

利用单个全息透镜实现光学变换的理论

杨 国 桢

(中国科学院物理研究所)

1981 年 3 月 2 日收到

提 要

在离散取样情形下,证明了利用单个全息透镜所组成的光学系统能够实现任意给定的线性变换;给出了为实现给定变换而设计全息透镜振幅和相位分布的方法;并以三种不同序的八维 Walsh 变换为例,得到了实现这些变换的全息透镜的振幅和相位分布。

一、引 言

用光学方法实现图象的傅里叶变换已成为目前光学信息处理的主要基础,在此基础上发展了近代光学的一个重要分支——傅里叶光学。如何用光学方法实现包括傅里叶变换在内的更为一般的线性变换问题,一直是近年来许多科学工作者致力于解决的重要课题之一。

我们曾提出了用多个纯相位型的全息透镜组构成的光学系统实现给定变换的理论^[1,2],又提出了用多个振幅-相位型全息透镜实现光学变换的一般理论^[3]。这些理论已被低维的 Walsh 变换实验所初步证实^[4,5]。从理论上讲,任意给定的线性变换均能够用足够多的全息透镜构成的光学系统充分精确地实现它^[3];但是由于全息透镜组成的光学系统的衍射损耗和相干光散斑噪音等因素的限制,实际上制作超过由十个全息透镜组成的光学系统并保持良好的信噪比是困难的。因此,能否利用由较少或单个全息透镜组成的光学系统实现给定光学变换是一个值得研究的问题。

通常的一幅图象都可以在空间取样意义下来描述,即把一幅图象看作由一定的离散的点组成。那末,为了实现给定的变换,能不能通过加密全息透镜的取样点数,使之远大于输出和输入平面的取样点数,以达到减少全息透镜数目的目的呢? 回答是肯定的。在本文中,我们将提出一种利用单个全息透镜实现光学变换的理论;在取样的意义下,证明了任意给定的线性变换均能用单个全息透镜所组成的光学系统充分精确地实现它,并给出了求解全息透镜振幅-相位分布的方法;最后,我们以实现三种不同序的八维 Walsh 变换为例,设计了全息透镜的振幅和相位分布,检验了理论的正确性。

在本文中,我们只讨论一维情况,所有结果是不难直接推广到二维情况的。

二、基本方程

本节中,将导出全息透镜加密取样点数目后的振幅和相位分布所满足的基本方程。

为了描述的普遍起见,我们先讨论 n 个全息透镜组成的光学系统的情形. 一个典型的光学系统如图 1 所示,输入平面为 P_1 , 输出平面记作 P_2 . 设全息透镜的数目为 n , 它们的振幅-相位分布记作

$$H_m(x^{(m)}) = \rho_m(x^{(m)})e^{i\phi_m(x^{(m)})} \quad (m = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (1)$$

$x^{(m)}$ 是第 m 个全息透镜的坐标, 它们彼此之间的距离依次地记作 l_m ; 输入平面图象的取样点数为 N_1 , 输出平面图象的取样点数为 N_2 , 全息透镜的取样点数为 N . 图 1 所示的光学系统实现的线性变换为^[1]

$$\tilde{G} = G_0(l_n) \cdot H_n \cdot G_0(l_{n-1}) \cdots G_0(l_k) \cdot H_k \cdot G_0(l_{k-1}) \cdots G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0), \quad (2)$$

其中 $G_0(l)$ 表示光波在距离为 l 的自由传播中所实现的

变换, 它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出, 详见文献 [1] 的 (6) 至 (8) 式. 在傍轴近似和离散取样情况下, 自由传播矩阵 G_0 可表成

$$G_0(m', m) = K \cdot \exp\{i\pi m^2/(M^2 L)\} \cdot \exp\{-2\pi i m m'/(M M' \sqrt{L L'})\} \cdot \exp\{i\pi m'^2/(M'^2 L')\}, \quad (3)$$

式中

$$L = l\lambda/x_m^2, \quad L' = l\lambda/x_m'^2, \quad (m = 1, 2, \dots, N, m' = 1, 2, \dots, N'). \quad (4)$$

这里 x_m 和 M 是自由传播矩阵在输入端的孔径大小和取样点数目, x'_m 和 M' 是相应的输出端的孔径大小和取样点数目, K 为归一化常数, l 为传播距离, λ 为光波波长. 就图 1 所示的光学系统而言, 对于从输入平面 P_1 到第一个全息透镜平面的自由传播矩阵 $G_0(l_0)$, 有 $M = N_1$ 和 $M' = N$; 对于从最后一个全息透镜到输出平面 P_2 的自由传播矩阵 $G_0(l_n)$, 有 $M = N$ 和 $M' = N_2$; 对于全息透镜之间的自由传播矩阵 $G_0(l_m)$ ($m = 0, n$), 有 $M = N$, $M' = N$.

