \frac{q_0}{q'_0} \xi'^2, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{q'_0} = \frac{1}{q_0} - jk \left(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'} \right). \quad (2.25)$$

于是 (2.21) 式与 (2.22) 式中被积函数

$$\phi_{l'n}(\xi', z_0) e^{ik\rho'(\frac{1}{2f} - \frac{1}{2z'})} = \left(\frac{q'_0}{q_0} \right)^{n+1/2} \phi_{l'n}(\xi_r, z'_0). \quad (2.26)$$

$\phi_{l'n}(\xi_r, z'_0)$ 为以 (3.1) 式作参照光场时的元模场. 于是由 (3.4) 式及 (2.22) 式得

$$\begin{aligned} u_n^{(sl)}(P) &= j^{l+1} \left(\frac{q'_0}{q_0} \right)^{n+1/2} \frac{q'_0 e^{jsl\varphi} \pi c}{2\lambda} \\ &\quad \times \int_0^{a^2/q'_0} \phi_{l'n}(\xi_r, z'_0) \widetilde{C_0} \left(\frac{q'_0}{q_0} \xi_r^2 \right) J_l \left\{ 2 \left[\frac{k^2 q'_0 \theta^2}{4} \cdot \frac{\xi_r^2}{2} \right]^{1/2} \right\} d\xi_r^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$u_G^{(r)}(\xi_r^2, z'_0)$ 的参数 q'_0, R'_0, w_a, ϕ'_0 及其腰部光斑半径 w'_0 可由 $u_G(\xi'^2, z_0)$ (在图 2 面 1 上) 的诸相应参数表示:

$$\frac{1}{q'_0} = \frac{1}{w_a^2} + j \frac{k}{2R'_0} = \frac{1}{w'_0 w_a} e^{i\phi'_0}, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{R'_0} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{f} + \frac{1}{z'}, \quad (2.29)$$

$$w_0'^2 = w_a^2 \left[1 + \left(\frac{k w_a^2}{2R_0'} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (2.30)$$

$$\phi_0' = \text{tg}^{-1} \left(\frac{k w_a^2}{2R_0'} \right). \quad (2.31)$$

三、单孔的衍射矩阵

1) 换变量

把 $u_G(\xi', z_0)$ 称为“输入(面)参照光场”,它联系的高斯光束经图 2 所示系统中薄透镜(设无平面光滤,即不考虑衍射)后,在 $z = z_0 + z'$ 平面上的场 $\tilde{u}_G(\xi^2, \tilde{z})$ 称为“原输出(面)参照光场”.坐标 $\tilde{z}$ 的原点 ($\tilde{z} = 0$) 取在上述高斯光束经薄透镜变形后新形成的腰部平面上.

$$\xi^2 = 2\rho^2/\tilde{q}, \quad (3.1)$$

$\tilde{q}$ 为上述参照光场复光斑半径.现在把(2.27)式中表示衍射场坐标的变量 $k^2 q_0' \theta^2$ 用 ξ^2 来表示.

由于高斯光束是波动方程的解,应有

$$u_0^{(0)}(P)|_{s \rightarrow \infty} = \tilde{u}_G(\xi^2, \tilde{z}). \quad (3.2)$$

(取(2.27)式中 $\tilde{C}_0 \left(\frac{q_0'}{q_0} \xi_r \right) = 1$). 令

$$t = \xi^2/2, \quad v = \frac{k^2}{4} q_0' \theta^2, \quad (3.3)$$

利用关系式(参看文献[13]第 98 页)

$$J_l[2(tv)^{1/2}] = (tv)^{1/2} e^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m^{(l)}(t)}{\Gamma(m+l+1)} v^m, \quad (3.4)$$

并注意到(2.27)式中

$$C = \frac{e^{-ikz_0}}{s_0} \approx \frac{e^{-ikz'}}{s_0} e^{-ik\rho^2/2z'}, \quad (3.5)$$

由(2.27)式及(3.2)–(3.5)式得到

$$\frac{1}{4} k^2 q_0' \theta^2 = \frac{\xi^2}{2} - ik \frac{\rho^2}{2z'} = \left(\frac{\tilde{q}}{q_k} \right) \frac{\xi^2}{2}, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{q_k} = \frac{1}{\tilde{w}^2} \left[1 - j \left(\frac{\tilde{R} - z'}{\tilde{R}} \right) k \frac{\tilde{w}^2}{2z'} \right], \quad (3.7)$$

$$\tilde{u}_G(0, \tilde{z}) = j \frac{\pi}{2\lambda} \frac{e^{-ikz'}}{s_0} q_0' u_G(0, z_0). \quad (3.8)$$

于是,把(3.3)式中 t 的表示式及(3.6)–(3.8)式代入(2.27)式,得到

$$u_n^{(il)}(P) = j^l \left(\frac{q_0'}{q_0} \right)^{n+l/2} \frac{\sqrt{2\pi(n+l/2)}}{\Gamma(n+l/2+1)} e^{-ik\rho^2/2z'} u_G(0, \tilde{z}) e^{isl\varphi}$$

