

同步球对称静态 Yang-Mills 自对偶解和连续面分布的 'tHooft-Polyakov 磁单极

吴詠时 沈有根

(中国科学院理论物理研究所) (建设银行上海市分行)

1981 年 1 月 27 日收到

提 要

在本文中, 我们得到了 Yang-Mills 规范场的全部同步球对称静态自对偶解. 由此解我们进一步导出了磁荷连续面分布的结论.

1. 最近几年来, 规范场理论的拓扑性孤子解, 特别是 'tHooft-Polyakov 磁单极^[1]和四维欧氏空间 E^4 中的 Yang-Mills 自对偶解(瞬子)^[2-5], 引起了人们的广泛注意和研究. 但是 E^4 中静态(即与“欧氏时间”坐标 x_4 无关的)自对偶解似乎研究得还不多^[6]. 本文将给出 Yang-Mills 场(即 SU_2 规范场)的全部同步球对称静态自对偶解. 这些解依赖于两个连续参数. 在一般情形下, 这些解是有奇性的. 但是当其中一个参数取某一特殊值(即 $c_2 = 0$)时, 我们得到无奇性的孤子解. 此外, 在某些参数值($c_2 > 0$)下, 我们的解除了在三维空间的原点 $r = 0$ 处有点状奇性外, 还在某一球壳处有面奇性.

利用熟知的技巧^[7], 可从上述静态自对偶解导出在 Prasad-Sommerfeld 极限^[7]下的 'tHooft-Polyakov 磁单极解. $c_2 = 0$ 时的孤子解将导出已知的单磁荷解($g = 1/e$)^[1]; $c_2 > 0$ 时导出有奇性的单磁荷解, 而 $c_2 < 0$ 时却导致有连续面磁荷分布的奇性解(空间原点处磁荷 $g = -1/e$, 而某一球壳处的总面磁荷 $g = 2/e$), 就我们所知, 在文献中得到连续面磁荷分布, 这似乎还是第一次.

2. 考虑 $E^4(x^\mu, \mu = 1, 2, 3, 4)$ 上的 SU_2 规范场, 生成元取为 $\frac{1}{2i}\sigma_i$ (σ_i 为 Pauli 矩阵, $i = 1, 2, 3$), 相应的规范势记为 $b_\mu^i(x)$.

由文献[8]知, 静态同步球对称的 SU_2 规范势的一般形式为

$$\begin{aligned} b_i^l(x) &= \epsilon_{ilk} x^k V(r) + \delta_{il} S(r) + x^i x^l T(r), \\ b_4^l(x) &= x^l U(r), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, 相应的规范场强为

$$\begin{aligned} f_{ij}^l &= A \epsilon_{ijk} x^k x^l + B(\delta_{li} x^j - \delta_{lj} x^i) + C \epsilon_{lij}, \\ f_{4i}^l &= H x^i x^l + E \epsilon_{ilk} x^k + F \delta_{li}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $f_{\mu\nu}^l = b_{\mu,\nu}^l - b_{\nu,\mu}^l - \epsilon_{lij} b_\mu^i b_\nu^j$, 而

$$A = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + ST - V^2, \quad H = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - UV,$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} - T - VS - r^2 TV, \quad E = -US, \\ C &= -\left(2V + S^2 + r \frac{dV}{dr} + r^2 ST\right), \quad F = U(1 + r^2 V). \end{aligned} \quad (3)$$

因此自对偶方程 $f_{ik} = f_{jk}((i, j, k) \text{ 为 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换})$ 化为

$$A = H, \quad B = E, \quad C = F. \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式则得一阶拟线性方程组. 它可化为一个非线的调和方程, 方法如下^[4]: 令

$$\begin{cases} \alpha = 1 + r^2 V, & \beta = rS, \\ \varphi = S + r^2 T, & \psi = rU. \end{cases} \quad (5)$$

则方程组(4)化为

$$-\frac{d\alpha}{dr} = \phi\alpha + \varphi\beta, \quad \frac{d\beta}{dr} = \varphi\alpha - \phi\beta, \quad (6)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 - r^2 \frac{d\psi}{dr}. \quad (7)$$