如何设计 $\tilde{G}$ 使之最佳地逼近给定的线性变换 G ? 在文献 [1] 中, 我们已经提出一种迭代求解方法. 按照该方法, 在运算的每一个步骤上, 只有一个全息透镜是真正的变量. 例如, 设在运算的某一个步骤上, 全息透镜 H_m 是变量, 其余的全息透镜是已知的. 通过讨论变动第 m 个全息透镜 H_m 使得 $\tilde{G}$ 最佳逼近 G 的条件, 我们曾得到 H_m 必须满足的方程为^[3]

$$\sum_{l=1}^N A_{kl} B_{lk} H_{ll} = C_{kk} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (5)$$

这里 A_{kl} , B_{kl} 和 C_{kk} 为矩阵 A , B 和 C 相应的矩阵元. 矩阵 A , B 和 C 由下式给出:

$$\begin{aligned} A &= G_0^+(l_k) \cdot H_{k+1}^+ \cdot G_0^+(l_{k+1}) \cdots G_0^+(l_{n-1}) \cdot H_n^+ \cdot G_0^+(l_n) \cdot G_0(l_n) \\ &\quad \cdot H_n \cdot G_0(l_{n-1}) \cdots G_0(l_{k+1}) \cdot H_{k+1} \cdot G_0(l_k), \\ B &= G_0(l_{k-1}) \cdot H_{k-1} \cdot G_0(l_{k-2}) \cdots G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0) \\ &\quad \cdot G_0^+(l_0) \cdot H_1^+ \cdot G_0^+(l_1) \cdots G_0^+(l_{k-2}) \cdot H_{k-1}^+ \cdot G_0^+(l_{k-1}), \\ C &= G_0^+(l_k) \cdot H_{k+1}^+ \cdot G_0^+(l_{k+1}) \cdots G_0^+(l_{n-1}) \cdot H_n^+ \cdot G_0^+(l_n) \\ &\quad \cdot G \cdot G_0^+(l_0) \cdot H_1^+ \cdot G_0^+(l_1) \cdots G_0^+(l_{k-2}) \cdot H_{k-1}^+ \cdot G_0^+(l_{k-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

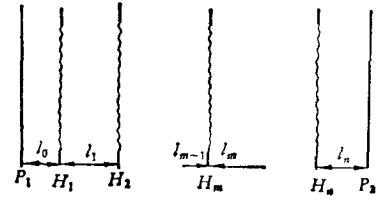


图 1

从上式不难看出 A 和 B 是厄密矩阵. 值得注意的是, 由于输入和输出平面图象的取样点数目与全息透镜平面的取样点数目是不同的, 即 $N_1 \neq N$ 和 $N_2 \neq N$, (2) 式和 (6) 式中的 $G_0(l_0)$ 将是 N 行 N_1 列的矩阵, $G_0(l_n)$ 是 N_2 行 N 列的矩阵. $G_0(l_0) \cdot G_0^+(l_0)$ 和 $G_0^+(l_n) \cdot G_0(l_n)$ 是 $N \times N$ 的方阵, 一般说来它们不再是单位矩阵.