1) 注意:此处的讨论是直接对(3.2)式右边的高斯光束的.(3.5)式显然是可取的.但这里的近似对(3.9)式的影响则较为复杂,在通常情形下可以忽略.

$$\times \int_0^{a^2/q_0'} t^{n+l/2} e^{-t} \tilde{C}_0 \left(\sqrt{\frac{2q_0'}{q_0}} t \right) J_l \left\{ 2 \left[t \cdot \frac{\tilde{q}}{q_K} \frac{\tilde{\xi}^2}{2} \right]^{1/2} \right\} dt. \quad (3.9)$$

2) 衍射矩阵

用(3.4)式展开(3.9)式的积分核后整理得到

$$u_n^{(sl)}(P) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}^{(sl)} \Psi_m^{(sl)}(\xi, \varphi, \tilde{z}), \quad (3.10)$$

其中 $\Psi_m^{(sl)}(\xi, \varphi, \tilde{z})$ 是以 $\tilde{u}_0(\xi^2, \tilde{z})$ 为参照光场的元模场, 而

$$A_{mn}^{(sl)} = j^l \left(\frac{q_0'}{q_0} \right)^{n+l/2} \left(\frac{\tilde{q}}{q_K} \right)^{m+l/2} \cdot \frac{\Gamma(m+l/2+1)}{\Gamma(m+l+1) \cdot \Gamma(n+l/2+1)} \\ \times \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} \cdot C_{mn}^{(sl)}, \quad (3.11)$$

$$C_{mn}^{(sl)} = \int_0^{a^2/q_0'} \tilde{C}_0 \left(\sqrt{\frac{2q_0'}{q_0}} t \right) t^{n+l} L_m^{(l)}(t) e^{-t} dt. \quad (3.12)$$

这里要再次强调: 在本文公式中, 描述入射与衍射场时所用的参照光场一般是不同的。

同理可证, 光瞳函数不具理想轴对称性时, (2.21) 式可写为

$$u_n^{(s'l'')} (P) = \sum_{sl=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}^{(s'l' \rightarrow sl)} \Psi_m^{(sl)}(\xi, \varphi, \tilde{z}) \right], \quad (3.13)$$

其中

$$A_{mn}^{(s'l' \rightarrow sl)} = j^l \left(\frac{q_0'}{q_0} \right)^{n+l/2} \left(\frac{\tilde{q}}{q_K} \right)^{m+l/2} \frac{\Gamma(m+l/2+1)}{\Gamma(m+l+1) \Gamma(n+l'/2+1)} \\ \times \sqrt{\frac{n+l'/2}{m+l/2}} C_{mn}^{(s'l' \rightarrow sl)}, \quad (3.14)$$

$$C_{mn}^{(s'l' \rightarrow sl)} = \int_0^{\infty} t^{n+(l+l')/2} \tilde{C}_{sl-s'l'} \left(\sqrt{\frac{2q_0'}{q_0}} t \right) L_m^{(l)}(t) e^{-t} dt. \quad (3.15)$$

在本文所有公式中, 若 $p + v/2 = 0$, ($p = n, m; v = l, l''$) 则 $\sqrt{p + v/2}$ 应改写为

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

在理想轴对称情形下, 把(3.10)式代入(2.17)式, 设可颠倒求和顺序, 便得入射场傅里叶成份

$$f_{sl}(\xi', \varphi', z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(sl)} \phi_{ln}(\xi', z_0) e^{isl\varphi'}. \quad (3.16)$$

在输出面 ($z = z_0 + z'$) 上产生的衍射场光场分布矢量¹⁾

$$x^{(sl)'} = [\beta_0^{(sl)}, \beta_1^{(sl)}, \beta_2^{(sl)}, \dots], \quad (3.17)$$

可证

1) 文献[8]中称为光场矢量。本文为示明它与光矢量 E 的区别, 改称之为光场分布矢量或场分布矢量。

$$x^{(sl)'} = A^{(sl)} x^{(sl)}. \quad (3.18)$$

而 $x^{(sl)}$ 为输入面(图2平面1)上 f_{sl} 的光场分布矢量

$$x^{(sl)} = [\alpha_0^{(sl)}, \alpha_1^{(sl)}, \alpha_2^{(sl)}, \dots]. \quad (3.19)$$

$A^{(sl)}$ 称图2所示系统的衍射矩阵, 可证 $A^{(sl)}$ 可截取为有穷阶^[8](参见附录), 故易在一般情况下求解逆衍射问题.

$$x^{(sl)} = [A^{(sl)}]^{-1} x^{(sl)'}. \quad (3.20)$$

假设可改变(3.13)式的求和顺序, 则在不具理想轴对称性的平面屏的输出面($z = z_0 + z'$)上, 衍射场中以 sl 标志的傅里叶成份也可用光场分布矢量(3.17)式表示, 而

$$x^{(sl)'} = \sum_{s'l'=-\infty}^{\infty} A^{(s'l' \rightarrow sl)} x^{(s'l')}. \quad (3.21)$$

$A^{(s'l' \rightarrow sl)}$ 也称为衍射矩阵, $A^{(sl)}$ 和 $A^{(s'l' \rightarrow sl)}$ 的矩阵元素分别由(3.11), (3.12)式和(3.14), (3.15)式表示. $A^{(s'l' \rightarrow sl)}$ 亦可截取为有穷阶.