再令 $\alpha = p \cos \theta$, $\beta = p \sin \theta$, 则由(6)式可得

$$\varphi = \frac{d\theta}{dr}, \quad \phi = -\frac{d}{dr} \ln p. \quad (8)$$

由(7)式可得关于 $p(r)$ 的方程

$$p^2 = 1 + r^2 \frac{d^2}{dr^2} \ln p. \quad (9)$$

通过直接的计算, 不难验证, 只要 $p(r)$ 满足方程(9), 不管 $\theta(r)$ 是什么样的任意函数, 我们总得到自对偶场方程(4)的解. 实际上, 此时有

$$\begin{aligned} A = H &= \frac{1}{r^4} (1 - p^2) + \frac{1}{r^3} \frac{dp}{dr} \cos \theta, \\ B = E &= \frac{1}{r^2} \frac{dp}{dr} \sin \theta, \\ C = F &= -\frac{1}{r} \frac{dp}{dr} \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

其实 $\theta(r)$ 的任意性是一个规范变换的自由度. 做适当的规范变换, 可令 $\theta(r) \equiv 0$.

3. 问题归结为求解方程(9), 依文献[4], 令

$$u = \ln \frac{p}{r}. \quad (11)$$

则把方程(9)化为

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = e^{2u}. \quad (12)$$

两边乘以 du/dr , 积分之可得

$$\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = e^{2u} + 2c \quad (c \text{ 为积分常数}) \quad (13)$$

再此积分即得方程(12)的通解

$$e^u = \frac{2c_1 e^{c_1(\pm r + c_2)}}{1 - e^{2c_1(\pm r + c_2)}}, \quad (14)$$

其中 $c_1 = \sqrt{2c}$, c_2 为积分常数. 因此由 (11) 式有

$$p(r) = \pm \frac{c_1 r}{\text{sh}(c_1 r - c_2)}, \quad (15)$$

其中我们已适当重新定义积分常数 c_2 . 由于 $p(r)$ 改变符号相当取 $\theta(r)$ 增加 π , 即 $\pm$ 号两解只差一规范变换, 故可只取 $+$ 号, 这样便得到最一般的同步球对称静态 SU_2 自对偶解:

$$p(r) = \frac{c_1 r}{\text{sh}(c_1 r - c_2)}, \quad (16)$$

即

$$b_i^l = \frac{c_1 r - \text{sh}(c_1 r - c_2)}{r^2 \text{sh}(c_1 r - c_2)} \varepsilon_{ilk} x^k, \quad (17)$$

$$b_4^l = \frac{1}{r^2} \{c_1 r \coth(c_1 r - c_2) - 1\} x^l. \quad (18)$$

考察这些解的奇性, 不难看出: 当且仅当 $c_2 = 0$ 时, 解 (17), (18) 才是无奇性的孤子解. 这时在 $x_4 = \text{常数}$ 的三维空间中总“能量”是有限的, 即

$$E = \frac{1}{4} \int f_{\mu\nu}^l f_{\mu\nu}^l d^3 \mathbf{x} = 4\pi c_1 \quad (19)$$

(不失一般性可取 $c_1 > 0$, 它是表征此孤子解大小的尺度参数).

当 $c_2 < 0$ 时, 解 (17), (18) 除在空间原点 $r = 0$ 处外没有奇性. 当 $c_2 > 0$ 时解 (17), (18) 除 $r = 0$ 处的点奇性外还在 $r = c_2/c_1$ 处有球壳状的面奇性.

4. 大家知道, 如果令 $b_0^l(\mathbf{x}) = Q^l(\mathbf{x})$, 则 SU_2 规范场的静态自对偶场方程, 就化为 Prasad-Sommerfeld 极限下静态 'tHooft-Polyakov 磁单极的 Bogomol'ni 方程^[7]. 因此, 我们可从 SU_2 静态自对偶解出发, 诱导出 Prasad-Sommerfeld 极限下的 'tHooft-Polyakov-Bogomol'ni 静态磁单极解.

对于上面得到的解 (17) 和 (18), 利用上述诱导程序, 我们便得到如下的同步球对称的静态 'tHooft-Polyakov 磁单极解:

$$b_i^l(\mathbf{x}) = \frac{c_1 r - \text{sh}(c_1 r - c_2)}{r^2 \text{sh}(c_1 r - c_2)} \varepsilon_{ilk} x^k, \quad (20)$$

$$b_0^l(\mathbf{x}) = 0, \quad Q^l(\mathbf{x}) = \frac{x^l}{r^2} \{c_1 r \coth(c_1 r - c_2) - 1\}. \quad (21)$$

这里 $Q^l(\mathbf{x})$ 是 Georgi-Glashow 弱电统一 $SO(3)$ 模型中的 Higgs 场. 注意: 此解是四维 Minkowski 空间中的静态磁单极解(在 Prasad-Sommerfeld 极限下).