由单个全息透镜组成的光学系统, 如图 2 所示. 这时矩阵 A , B 和 C 的形式为

$$\begin{aligned} A &= G_0^+(l_1) \cdot G_0(l_1), \\ B &= G_0(l_0) \cdot G_0^+(l_0), \\ C &= G_0^+(l_1) \cdot G \cdot G_0^+(l_0). \end{aligned} \quad (7)$$

为了后面讨论的需要, 引入矩阵 U , 它的矩阵元定义为

$$\begin{aligned} U_{l(i,j)} &= (G_0(l_1))_{il} (G_0(l_0))_{lj} \\ (l &= 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, N_2; \\ j &= 1, 2, \dots, N_1). \end{aligned} \quad (8)$$

图 2

(8) 式中符号 (i, j) 的意义为 $(i, j) = (i-1)N_1 + j$;

U 为 N 行 $(N_1 \cdot N_2)$ 列的矩阵, 其共轭矩阵为

$$U_{(i,j)l}^+ = U_{l(i,j)}^* = (G_0^*(l_1))_{il} (G_0^*(l_0))_{lj}. \quad (9)$$

把 (7) 式代入方程 (5), 利用 (8) 和 (9) 式, 方程 (5) 可改写成

$$\sum_{l=1}^N H_{ll} \left\{ \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} U_{l(i,j)} U_{(i,j)k}^+ \right\} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij} U_{(i,j)k}^+. \quad (10)$$

现在讨论矩阵 U 为正矩阵的条件. 从 (8), (9) 和 (3) 式不难得到 U 的具体形式为

$$\begin{aligned} U_{l(i,j)} &= K_1 \cdot \exp \{ i\pi [i^2/(N_2^2 L_2') + j^2/(N_1^2 L_1')] \} \\ &\cdot \exp \{ -2\pi i l [i/(NN_2 \sqrt{L_2 L_2'}) + j/(NN_1 \sqrt{L_1 L_1'})] \} \\ &\cdot \exp \left\{ i\pi \left[l^2 \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{1}{L_2} \right) / N^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式中 K_1 为归一化常数, 以及

$$\begin{aligned} L_1 &= l_0 \lambda / x_{m_1}^2, \quad L_1' = l_0 \lambda / x_m^2, \quad L_2 = l_1 \lambda / x_{m_2}^2, \quad L_2' = l_1 \lambda / x_m^2, \\ l &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N_1, \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (12)$$

从 (11) 式和 (9) 式可得

$$\begin{aligned} (UU^+)_{lk} &= \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} U_{l(i,j)} U_{(i,j)k}^+ \\ &= K_1^2 \cdot P_1 \cdot \frac{\sin \pi N_2 (l-k) / (NN_2 \sqrt{L_2 L_2'})}{\sin \pi (l-k) / (NN_2 \sqrt{L_2 L_2'})} \\ &\cdot \frac{\sin \pi N_1 (l-k) / (NN_1 \sqrt{L_1 L_1'})}{\sin \pi (l-k) / (NN_1 \sqrt{L_1 L_1'})}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中 P_1 为相位因子, 其具体形式为

$$\begin{aligned} P_1 &= \exp \left\{ i\pi (l^2 - k^2) \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{1}{L_2} \right) / N^2 \right\} \\ &\cdot \exp \{ -\pi i (N_2 + 1) (l-k) / (NN_2 \sqrt{L_2 L_2'}) \} \end{aligned}$$

$$\cdot \exp\{-\pi i(N_1 + 1)(l - k)/(NN_1\sqrt{L_1L_1'})\}. \quad (14)$$

从(13)式不难看出,如果满足下列条件:

$$\begin{aligned} N\sqrt{L_2L_2'} &= n_1^{-1} \\ N\sqrt{L_1L_1'}/N_2 &= n_2^{-1}, \\ N_1\sqrt{L_1L_1'} &\geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 n_1 和 n_2 为正整数,于是 $(UU^+)_{lk}$ 可表示成 δ_{lk} (克朗内克符号)的形式。为了简明起见,取

$$n_1 = n_2 = 1, \quad N_1\sqrt{L_1L_1'} = 1. \quad (16)$$

于是条件(15)式简化成

$$N\sqrt{L_2L_2'} = 1, \quad (17a)$$

$$N_1\sqrt{L_1L_1'} = 1, \quad (17b)$$

$$N = N_1N_2; \quad (17c)$$

(13)式成为

$$(UU^+)_{lk} = K_1^2 N_1 N_2 \delta_{lk}. \quad (18)$$

考虑到归一化条件,定得归一化常数

$$K_1 = 1/\sqrt{N_1N_2}. \quad (19)$$

把(19)式代入(18)式得

$$(UU^+)_{lk} = \delta_{lk}. \quad (20)$$

我们再考虑 U^+U 的表示形式。从(11)式和(9)式可得

$$\begin{aligned} (U^+U)_{(i',j')(i,j)} &= \sum_{k=1}^N U_{(i',j')k}^+ U_{k(i,j)} \\ &= K_1^2 \cdot P_2 \frac{\sin \pi N[(i - i')/(NN_2\sqrt{L_2L_2'}) + (j - j')/(NN_1\sqrt{L_1L_1'})]}{\sin \pi[(i - i')/(NN_2\sqrt{L_2L_2'}) + (j - j')/(NN_1\sqrt{L_1L_1'})]}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中相位因子 P_2 为

