

$SU(l|m|n)$ 阶化代数及其规范模型

李新洲 顾鸣皋 殷鹏程

(复旦大学物理系)

1980年6月2日收到

提 要

本文将阶化李代数 $SU(m|n)$ 扩充到 $SU(l|m|n)$, 并讨论了它的局部规范理论. 找到了规范不变的拉格朗日量, 并将 $SU(2|1)$ 弱电模型推广到统一强、弱、电相互作用模型.

近年来, 利用超群^[1] $SU(2|1)$ 构造弱电统一模型已有不少尝试, 这类模型能自然地得到 $\theta_w = 30^\circ$ ^[2-7]. 新近, 在 Salam 的建议下, Taylor^[8] 用 $SU(5|1)$ 构造了强、弱、电相互作用统一的模型. 但是, 我们认为利用在 Z_3 阶化空间上的超群^[8]来扩充 $SU(2|1)$ 模型更自然一些. 因此, 我们首先把 $SU(m|n)$ 扩充到 $SU(l|m|n)$, 然而讨论它的规范方法, 最后构造 $SU(2|1|3)$ 超统一模型.

阶化代数 $SU(l|m|n)$ 是由下列 $(l+m+n) \times (l+m+n)$ 矩阵集合组成

$$X = \begin{pmatrix} L & iA & C \\ iA^+ & M & iB \\ C^+ & iB^+ & N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 L, M 和 N 分别是 $(l \times l)$, $(m \times m)$ 和 $(n \times n)$ 的厄密矩阵, A 是 $(l \times m)$ 矩阵, B 是 $(m \times n)$ 矩阵, 以及 C 是 $(l \times n)$ 矩阵. X 矩阵的阶化迹要求为零, 即 $\text{Tr}_c X = \text{Tr} L - \text{Tr} M + \text{Tr} N = 0$.

我们用 X_0 标记 X 的零阶部分, 用 $X_1(X_2)$ 标记 X 的一阶(二阶)部分, 用 $X_{-1}(X_{-2})$ 标记 X 的负一阶(负二阶)部分,

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{pmatrix} L & & \\ & M & \\ & & N \end{pmatrix}; & X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ iA^+ & 0 & \\ 0 & iB^+ & 0 \end{pmatrix}; & X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ C^+ & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ X_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & iA & 0 \\ & 0 & iB \\ & & 0 \end{pmatrix}; & X_{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

于是 $X = X_{-2} + X_{-1} + X_0 + X_1 + X_2$, 作用在 $(l+m+n)$ 维的矢量 Z 上, Z 的开始的 l 个分量属于零阶矢量空间 Z_0 , 然后的 m 个分量是属于一阶矢量空间 Z_1 , 余下的 n 个分量属于二阶矢量空间记作 Z_2 , 即

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$

假如 V_0, V_1, V_2 代表 V 的阶化子空间, 那么 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ 且有

$$\begin{aligned} X_0 V_0 &\subset V_0, X_0 V_1 \subset V_1, X_0 V_2 \subset V_2; X_1 V_0 \subset V_1, X_1 V_1 \subset V_2, X_1 V_2 = 0; \\ X_2 V_0 &\subset V_2, X_2 V_1 = 0, X_2 V_2 = 0; X_{-1} V_0 = 0, X_{-1} V_1 \subset V_0, X_{-1} V_2 \subset V_1; \\ X_{-2} V_0 &= 0, X_{-2} V_1 = 0, X_{-2} V_2 \subset V_0. \end{aligned} \quad (3)$$

这满足 Z_3 阶化的要求^[8], 下面定义 $X, Y \in SU(l|m|n)$ 的阶化括号

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [X_0, Y_0]_- + [X_0, Y_1]_- + [X_0, Y_2]_- + [X_0, Y_{-1}]_- \\ &\quad + [X_0, Y_{-2}]_- + [X_1, Y_0]_- + i[X_1, Y_1]_+ + i[X_1, Y_{-1}]_+ \\ &\quad + [X_1, Y_{-2}]_- + [X_2, Y_0]_- + [X_2, Y_{-1}]_- + [X_2, Y_{-2}]_- \\ &\quad + [X_{-1}, Y_0]_- + i[X_{-1}, Y_1]_+ + [X_{-1}, Y_2]_- + i[X_{-1}, Y_{-1}]_+ \\ &\quad + [X_{-2}, Y_0]_- + [X_{-2}, Y_1]_- + [X_{-2}, Y_2]_- \end{aligned} \quad (4)$$