当 $c_2 = 0$ 时, 上述解三维空间中处处无奇性, 这是熟知的单磁荷 $g = 1/e$ 的解^[1]. 当 $c_2 < 0$ 时, 这些解除了 $r = 0$ 处点奇性外没有其它奇性; 但是 Higgs 场 $Q^l(\mathbf{x})$ 在某个 $r = r_0$ 处球壳上有零点(连续分布的零点), 其中 r_0 由下述方程决定:

$$c_1 r_0 \coth(c_1 r_0 - c_2) = 1 \quad (c_2 < 0). \quad (22)$$

我们知道, Higgs 场的零点代表磁荷的位置^[9]. 因此, 当 $c_2 < 0$ 时, 我们得到的解在

$r = r_0$ 球壳上有连续分布的 'tHooft-Polyakov 磁荷. 又知道: 球 S^2 内包含的磁荷总量, 等于 $Q'(x)$ 在 S^2 上给出的到同位旋 S^2 的映射度^[9]. 考虑 $r = r_0 \pm \epsilon$ ($\epsilon > 0$) 两球面包含的磁荷值, 可知: $c_2 < 0$ 时此解在空间原点 $r = 0$ 处有磁荷 $g = -1/e$, 在 Higgs 场零点, 球壳 $r = r_0$ 处有总磁荷为 $g = 2/e$ 的面分布. (注意: 在此球壳上及其附近, 我们的解没有任何奇性.)

当 $c_2 > 0$ 时, 解 (20), (21) 除在 $r = 0$ 处外还有在 $r_1 = c_2/c_1$ 球壳处的面奇性, 这代表在 $r = 0$ 和 $r = r_1$ 处均有外源. 然而与上类似的 Higgs 场的拓扑分析表明: 在 $r = 0$ 处有点磁荷 $g = -1/e$, 而在 $r = r_1$ 球壳上有连续分布的面磁荷, 其总量为 $g = 2/e$. 这里磁荷位于 Higgs 场的奇点而非零点.

附记 完成本工作后, 我们见到了 M. K. Prasad, A. Sinha 和王乔玲丽的预印本 ITP-SB-80-73. 该文对静态 SU_2 自对偶和相应的多磁单极解进行了相当细致的研究, 不过并未指出连续面分布磁荷的可能性.

参 考 文 献

- [1] G. 'tHooft, *Nucl. Phys. B*, **79**(1974), 276; A. M. Polyakov, *JETP Lett.*, **20**(1974), 194.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz & Yu. S. Tyupkin, *Phys. Lett. B*, **59**(1975), 85.
- [3] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 121.
- [4] 彭家贵, 中国科学, 1977, 4, 302.
- [5] 关于瞬子和磁单极的评述, 可见 M. K. Prasad, *Physica D*, **1**(1980), 167.
- [6] J. P. Hsu, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 646; J. P. Hsu & E. Ma, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 100; C. H. Oh, *Phys. Lett. B*, **74**(1978), 239.
- [7] M. K. Prasad & C. M. Sommerfeld, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 760.
- [8] 胡和生, 复旦大学学报(自然科学版), (1)(1976), 72.
- [9] J. Arafune, P. G. O. Freund & G. J. Goebel, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 433; 侯伯宇、段一士、葛墨林, 兰州大学学报(自然科学版), (2)(1975); 物理学报, **25**(1976), 514.

STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC SELF-DUAL SOLUTIONS OF THE YANG-MILLS FIELD EQUATION AND 'THOOFT- POLYAKOV MONOPOLES DISTRIBUTED CONTINUOUSLY ON A SPHERE

WU YONG-SHI

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

SHENG YOU-GEN

(Shanghai Construction Bank)

ABSTRACT

In this paper, all synchrono spherosymmetrical statical self-dual solutions of Yang-Mills gauge field have been obtained. From these solutions, a result on the continuous surface distribution of the magnetic charge is derived.