$$\begin{aligned} P_2 &= \exp\{i\pi[(i^2 - i'^2)/(N_2^2L_2') + (j^2 - j'^2)/(N_1^2L_1')]\} \\ &\quad \cdot \exp\{-\pi i(N + 1)[(i - i')/(NN_2\sqrt{L_2L_2'}) + (j - j')/(NN_1\sqrt{L_1L_1'})]\}. \end{aligned} \quad (22)$$

利用条件(17)和(19),(21)式成为

$$(U^+U)_{(i',j')(i,j)} = \delta_{ii'}\delta_{jj'}. \quad (23)$$

通过以上的推导,说明了矩阵 U 成为么正矩阵的条件是存在的。如果满足条件(17)式,矩阵 U 便是么正矩阵,即

$$UU^+ = U^+U = I, \quad (24)$$

式中 I 为单位矩阵。

利用矩阵 U 的么正性,方程(10)便简化成为

$$H_{kk} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij} U_{(i,j)k}^+. \quad (25)$$

再把(25)式乘以 $U_{k(i',j')}$, 并对 k 求和,使得

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^N H_{kk} U_{k(i,j)}. \quad (26)$$

利用(8)式,(26)式可表示成为

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^N \{G_0(l_1)\}_{ik} \cdot H_{kk} \cdot \{G_0(l_0)\}_{kj} = \{G_0(l_1) \cdot H \cdot G_0(l_0)\}_{ij}. \quad (27)$$

方程(25)–(27)是单个全息透镜实现光学变换的基本方程. 从这些方程中,可以得到如下结论:(1)对于给定变换 G_{ij} ,借助于(25)式,能够直接求得全息透镜的振幅和相位分布 H_{kk} ; (2)采用(25)式给出的 H_{kk} ,将导致(27)式成立,也就是从(25)式求得的全息透镜 H 的振幅和相位分布在取样点上可以精确地实现 G . 从而,在取样意义下证明了对于任意给定的线性变换均能用单个全息透镜所组成的光学系统充分精确地实现它,并且给出了设计全息透镜振幅和相位分布的方法.

应该指出,对于无增益的全息透镜系统,一定有 $|H_{kk}| \leq 1$ ($k = 1, 2, \dots, N$). 在利用(25)式给出的 H_{kk} 时,有可能出现这样的情况: $|H_{kk}|$ 中有一个或几个元素的取值大于1. 为了消除这种形式上的矛盾,可以令

$$E = \max_k (|H_{kk}|), \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

并且将 E 作为归一化常数,求得新的全息透镜的分布

$$H'_{kk} = H_{kk}/E,$$

它是无增益的全息透镜系统中,考虑归一化后的振幅和相位分布. 引进归一化常数不会影响本文的结论,这是由于变换 G 线性地依赖于全息透镜. 归一化后的变换 G' 与 G 的关系是

$$G' = G/E.$$

这仅仅相当于光波通过此光学系统后,光能被均匀地衰减,因而 G' 与 G 在物理的实质上是等同的,用光学方法实现 G' 等价于实现了 G .

三、光学系统的实际考虑

单个全息透镜实现光学变换的基本方程(25)–(27)成立的条件为(17)式. 先分析条件(17)式的物理含义. (17c)式表明全息透镜的取样点数 N 应该等于输入平面取样点数 N_1 和输出平面取样点数 N_2 的乘积. 意味着,为了实现由 $(N_1 N_2)$ 个自由度组成的变换 G_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N_2; j = 1, 2, \dots, N_1$),必须由相同自由度的全息透镜 H_{kk} ($k = 1, 2, \dots, N$) 进行调制,在物理上这是容易理解的. 当然,条件(17c)式是实现任意变换的普遍条件;对于一个特定的变换 G 来说,全息透镜的取样点数目 N 可以小于 $N_1 N_2$, 于是对它来说条件(17c)式是充分条件而不是必要条件.