于是有

$$\begin{aligned} [X, Y]_0 &= [X_0, Y_0]_- + i[X_1, Y_{-1}]_+ + [X_2, Y_{-2}]_- + i[X_{-1}, Y_1]_+ \\ &\quad + [X_{-2}, Y_2]_-, \\ [X, Y]_1 &= [X_0, Y_1]_- + [X_1, Y_0]_- + [X_2, Y_{-1}]_- + [X_{-1}, Y_2]_- \\ [X, Y]_2 &= [X_0, Y_2]_- + i[X_1, Y_1]_+ + [X_2, Y_0]_-, \\ [X, Y]_{-1} &= [X_0, Y_{-1}]_- + [X_1, Y_{-2}]_- + [X_{-2}, Y_1]_- + [X_{-1}, Y_0]_-, \\ [X, Y]_{-2} &= [X_0, Y_{-2}]_- + i[X_{-1}, Y_{-1}]_+ + [X_{-2}, Y_0]_-. \end{aligned} \quad (5)$$

利用(1)和(5)两式, 可得 $(i[X, Y]_0)^+ = i[X, Y]_0$, $(i[X, Y]_1)^+ = -i[X, Y]_{-1}$, $(i[X, Y]_2)^+ = i[X, Y]_{-2}$, $(i[X, Y]_{-1})^+ = -i[X, Y]_1$ 和 $(i[X, Y]_{-2})^+ = i[X, Y]_2$. 通过进一步计算, 可以证明 $\text{Tr}_G[X, Y] = 0$, 于是在双线性映照 $(X, Y) \rightarrow i[X, Y]$ 下, $SU(l|m|n)$ 是封闭的, 也就是说我们已构成了一个 $SU(l|m|n)$ 阶化李代数.

下面讨论 $SU(l|m|n)$ 规范化方法. 若 $u \in SU(l|m|n)$ 是依赖于时空的无穷小变换, 对张量 F 的变分定义为

$$\delta_u F = i[F, u]. \quad (6)$$

如果 F 和 u 都是 $SU(l|m|n)$ 的元, 那么(6)式右边也是它的元, 因而(6)式的定义是合理的. 如果记 $\tilde{X} = X_2 - X_1 + X_0 - X_{-1} + X_{-2}$, 通过计算可以证明 $\text{Tr}(X\tilde{X})$ 是规范不变的, 即 $\delta_u \text{Tr}(X\tilde{X}) = 0$. 下面引入规范矢量势 A_μ 的变换:

$$\delta_u A_\mu = \partial_\mu u + i[A_\mu, u]. \quad (7)$$

这是通常的 $SU(l) \otimes SU(m) \otimes SU(n)$ 的非齐次规范变换的扩充, 在(7)式中, $1 \leq \mu \leq N$, N 代表时空的维数. 类似于通常情形, 定义规范场强为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \quad (8)$$

利用(7)式, 可得

$$\begin{aligned} \delta_u F_{\mu\nu} &= i\{[A_\nu, \partial_\mu u] + [\partial_\mu u, A_\nu]\} + i[F_{\mu\nu}, u] + \{[[A_\mu, A_\nu], u] \\ &\quad - [[A_\mu, u], A_\nu] - [A_\mu, [A_\nu, u]]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

为使 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ 在规范变换下不变, 规范势应满足一系列的条件. 我们以 $SU(2|1|3)$ 模型为例进行讨论, 这时取 $N = 6$. 对于 $SU(l|m|n)$ 一般情形的推广是直接的. 通过较冗长计算, 表明规范势应以如下方式选取:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} L_\mu & 0 & X_\mu \\ 0 & M_\mu & 0 \\ X_\mu^+ & 0 & N_\mu \end{pmatrix} \quad 1 \leq \mu \leq 4, \quad (10)$$

$$A_{5,0} = A_{6,0} = \begin{pmatrix} M_1 I_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 I_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$A_{5,1} = A_{5,-1} = -A_{6,1} = -A_{6,-1} = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\varphi_2 & 0 \\ i\varphi_2^+ & 0 & i\varphi_1 \\ 0 & i\varphi_1^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 φ_1 是 1×3 矩阵, φ_2 是 2×1 矩阵, I_2 是 2×2 单位矩阵, I_3 是 3×3 单位矩阵. 为了写出拉格朗日的明确形式, 先引入下述 25 个 6×6 的 $\bar{\lambda}_i$ 矩阵:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & -i & 0 \\ \vdots & i & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\lambda}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\lambda}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & 0 & -i \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_6 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\lambda}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & -i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{13} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & -\frac{2}{3} & \\ & & & & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{14} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{15} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -i \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{16} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{17} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & -i \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & i & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{18} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{19} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -i & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ i & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\lambda}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & -i & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & i & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -i & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ i & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{24} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\lambda}_{25} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & -i & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & i & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

利用 $\bar{\lambda}_i$ 矩阵, 记

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{25} g A_\mu^i \frac{\bar{\lambda}_i}{2} = \begin{pmatrix} L_\mu & 0 & X_\mu \\ 0 & M_\mu & 0 \\ X_\mu^+ & 0 & N_\mu \end{pmatrix}. \quad (14)$$