四、平面屏系统的光传播矩阵

1) 平移矩阵

设在自由空间有两个垂直光传播轴的平面. 前一平面(输入面)上光场分布矢量为 $x^{(sl)}$, 顺光传播方向平移 z' 处的平行平面(输出面)上光场分布矢量为 $x^{(sl)'} (x^{(sl)}, x^{(sl)'}$ 分别表输入、输出光场的同一傅里叶成份^[8]). 则由(3.12)式中取 $a \rightarrow \infty, \tilde{C}_0 = \text{常数}; (2.29)$ 式中 $f \rightarrow \infty$ 得到

$$x^{(sl)'} = \{A_{\infty}^{(sl)}\} x^{(sl)}, \quad (4.1)$$

$$\{A_{\infty}^{(sl)}\}_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{当 } n < m; \\ (-1)^m j^l \left(\frac{q'_0}{q_0}\right)^{n+l/2} \left(\frac{\tilde{q}}{q_K}\right)^{m+l/2} \frac{\Gamma(m+l/2+1)\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(m+l+1)\Gamma(n+l/2+1)} \\ \times \binom{n}{m} \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} & \text{当 } n \geq m. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{q'_0} = \frac{1}{q_0} + \frac{jk}{2z'} = \frac{1}{w_a^2} + jk \left(\frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2z'} \right). \quad (4.3)$$

$\{A_{\infty}^{(sl)}\}$ 称平移矩阵, 它可表示在自由空间平移输入或输出面时, 光场分布矢量的变化. 若 $|z'| < |R_0|, 4z'^2 \ll k^2 w_a^4$, 则 $|q'_0/q_0| \ll 1$; 即当输入和输出面间距相对很小时, $\{A_{\infty}^{(sl)}\}$ 可简化到只有对角线附近的元素才显异于零. 若输入面后紧贴一共轴薄透镜(半径充分大), 则 $\{A_{\infty}^{(sl)}\}_{mn}$ 中的 q'_0 应以(2.28), (2.29)式代入. 利用逆矩阵 $\{A_{\infty}^{(sl)}\}^{-1}$, 还可由 $x^{(sl)'}$ 反求 $x^{(sl)}$.

2) 透镜矩阵

设光学系统中共轴薄透镜前(输入)、后(输出)表面上相应光场分布矢量为 $x^{(sl)}, x^{(sl)'}$. 可证

$$x^{(sl)'} = A_L^{(sl)} x^{(sl)}, \quad (4.4)$$

$$\{A_L^{(sl)}\}_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n; \\ \left(\frac{\tilde{q}}{q_0}\right)^{n+l/2} & \text{当 } m = n. \end{cases} \quad (4.5)$$

这里 $q_0, \tilde{q}$ 分别为输入和原输出参照光场的复光斑半径。 $\{A_L^{(sl)}\}$ 称为薄透镜矩阵。

3) 变换矩阵

常有这种情形: 输入参照光场选定后, 由它决定的原输出参照光场应用不便(如在求非稳谐振腔振荡模时), 需要更换输出面参照光场, 为使方法完备, 下面引入变换矩阵 $\{A_i^{(sl)}\}$ 。

设用复光斑半径为 q_1 的参照光场时, 表征某垂直光传播轴平面上的场复振幅分布的场分布矢量为 $x^{(sl)}$; 而用复光斑半径为 q_2 的参照光场表征同一场复振幅分布的矢量为 $x^{(sl)'}$ 。可证

$$x^{(sl)'} = \{A_i^{(sl)}\} x^{(sl)}, \quad (4.6)$$

其中

$$\{A_i^{(sl)}\}_{mn} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} \frac{\Gamma(m+l/2+1)}{\Gamma(n+l/2+1)\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n+l/2} \left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)^{m-n} & \text{当 } n \leq m; \\ 0 & \text{当 } n > m. \end{cases} \quad (4.7)$$