为了把条件(17a)和(17b)式与实际光学系统(图2)的参数联系起来,我们把(12)式代入条件(17a)和(17b)式,得到

$$N = x_m x_{m_2} / \lambda l_1, \quad N_1 = x_m x_{m_1} / \lambda l_0. \quad (28)$$

取样点数 N 和 N_1 给定时,光学系统可变动的参数包含 x_{m_1} , x_{m_2} , x_m , l_0 和 l_1 五个,五个变量满足两个方程——方程(28),显然存在许多解. 我们只讨论两种特殊情形. 第一种情

形,令

$$x_m = x_{m_1} = x_{m_2}, \quad (29)$$

也就是输入平面,输出平面和全息透镜三者的孔径相等,于是(28)式简化成为

$$x_m = (\lambda N_1 l_0)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 = N_1 l_0 / N. \quad (30)$$

若取 $N_1 = 8$, $N = 64$, $l_0 = 100$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,从(30)式求得

$$x_m = 2.25 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 12.5 \text{ 厘米};$$

若取 $N_1 = 128$, $N = 16384$, $l_0 = 100$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,则得

$$x_m = 9.0 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 0.78 \text{ 厘米}.$$

这样的系统在实验上是能够实现的.

第二种情形,令

$$x_m = x_{m_2} = N_2 x_{m_1}, \quad (31)$$

也就是输出平面的孔径和全息透镜的孔径相等,输入平面的孔径比它们的孔径小 N_2 倍,于是(28)式变成

$$x_m = (\lambda N l_0)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 = l_0. \quad (32)$$

若取 $N = 64$, $l_0 = 40$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,从(32)式求得

$$x_m = 4.02 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 40 \text{ 厘米};$$

若取 $N = 16384$, $l_0 = 100$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,则得

$$x_m = 101.8 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 100 \text{ 厘米}.$$

这样的系统在实验上同样是可以实现的.

对于满足(17)式的光学系统,严格地说,仅仅在其输入平面和输出平面的取样点上的光场分布满足给定变换 G 的关系.一般说来,输出平面非取样点处的光场分布可能是复杂的以及此信息是无用的,因此必须在输出平面的取样点处加一个空间滤波器,使得仅在取样点附近一个小范围内的光波才能通过,这样得到的信息才保证输入和输出满足变换 G 的关系.

从(13)和(22)式不难看出, U 成为么正矩阵的条件(17)式不是唯一的. 容易发现,与它对称的另一个条件为

$$N \sqrt{L_1 L'_1} = 1, \quad N_2 \sqrt{L_2 L'_2} = 1, \quad N = N_1 N_2; \quad (33)$$

如果满足条件(33)式,则 U 矩阵同样是么正的.

条件(33)式与实际光学系统的参数之间的关系,可通过(33)和(12)式得到

$$N = x_m x_{m_1} / \lambda l_0, \quad N_2 = x_m x_{m_2} / \lambda l_1. \quad (34)$$

与前面类似,我们也考虑两种特殊情形. 第一种情形,即满足(29)式,于是

$$x_m = (\lambda N l_0)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 = N l_0 / N_2. \quad (35)$$

若取 $N = 64$, $N_2 = 8$, $l_0 = 10$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,从(35)式求得

$$x_m = 2.01 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 80 \text{ 厘米};$$

若取 $N = 16384$, $N_2 = 128$, $l_0 = 1$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米,则得

$$x_m = 10.2 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 128 \text{ 厘米}.$$