即有

$$N_\mu = \sum_{i=1}^8 g A_\mu^i \frac{\lambda^i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} A_\mu^{13} I_3, \quad (\lambda^i \text{ 为 Gell-Mann 矩阵, } I_3 \text{ 为 } (3 \times 3) \text{ 单位矩阵}),$$

$$L_\mu = \sum_{i=1}^3 g A_\mu^{8+i} \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} A_\mu^{13} I_2, \quad (\sigma^i \text{ 为 Pauli 矩阵, } I_2 \text{ 为 } (2 \times 2) \text{ 单位矩阵}),$$

$$M_\mu = \frac{2A_\mu^{12}}{\sqrt{3}},$$

$$X_\mu = \begin{pmatrix} X_{1\mu} & X_{2\mu} & X_{3\mu} \\ Y_{1\mu} & Y_{2\mu} & Y_{3\mu} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

拉格朗日量为 $(m, n = 1, \dots, 6)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{mn} \tilde{F}^{mn} \\ &= -\frac{1}{2g} \text{Tr} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi_2 + iX_\mu \varphi_1^+)^2 + (D_\mu \varphi_1 - i\varphi_2^+ X_\mu)^2 - V(\varphi_1 \varphi_2), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu \varphi_2 &= \partial_\mu \varphi_2 + iN_\mu \varphi_2 - i\varphi_2 L_\mu, \\ D_\mu \varphi_1 &= \partial_\mu \varphi_1 + iL_\mu \varphi_1 - i\varphi_1 M_\mu, \\ V(\varphi_1 \varphi_2) &= g^2 [2(\varphi_1^+ \varphi_1)^2 + 2(\varphi_2^+ \varphi_2)^2 + (\varphi_1^+ \varphi_1)(\varphi_2^+ \varphi_2) \\ &\quad - 4M^2(\varphi_1^+ \varphi_1 + \varphi_2^+ \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (17)$$

这里 $M = M_1 - M_2$, φ_1 和 φ_2 的真空期望值为

$$\langle \varphi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \langle \varphi_1 \rangle = 0,$$

通过 SSB, 中间玻色子及 X 粒子获得质量 $\sim M_W$, 胶子及光子保持无质量. 为了获得 X 粒子的超重质量, 还必须引入新的标量多重态, 这与 Taylor 的考虑相类似^[9]. 费密子填充可采用

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & c_L^c & c_R^c & u_{1L} & u_{2L} & u_{3L} \\ -c_L^c & 0 & \bar{\nu}_R & d_{1L} & d_{2L} & d_{3L} \\ -c_R^c & -\bar{\nu}_R & 0 & d_{1R} & d_{2R} & d_{3R} \\ -u_{1L} & -d_{1L} & -d_{1R} & 0 & -u_{3L}^c & u_{2L}^c \\ -u_{2L} & -d_{2L} & -d_{2R} & u_{3L}^c & 0 & -u_{1L}^c \\ -u_{3L} & -d_{3L} & -d_{3R} & -u_{2L}^c & u_{1L}^c & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

除了上述 $SU(2|1|3)$ 填充外, 我们也尝试讨论 $SU(2|3|1)$, $SU(1|2|3)$, $SU(1|3|2)$, $SU(3|2|1)$ 和 $SU(3|1|2)$ 等情形, 但都不能获得合理的费密子填充. 此外, 正如 Ne'eman^[2] 的 $SU(2|1)$ 模型, 周光召、高崇寿^[10] 的 $SU(3) \otimes U(1)$ 模型一样, 对于 $SU(l|m|n)$ 规范模型的反常问题尚需进一步讨论.

参 考 文 献

- [1] P. G. O. Freund and I. Kaplansky, *J. Math. Phys.*, **17**(1976), 228.
- [2] Y. Ne'eman, *Phys. Lett.*, **81B**(1979), 190.
- [3] D. Fairlie, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 97.
- [4] E. Squires, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 395.
- [5] P. H. Dondi and P. D. Jarvis, *Phys. Lett.*, **84B**(1979), 75. ..
- [6] J. G. Taylor, *Phys. Lett.*, **83B**(1979), 331.
- [7] J. G. Taylor, *Phys. Lett.*, **84B**(1979), 79.
- [8] L. Corwin, Y. Ne'eman and S. Sternberg, *Rev. Mod. Phys.*, **47**(1975), 573.
- [9] J. G. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 824.
- [10] 周光召、高崇寿, 中国科学, 1980, 3, 233.

GRADED ALGEBRA $SU(l|m|n)$ AND GAUGE MODEL

LI SIN-ZHOU GU MING-GAO YIN PENG-CHENG

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

We have suggested that the extension of $SU(m|n)$ is to $SU(l|m|n)$. We develop a local gauge theory of the graded algebra $SU(l|m|n)$. We find the restrictions on the gauge potentials and matter fields in order that a physically suitable gauge invariant lagrangian exists. It is natural to extend the graded algebra $SU(2|1)$ electroweak model to include quarks in a superunified model.