显然 $\{A_i^{(sl)}\}$ 与 $x^{(sl)}$ (的分量值) 无关, 即与所描述的场复振幅分布无关。

4) 相加与相乘复合系统

若多孔平面屏中各孔的作用可认为是互相独立的, 那么它便属于文献[8]中的相加复合系统。设其中第 i 个孔的作用矩阵为 A_i , 则整个多孔屏的作用矩阵为

$$A = \sum_i A_i. \quad (4.8)$$

重要特例是共轴多环衍射孔。设它共有 N 个透光环(中央圆孔可看作一个内径为零的环); 其中第 p 个环内、外半径为 r_p, r_{p+1} , 复振幅透射系数为 $\tilde{C}_p(\xi^2)$ 。则该共轴多环孔的衍射矩阵为

$$\{A_{mp}^{(sl)}(N)\} = \sum_{p=1}^N [\{A^{(sl)}(r_{p+1}, \tilde{C}_p)\} - \{A^{(sl)}(r_p, \tilde{C}_p)\}], \quad (4.9)$$

其中 $\{A^{(sl)}(r_i, \tilde{C}_k)\}$ 表半径为 r_i , 复振幅透射系数为 $\tilde{C}_k$ 的共轴圆孔的衍射矩阵。

若复合系统中, 顺光传播方向前一平面屏(或系统)的输出面就是后一平面屏(或系统)的输入面(例如当系统中各平面屏的反射与散射等作用可忽略时即如此), 则整个复合系统便属于文献[8]中相乘复合系统。令 A_i 表示其中第 i 个屏(或系统)的作用矩阵, 则整个复合系统作用矩阵为^[8]

$$A = \prod_i A_i. \quad (4.10)$$

5) 其它复合系统

当系统中存在既有透射又有反射作用的平面屏时, (4.10) 式便不适用。下例表明, 通

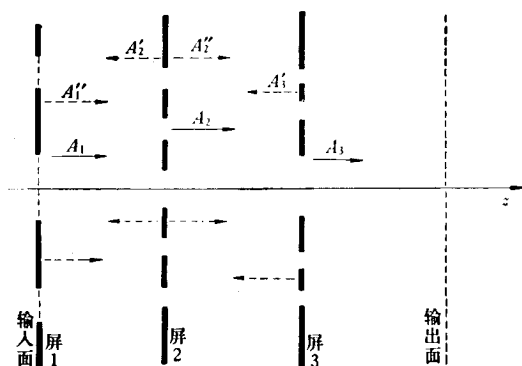


图3 既有反射部份又有透光部份的平面屏系统

过具体分析,任何平面屏系统的总的光传播矩阵,都可应用矩阵代数由各平面屏(或屏上各单孔)的作用矩阵求出。

为简单起见,讨论由三个既含有反射部份又含透射开孔的平面屏组成的系统(图3)。以 A_i , A_i' , A_i'' 表第 i 个平面屏的透射与左、右表面的反射矩阵;输入面同为第 i 屏的平面;输出面依次为第 $i+1$ 、第 $i-1$ 、第 $i+1$ 屏的平面。若可略去多于二次的反射作用(假设平面屏反射系数较小),则不难证明,整个系统的光传播矩阵为

$$A = A_3[A_2 + A_2A_1'A_2' + A_2'A_3A_2 + A_2A_1'A_2A_3A_2]A_1. \quad (4.11)$$

注意:据(4.8)–(4.11)式,复合系统作用矩阵的阶数一般不超过组成它的各基本元件的作用矩阵的最高阶数。这是以文献[8]为基础的较普遍的标量波传播矩阵理论的重要优点之一。同时概括本文第三、四节的讨论,可以看出:任何平面屏和平面屏系统的作用矩阵,都确实与输入、输出面上的光场矢量无关而只是平面屏和系统本身性质的表征。由于(4.8)–(4.11)式是较简单的代数关系,我们就较易估量与分析系统中各基本元件的性质对整个作用矩阵的影响。

作用矩阵需截取为多少阶?误差上限如何确定?作为方法的示例,我们将在附录中给出最基本的共轴圆孔衍射矩阵的有关讨论。

五、例子——轴对称开放式光学(无源)谐振腔中振荡模的矩阵方程

本节目的仅在于具体说明本文方法应如何应用,并说明它较已有方法的某些优点。

已知光学谐振腔与透镜波导光学等价,如图4所示^[9]。这样无源腔或者增益物质可视为平面屏的有源腔,便都可作为本文所讨论的“平面屏系统”来讨论。

如图4所示,谐振腔反射镜面 A , B , A 分别与透镜波导中面 1, 3, 5 相当。设选 $u_0(\xi_1^i, z_0)$ 为面 1 参照光场时,图 4 中面 i 上的场分布用 $x_i^{(sl)}$ 表示——设谐振腔具理想轴对称性,据第二节,可把各面上光场的 sl 不同的各个傅里叶成份分开来讨论。设 $\{A_i^{(sl)}\}$, $\{A_i^{(sl)}\}$, $\{A_i^{(sl)}\}$ 分别表示由面 1 上光阑与平面屏系统 $fgde$ 组成的复合系统、透镜 L_1 、面 3 上开孔与系统 $edgf$ 组成的复合系统三者的作用矩阵。它们的输入、输出面依次为面 1、面 2;面 2、面 3(对透镜 L_2)或面 4、面 5(透镜 L_1);面 3、面 4。若面 5 上参照光场参数与