第二种情形,取

$$x_m = N_1 x_{m_1} = N_2 x_{m_2}, \quad (36)$$

表 1

取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)	取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)
1	0.593	-0.706	33	0.991	-0.779
2	0.757	-0.195	34	0.405	0.055
3	0.605	-0.153	35	0.794	0.463
4	0.607	0.875	36	0.607	0.375
5	0.519	-0.860	37	0.065	0.643
6	0.249	0.555	38	0.821	-0.695
7	0.822	0.321	39	0.213	-0.370
8	0.607	-0.094	40	0.607	-0.094
9	0.532	-0.589	41	0.475	0.305
10	0.854	0.742	42	0.084	-0.008
11	0.566	-0.982	43	1.000	0.807
12	0.607	0.625	44	0.607	-0.875
13	0.322	0.768	45	0.441	0.270
14	0.084	-0.633	46	0.854	0.117
15	0.936	0.687	47	0.706	0.991
16	0.607	0.781	48	0.607	-0.219
17	0.243	0.758	49	0.286	-0.184
18	0.822	-0.570	50	0.249	0.680
19	0.464	-0.081	51	0.512	0.989
20	0.607	0.125	52	0.607	-0.375
21	0.760	-0.624	53	0.789	-0.377
22	0.405	0.930	54	0.757	0.680
23	0.605	0.904	55	0.623	0.061
24	0.607	-0.594	56	0.607	-0.594
25	0.820	-0.028	57	0.542	0.554
26	0.664	-0.133	58	0.545	0.117
27	0.178	0.170	59	0.350	-0.551
28	0.607	-0.625	60	0.607	-0.125
29	0.498	-0.340	61	0.963	0.838
30	0.664	0.242	62	0.545	0.992
31	0.279	0.941	63	0.145	0.189
32	0.607	-0.219	64	0.607	0.781

表 2

取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)	取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)
1	0.148	-0.788	33	1.000	0.587
2	0.499	0.867	34	0.608	0.117
3	0.671	0.190	35	0.033	0.315
4	0.556	0.875	36	0.556	0.375
5	0.043	0.287	37	0.885	0.162
6	0.499	-0.258	38	0.608	-0.508
7	0.458	-0.894	39	0.068	-0.270
8	0.556	-0.094	40	0.556	-0.094
9	0.112	0.297	41	0.449	-0.328
10	0.693	0.055	42	0.371	0.305
11	0.834	0.834	43	0.299	0.959
12	0.556	0.625	44	0.556	-0.875
13	0.287	0.368	45	0.607	-0.757
14	0.228	-0.195	46	0.752	0.555
15	0.867	-0.497	47	0.520	-0.872
16	0.556	0.281	48	0.556	-0.719
17	0.602	-0.101	49	0.812	0.274
18	0.782	0.992	50	0.077	0.242
19	0.498	0.753	51	0.451	-0.122
20	0.556	0.125	52	0.556	-0.375
21	0.657	-0.275	53	0.595	-0.400
22	0.077	0.617	54	0.782	-0.633
23	0.276	-0.582	55	0.372	0.043
24	0.556	0.406	56	0.556	0.406
25	0.397	-0.516	57	0.238	0.859
26	0.752	-0.320	58	0.228	0.930
27	0.379	0.896	59	0.801	-0.979
28	0.556	-0.625	60	0.556	-0.125
29	0.632	-0.694	61	0.226	0.181
30	0.371	0.180	62	0.693	-0.070
31	0.246	-0.684	63	0.981	0.941
32	0.556	0.281	64	0.556	-0.719

表 3

取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)	取样点 i	振 幅	相位($x\pi$)
1	0.604	0.899	33	0.604	0.774
2	0.708	-0.539	34	0.708	-0.789
3	0.561	-0.128	35	0.561	-0.503
4	0.708	0.875	36	0.708	0.375
5	0.628	0.775	37	0.628	0.150
6	0.708	-0.102	38	0.708	-0.852
7	1.000	-0.911	39	1.000	0.214
8	0.708	0.031	40	0.708	-0.969
9	0.043	-0.869	41	0.043	0.006
10	0.708	-0.727	42	0.708	0.023
11	0.780	-0.560	43	0.779	0.065
12	0.708	0.625	44	0.708	-0.875
13	0.829	0.077	45	0.829	0.452
14	0.708	-0.414	46	0.708	-0.164
15	0.798	0.717	47	0.799	0.842
16	0.708	-0.344	48	0.708	-0.344
17	0.799	0.342	49	0.799	0.217
18	0.708	0.836	50	0.708	0.586
19	0.829	0.952	51	0.829	0.577
20	0.708	0.125	52	0.708	-0.375
21	0.779	-0.435	53	0.779	0.940
22	0.708	-0.977	54	0.708	0.273
23	0.043	0.506	55	0.043	-0.369
24	0.708	-0.969	56	0.708	0.031
25	1.000	-0.286	57	1.000	0.589
26	0.708	0.148	58	0.708	0.898
27	0.628	0.650	59	0.628	-0.725
28	0.708	-0.625	60	0.708	-0.125
29	0.561	0.997	61	0.561	-0.628
30	0.708	0.211	62	0.708	0.461
31	0.604	-0.726	63	0.604	-0.601
32	0.708	0.156	64	0.708	0.156