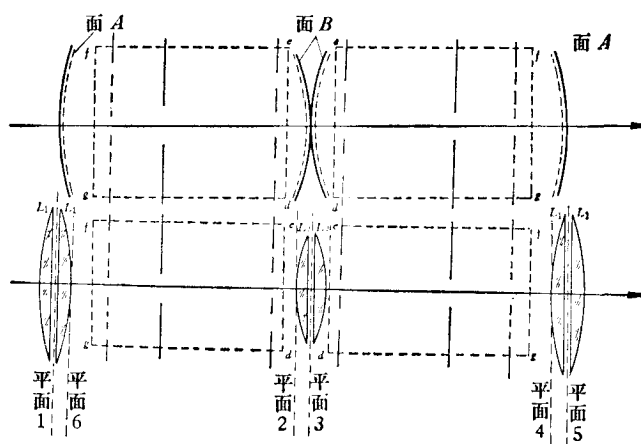


图 4 光学谐振腔(无源)与等价透镜波导结构示意图

面 1 的不一致(如非稳腔情形), 我们便引入变换矩阵 $\{A_r^{(sl)}\}$, 使 $x_5^{(sl)}$ 也是用与面 1 上相同参数的参照光场描述. 于是据第四节得到

$$x_5^{(sl)} = \{A_r^{(sl)}\} x_1^{(sl)}, \quad (5.1)$$

$\{A_r^{(sl)}\}$ 称为谐振腔光传播矩阵,

$$\{A_r^{(sl)}\} = \{A_r^{(sl)}\} \{A_{L_1}^{(sl)}\} \{A_{L_2}^{(sl)}\} \{A_{L_3}^{(sl)}\} \{A_{L_4}^{(sl)}\}. \quad (5.2)$$

于是便可根据振荡模性质得出谐振腔(透镜波导)中振荡模的矩阵方程. 它本质上与 Fox 和 Li 得出的积分方程等效, 但矩阵方程中略去了与参照光场相联系的高斯光束轴上点的位相变化. 因此, 由两种方程求出的模每穿透谐振腔一次的相移, 其间可能差一常数(对一定几何结构的腔). 这个常数显然不关重要. 该矩阵方程为

$$x_5^{(sl)} = \gamma x_1^{(sl)} = \{A_r^{(sl)}\} x_1^{(sl)}, \quad (5.3)$$

$\{A_r^{(sl)}\}$ 不难由本文方法求出. 求得 $x_1^{(sl)}$, 便可由

$$x_6^{(sl)} = \{A_{L_1}^{(sl)}\} x_1^{(sl)} \quad (5.4)$$

求得面 6 上场分布, 从而利用平移矩阵 $\{A_\infty^{(sl)}\}$ 求得面 6 后自由空间中距离面 6 为 z' 的平面上的场分布

$$x_{z'}^{(sl)} = \{A_\infty^{(sl)}(z')\} x_6^{(sl)}. \quad (5.5)$$

还可把面 6 上振荡模场表示式

$$x_6^{(sl)} = [\alpha_{6,0}^{(sl)}, \alpha_{6,1}^{(sl)}, \dots, \alpha_{6,n}^{(sl)}, \dots] \quad (5.6)$$

用波动方程的已知解 $F_{lp}(\rho, \varphi, z_6)$ (文献[8]中(2.16)式, 亦即文献[2]中(35)式)的线性叠加来表示. 设 $\phi_{ln}(\xi_6, z_6)e^{isl\varphi}$ 表示面 6 上元模场. 令

$$\sum_{n=0}^N \alpha_{6,n}^{(sl)} \phi_{ln}(\xi_6, z_6) e^{isl\varphi} = \sum_{p=0}^N \beta_p^{(sl)} F_{lp}(\rho, \varphi, z_6), \quad (5.7)$$

便可求出常系数 $\beta_p^{(sl)}$. 因 $\{A_r^{(sl)}\}$ 实际上与 s 无关, 故 $\alpha_{6,n}^{(sl)}$, $\beta_p^{(sl)}$ 均应与 s 无关. 上式中 N 表示 $\{A_r^{(sl)}\}$ 需截取的阶数. 由(5.7)式解得

$$\begin{aligned} \beta_p^{(sl)} = \beta_p^{(l)} &= (-1)^p \exp\{j(2p+l)\text{tg}^{-1}(\lambda z_6/\pi w_{60}^2)\} \\ &\times \sum_{n=p}^N \alpha_{6,n}^{(sl)} \frac{n! \sqrt{2\pi(n+l/2)}}{\Gamma(n+l/2+1)} \left(\frac{w_6^2}{2q_6}\right)^{n+1/2} \binom{n+l}{n-p}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

上式中 q_6, w_6, w_{60} 以及 z_6 分别为面 6 上参照光场参数 q, w, w_0 及相应高斯光束腰部至面 6 距离。这样便可求出用波动方程已知解 $F_{lp}(\rho, \varphi, z)$ 的线性叠加表示的面 6 后自由空间中的行波场。

把以上结果与已有的相应积分方程^[14]对比,本文矩阵方程具有如下明显的实际优点:

1) 因 $\{A_p^{(l)}\}$ 可截取为有穷阶,故矩阵方程 (5.3) 式容易求解,可一次求得 $|\gamma|$ 不很近于 1 的各阶横模 (l 相同而 p 不同)^[15]。但积分方程一般求解较困难^[2,14]。用迭代法通常只宜于求基横模^[16]。而对于把积分方程化为代数方程组 (展开积分核) 的方法^[17,18], 均未能严格证明所得矩阵可截取为多少阶;故在文献 [16,19,20] 中已指出某些情况下此类工作精度较低后,我们认为,若其结果不为迭代法结果所验证,则精度便成问题 (包括稳定腔高阶模)。事实上 1970 年后此类工作已极少出现。而 (5.3) 式却可求出截取为有穷阶后的误差上限¹⁾,且所需阶数并不很高^[19]。因此不存在这一问题。

2) 本文方法对非稳腔与非对称腔显然一样有效。

3) 无论图 4 中平面屏系统 $edfg$ 如何复杂,其作用矩阵均只是一组有穷个复数,不增加求解矩阵方程 (5.3) 式的困难,故本文方法可用于实际计算含有复杂平面屏系统的谐振腔横模场分布。而已有积分方程却往往较为困难。

4) 较便于由 (5.8) 式求行波场。此外,本文 (5.2) 式及第四节结果,为分析各元件对整个谐振腔性质的影响,提供了现实的可能。还使人们有可能预先规定谐振腔光传播矩阵的各种性质,用求解代数方程组或试探、拚凑的办法,得出所需结构。这些都是很有兴趣的问题,然而在已有理论中显然都是较为困难的。

5) 据 Fox 和 Li 的积分方程较难考虑棒状激光物质 (或放电管内) 中吸收、散射以及侧界面的反射等作用对传播模的影响。但是,据文献 [8],这些作用也可用一矩阵表征 (线性光学范围内),这个作用矩阵可由实验方法测得。若已知这个矩阵,我们就不难由矩阵代数求得该作用与平面屏系统所共同决定的无源腔中更严格的传播矩阵,以及这种腔中的传播模。从而为研究这些作用的影响提供某种可能。积分方程则较难进一步考虑其它作用影响。

本文提出的矩阵理论除了以上指出的许多重要优点之外,还具有一些别的优点,例如文献 [8] 中所提及的,这种理论在讨论复波场成像方面的可能应用等。我们看到,一个标量波传播的较为普遍的矩阵理论,确实有可能解决一些现有理论实际上较难解决的问题,从而有可能得到一些新的结果。

本文曾得到高兆兰教授的宝贵支持,李华钟、郭硕鸿教授的一些宝贵意见,本校数学系马汝念副教授、黎百恬老师的某些帮助,特此致谢。

附 录

证明 (3.18) 式可简化为 (当 $\tilde{C}_0 = 1$)

1) 作者已可具体证明: 把本征方程 (5.3) 式截取为有穷阶时,本征值 γ 的误差 $|\Delta\gamma|$ 、场分布矢量误差的范数 $\|\Delta x\|$ 以及开孔内相对场分布误差 $|\Delta u|$ 的上限,当本文附录中求得的 δ_1, δ_2 趋于零时均趋于零。从而可确定所需阶数。上述证明是在普遍情况下给出的。

$$x_N^{(t)'} = \{A_N^{(t)}\} x_N^{(t)}, \quad (\text{A.1})$$

并求出其误差上限 δ . 上式中

$$\{A_N^{(t)}\}_{mn} = \begin{cases} \{A^{(t)}\}_{mn} & \text{当 } m, n \leq N; \\ 0 & \text{当 } m, n > N. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$x_N^{(t)} = [\alpha_0^{(t)}, \alpha_1^{(t)}, \alpha_2^{(t)}, \dots, \alpha_N^{(t)}, 0, 0, 0, \dots], \quad (\text{A.3})$$

$$x_N^{(t)'} = [\beta_0^{(t)}, \beta_1^{(t)}, \beta_2^{(t)}, \dots, \beta_N^{(t)}, 0, 0, 0, \dots]. \quad (\text{A.4})$$

为此只须求出文献[8]中 δ_1 与 δ_2 便可. 据文献[8]

$$\delta_1 = \tilde{\rho}(\bar{A}^{(t)} Y_N^{(t)}, \bar{A}^{(t)} Y_N^{(t)}) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{mN} |\phi_{lm}|, \quad (\text{A.5})$$