代入(34)式得

$$x_m = (\lambda N_2 N l_0)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 = N_2 l_0. \quad (37)$$

若取 $N = 64$, $N_2 = 8$, $l_0 = 10$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米, 从(37)式求得

$$x_m = 5.69 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 80 \text{ 厘米};$$

若取 $N = 16384$, $N_2 = 128$, $l_0 = 1$ 厘米, $\lambda = 0.6328$ 微米, 则得

$$x_m = 115 \text{ 毫米}, \quad l_1 = 128 \text{ 厘米}.$$

从上述的例子可见, 满足条件(33)式的系统在实验上是可以实现的.

必须指出, 如果输入平面的取样间隔简单地取作 $\Delta x_1 = x_{m_1}/N_1$, 取样间隔之间的距离取为零, 于是从(34)式可以看出, Δx_1 大小的衍射光并不能充满整个全息透镜平面, 意味着光波不能得到整个全息透镜的调制. 同时, 全息透镜上各个取样间隔的光波却能大大地衍射出输出平面的孔径 x_{m_2} , 衍射光波的范围约为 x_{m_2} 的 N_1 倍. 为了解决这个问题, 在输入平面的孔径上应该迭加上一个如图 3 所示的振幅光栅, 光栅的取样间隔为 x_{m_1}/N_1 , 每个取样间隔上的通光孔径为 x_{m_1}/N . 这样安排以后, 在输出平面的

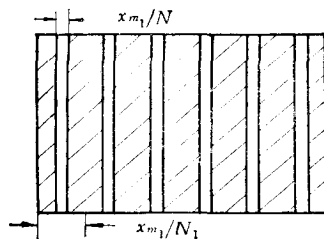


图 3

图象就是输入图象经过了变换 G 的图象.

四、实现八维 Walsh 变换的光学系统的设计

在本节中, 作为前两节发展的普遍理论的一个例子, 具体设计实现三种序的八维 Walsh 变换的全息透镜振幅和相位分布^[5]. 图 2 为光学系统示意图. 我们取下列参数: $N_1 = N_2 = 8$, $N = 64$, $L_1 = 1/N_1$, $L_2 = 1/N$, 相应的 l_1 , x_m , x_{m_1} , x_{m_2} 的数值可从(29), (30)或(36), (37)式求得. 利用(25)式, 借助于计算机, 得到了全息透镜的振幅和相位分布, 结果列在表 1—3 中. 表 1 给出了实现八维自然序 Walsh 变换的全息透镜的振幅和相位分布; 表 2 给出了实现 Walsh 序的 Walsh 变换的全息透镜的振幅和相位分布; 表 3 给出了实现光学序 Walsh 变换全息透镜的振幅和相位分布.

最后, 我们把用计算机计算得到的全息透镜的振幅和相位分布(表 1—3)代入(27)式计算得 $\tilde{G}_{ij}$; 结果表明, $\tilde{G}_{ij}$ 分别与给定的三种序的 Walsh 变换 G_{ij} 完全相同. 因而, 通过设计三种序的八维 Walsh 变换的具体例子, 验证了基本方程(25)—(27)的正确性.

参 考 文 献

- [1] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, 24(1975), 438.
- [2] 霍裕平, 物理学报, 27(1978), 487.
- [3] 杨国桢、顾本源, 物理学报, 30(1981), 414.
- [4] 杨国桢、潘少华, 物理学报, 29(1980), 1301.
- [5] 陈岩松、王玉堂、李秀英, 物理学报, 29(1980), 1307.

THEORY OF OPTICAL TRANSFORMATION BY A SINGLE HOLOGRAPHIC LENS

YANG GUO-ZHEN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is shown for the case of a discrete sample that an arbitrary transformation can be realized by an optical system composed of a single holographic lens. The design of the amplitude and phase distribution of the single holographic lens for the purpose of realizing a given transformation is given. The amplitude and phase distribution of the holographic lens for realizing the 8-sequence Walsh transformation of three different orderings are obtained.