其中

$$\delta_{mN} = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} A_{mn}^{(t)} \alpha_n^{(t)} \right|, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta_2 = \tilde{\rho}(\bar{A}^{(t)} Y_N^{(t)}, \bar{A}_N^{(t)} y_N^{(t)}) \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} |\beta_m^{(t)} \phi_{lm}|. \quad (\text{A.7})$$

为求 δ_1, δ_2 , 需先求 $|L_m^{(t)}(t)|$ 的上限. 其中 t 可为任意复数. 为此令

$$F_\nu = \binom{l+m}{m-\nu} \frac{t^\nu}{\nu!}, \quad (\text{A.8})$$

$$F_{\nu_0} = F_\nu|_{\max} \quad (0 \leq \nu \leq m). \quad (\text{A.9})$$

则应有

$$|L_m^{(t)}(t)| \leq F_{\nu_0}^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

由此求得

当

$$\begin{aligned} m &\geq e^t |t|, \quad m \geq el, \\ |L_m^{(t)}(t)| &\leq m^{l/2} |t|^{-l/2} e^m. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

引入量

$$\delta_N^{(t)} = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n^{(t)} \frac{\sqrt{2\pi(n+l/2)}}{\Gamma(n+l/2+1)} t^{n+l/2} e^{-t} \right|_{\max}, \quad |t| \leq \left| \frac{a^2}{q_0} \right|. \quad (\text{A.12})$$

为确定起见, 对于绝大多数实际情况, 可取

$$\text{当 } n \geq N+1, \quad \alpha_n^{(t)} \leq [\mathcal{K}^{(t)}]^n, \quad (\text{A.14})$$

其中 $\mathcal{K}^{(t)}$ 为某一正的实常数. 便求得

$$\delta_N^{(t)} \leq e^{-a^2/w_a^2} \left[\frac{e a^2 \mathcal{K}}{(N+l/2+1) |q_0'|} \right]^{N+l/2+1} \left[1 - \frac{e a^2 \mathcal{K}^{(t)}}{(N+l/2+1) |q_0'|} \right]. \quad (\text{A.15})$$

而

$$\delta_{mN} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(m+l/2)}} \frac{a^2}{w_0 w_a} \left| \frac{\tilde{q}}{q_K} \right|^{m+l/2} e^m \delta_N^{(t)}. \quad (\text{A.16})$$

同时可求得

$$|\beta_m^{(t)}| \leq \frac{a^2}{w_0 w_a} \left| \frac{\tilde{q}}{q_K} \right|^{m+l/2} e^m |f_{st}|_{\max} \quad \text{当 } n \geq N+1, \quad (\text{A.17})$$

其中圆孔中场傅里叶成份 f_{st} 的绝对值极大值可取为 1. 由此顺便得到 $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(t)}$ 绝对收敛条件为

$$|q_K| > e |\tilde{q}| \quad (\text{A.18})$$

即

$$1 + \left(\frac{k \tilde{w}^2}{2\tilde{R}} \right)^2 > e^2 \left[1 + \left(\frac{k \tilde{w}^2}{2\tilde{R}} \right)^2 \left(\frac{\tilde{R} - z'}{z'} \right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

1) 对于某些很特殊情形, 此式应写为 $|L_m^{(t)}(t)| \leq m F_{\nu_0}$. 但这并不影响最后结果.

显然,若适当选择参照光场性质,便可使 $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(i)}$ 绝对收敛. 于是,不管 $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(i)}$ 是否收敛,最后均可得到

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2, \quad (\text{A.20})$$

$$\delta_1 \leq \delta_N^{(i)} \frac{a^2}{w_0 w_s} e^{r^2(e/|q_K| - 1/\tilde{w}^2)}, \quad (\text{A.21})$$

$$\delta_2 \leq \frac{a^2}{w_0 w_s} \left[\frac{e^2 r^2 / |q_K|}{N + l/2 + 1} \right]^{N+l/2+1} \left[1 - \frac{e^2 r^2 / |q_K|}{N + l/2 + 1} \right]^{-1} e^{-r^2/\tilde{w}^2}, \quad (\text{A.22})$$

其中 r 为须讨论衍射场 ($z = z_0 + z'$ 平面上) 各点至轴的最大距离. 由于取 $|f_{ii}| = 1$, 故 δ 为相对误差, 显然, 据 (15), (20)–(22) 式, 当 N 充分大, 一般取

$$N \geq \frac{2e^2 r^2}{|q_K|}, \frac{e^2 a^2}{|q_0|} \mathcal{K}^{(i)} \quad (\text{A.23})$$

已可. 当然实际所需 N 往往可比 (23) 式确定的小得多, δ 也比 (20)–(22) 式确定的小得多.

最后指出, 利用以上结果还可具体证明: 线性算子 $\{\bar{A}^{(i)}\}$ 连续有界, 并且

$$\{\bar{A}_N^{(i)}\} \Rightarrow \{\bar{A}^{(i)}\}. \quad (\text{A.24})$$

因此, 由于 (3.18) 式只是

$$Y^{(i)} = \{\bar{A}^{(i)}\} Y^{(i)} \quad (\text{A.25})$$

的简写^[8], 故 $\{\bar{A}^{(i)}\}$ 总可截取为有穷阶. 对于 $\bar{A}^{(i)'} - \bar{A}^{(i)}$, $\{\bar{A}^{(i)}\}$ 以及 $\bar{C}_{ii} \neq 1$ 情形的证明方法类同. 由于场显异于零区域有界 (即 a, r 有界), 并且 $\{\bar{A}_N^{(i)}\}$, $\{\bar{A}_s^{(i)}\}$ 可视为 $\{\bar{A}^{(i)}\}$ 的特殊情形, 故本文中所有作用矩阵均可截取为有穷阶, 并求得误差上限. 其中平移矩阵最好在它可近似简化为只有对角线附近元素显异于零时使用.

参 考 文 献

- [1] J. A. Arnaud, "Progress in Optics", edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, London, Vol. XI, (1973), pp. 247–304.
- [2] H. Kogelnik & T. Li, *Applied Optics*, 5(1966), 1550.
- [3] S. A. Collins Jr., *J. Opt. Soc. Amer.*, 60(1970), 1169.
- [4] E. O. 布赖姆著, 柳群译, 快速富里叶变换, 上海科学技术出版社, (1979).
- [5] M. Novotný, *Opt. Acta*, 24(1977), 551.
- [6] J. R. Fox, *Opt. Acta*, 27(1980), 289.
- [7] U. Langlein & F. Leder, *Opt. Acta*, 27(1980), 171.
- [8] 李先枢, 物理学报, 30(1981), 503.
- [9] D. Marcuse, "Light Transmission Optics", Van Nostrand Reinhold Company, New York, (1972).
- [10] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).
- [11] E. W. Marchand & E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, 54(1964), 587.
- [12] M. Born & E. Wolf, "Principles of Optics", (5th edition), Pergamon Press, New York, (1975), Chapter VIII.
- [13] G. Sansone, "Orthogonal Functions", Interscience Publishers, INC. New York, (1959).
- [14] A. G. Fox & T. Li, *Bell Syst. Tech. J.*, 40(1961), 450.
- [15] 李先枢等, 中山大学学报, 自然科学版, (4)(1980), 121.
- [16] L. Ronchi, "Laser Handbook", edited by F. T. Arecchi & E. O. Schulz-Dubois, North-Holland, (1972), A4, p. 151.
- [17] D. E. McCumber, *Bell Syst. Tech. J.*, 44(1965), 333.
- [18] J. S. Heurtley & W. Streifer, *J. Opt. Soc. Amer.*, 55(1965), 1472.
- [19] S. P. Morgan & T. Li, *J. Opt. Soc. Amer.*, 56(1966), 1136.
- [20] L. Ronchi, *Applied Optics*, 9(1970), 733.

A MATRIX THEORY FOR THE PROPAGATION OF A SCALAR WAVE IN A SYSTEM CONSISTING OF PLANE SCREENS (IN CYLINDRICAL COORDINATES)

LI XIAN-SHU

(*Department of Physics, Zhongshan University*)

ABSTRACT

In this paper, a matrix theory for the propagation of a scalar wave in a system consisting of plane screens (in cylindrical coordinates) is proposed on the basis of [8]. The action matrices characterizing the diffraction by a plane filter close to a thin lens, the phase transform action of a lens, and the effect of a piece of free space are given. The diffraction by a common aperture in an opaque screen, the action of a reflection plane screen, the interference produced by a plane screen and so on, are naturally taken into account. The transform matrix describing the effect of changing the reference light field on the field distribution vector, and the method to write the light propagation matrices of various systems consisting of these plane screens are also given. But the action of a scattering screen has not been considered.

The method to solve for the super limit of the error which results from truncating the action matrix to finite order is contained in the appendix of this paper.

On account of the coordinates used, the matrix theory is mainly suited for systems with ideally axial symmetry. The main significance of this matrix theory is that some problems of light propagation in the system above mentioned, which is rather difficult to treat in practice by means of the previous theory, can be treated rather conveniently by virtue of the present theory.

The theory is only valid for systems in which each plane screen is perpendicular to the propagation axis, and the diffraction formula and the approximate conditions presented in section (2) of this paper are suited for the diffraction by each plane screen.

As an example of application of this theory, the matrix equation of the mode in optical resonator (passive) is obtained and discussed in the section (5) of this paper. It is compared with the well known integral equations obtained previously by Fox and Li. It is shown that the matrix equation has some important advantages of practical value.