

计算线源声参量阵辐射场的新方法

钱 祖 文

(中国科学院声学研究所)

1980 年 12 月 25 日收到

提 要

本文提出一种计算惠更斯积分的新方法,并利用它来研究线源声参量阵。首先将点源函数展开为一个算符对平面波函数的运算,经过计算证明,如果将这个算符对参量阵远场解进行运算,得到的结果即为线源参量阵辐射场的解。其次证明,参量阵的夫琅和费远场解及菲涅耳修正解都可由本文导出,并且证明,菲涅耳修正只是对半束宽角以外的场有贡献。

本文还计算了截断参量阵的辐射场,结果表明,这种阵的近场指向性随距离的减小而变尖锐。并且可以预料,实际参量阵辐射场的性质取决于下述三个场参量: $kR\sin^2\theta$, βR 和 R_1 。作者认为,以往发表的但似乎有分歧的实验结果,可以在本文的理论基础上得到统一。

一、引 言

与其它场合一样,声参量阵的辐射场归结为对惠更斯积分的计算^[1],即

$$S(R, \theta) = \int_0^\infty \frac{1}{r} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2 + jk)x - (\alpha + jk)r] dx, \quad (1)$$

式中 α_1, α_2 和 α 分别为两个高频波和差频波的吸收系数, k 是差频波的波数, R, θ, r 如图 1 所示。显然, (1) 式是表示线源参量阵的辐射场, 这种阵是由连续分布在一条线上的点源组成, 其源强随距离作指数衰减, 衰减系数是 $\alpha_1 + \alpha_2$ 。

Westervelt^[2] 首先计算了线源参量阵的远场辐射, 他在 (1) 式中取 $r^{-1} \simeq R^{-1}$, $\exp(-jk r) \simeq \exp[-jk(R - x \cos \theta)]$, 假设 $(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha \cos \theta)R \rightarrow \infty$, 这时他得到的解为

$$S_w(R, \theta) \simeq \exp[-(\alpha + jk)R]/\beta R, \quad (2)$$

式中

$$\beta = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha \cos \theta) + jk(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

这个解称之为卢瑟福散射解。通常 $\alpha_1 + \alpha_2 \gg \alpha$, 故

$$\beta \simeq \alpha_1 + \alpha_2 + jk(1 - \cos \theta) \simeq \alpha_T + jk(1 - \cos \theta).$$

上述近似解相应于辐射问题中的夫琅和费近似。

Berklay^[3] 研究参量阵近场时, 在上述近似的基础上作了改进, 他将指数式中的 r 取

$$r \simeq R - x \cos \theta + \frac{x^2}{2R} \sin^2 \theta \quad x < R. \quad (4)$$

这相应于菲涅耳近似, 根据这样的近似, 他得到的解为

$$S(R, \theta) \simeq S_W(R, \theta)L(z), \quad (5)$$

而

$$\begin{aligned} L(z) &= \sqrt{\pi} z \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z), \\ \operatorname{erfc}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du, \\ z &= \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha)R}{8} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\theta}{\theta_d} + \frac{\theta_d}{\theta} + j \left(\frac{\theta}{\theta_d} - \frac{\theta_d}{\theta} \right) \right\}, \\ \theta_d &= \left[\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha)}{k} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

θ_d 称为 $S_W(R, \theta)$ 的半束宽. 他利用上述理论去解释文献 [3] 中的实验结果, 本文作者对这一近似进行了讨论^[5].

关于参量阵辐射场的性质, 特别是从远场向近场过渡的性质, 迄今不甚了解^[6]. 本文的目的是要探讨这个问题.

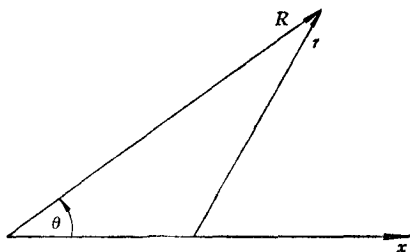


图 1

二、计算惠更斯积分的新方法

正如上面指出过, 以往计算惠更斯积分, 总是将 $r^{-1} \simeq R^{-1}$, 在指数式中的 r 或者是取夫琅和费近似, 或者是取菲涅耳近似, 这样得到的结果总有一定的局限性, 它将每个点源的振幅算小了 (特别是离场点很近的那些源), 其相位近似关系也不准确, 本文提出下面一种计算方法.

在 e^{-jkr} 中, 由于差频吸收很小, 这里的 r 取夫琅和费近似就足够了, 因此这里的 r 取为

$$r = \begin{cases} R - x \cos \theta & x < R, \\ x - R \cos \theta & x > R. \end{cases} \quad (7)$$

但在相位部分 e^{-jkr}/r 式中取严格表示式, 在附录一中证明 [见 (A.8) 式]

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-j k R}}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m}{2^m m! (kR)^m} \prod_{l=0}^m L^{(l-1)} e^{j k x \cos \theta} \quad x < R. \quad (8)$$

当 $x > R$ 时, 则在上式中将 x 和 R 对换. 而 $L^{(l-1)}$ 为 $l-1$ 阶勒让德算符

$$L^{(l-1)} = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ -\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} \right] + l(l+1) & \eta = \cos \theta \quad l \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

将(1)式中的积分限分成 $(0, R)$ 和 (R, ∞) 两部分, 后一部分称为参量阵的反向辐射, 可以证明, 只要 $|\beta|/k \ll 1$, $kR \gg 1$, 这部分贡献是高级小量, 故以后只讨论前一部分. 将(8), (9)式代入(1)式, 经过简单计算得到

$$S(R, \theta) = e^{-(\alpha+jk)R} T \left(\frac{1 - e^{-\beta R}}{\beta R} \right), \quad (10)$$

式中

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m}{2^m m! (kR)^m} \prod_{l=0}^m L^{(l-1)} \quad (11)$$

是一个算符, 而

$$e^{-(\alpha+jk)R} \frac{1 - e^{-\beta R}}{\beta R} = S_0(R, \theta) \quad (12)$$

为 Westervelt 的远场解, 故本文的解是将远场解进行 T 运算. 如果在(10)式中令 $m=0$, 则得到(12)式, 于是文献[2]的远场解(相应于夫琅和费近似)是本文结果(10)式的零级近似.

此外, 在附录二中证明, 菲涅耳近似解也是(10)式中的特殊情况, 故本文的结果是一个更为精确的解. 如果写

$$S(R, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(R, \theta), \quad (13)$$

则前几项的结果如下:

$$\begin{aligned} S_0(R, \theta) &= e^{-(\alpha+jk)R} \frac{1 - e^{-\beta R}}{\beta R} = \frac{A_0}{kR} e^{-(\alpha+jk)R}, \\ S_1(R, \theta) &= \left\{ -j \frac{a}{2} \frac{A_2}{(kR)^3} + \cos \theta \frac{A_1}{(kR)^2} \right\} e^{-(\alpha+jk)R}, \\ S_2(R, \theta) &= \left\{ -\frac{a^2}{8} \frac{A_4}{(kR)^5} - ja \cos \theta \frac{A_3}{(kR)^4} - \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{A_2}{(kR)^3} \right\} e^{-(\alpha+jk)R}, \\ S_3(R, \theta) &= \left\{ j \frac{a^3}{48} \frac{A_6}{(kR)^7} - \frac{3a^2 \cos \theta}{8} \frac{A_5}{(kR)^6} + j \left(\frac{15}{8} \sin^2 \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \right) a \frac{A_4}{(kR)^5} - \frac{5 \sin^2 \theta - 2}{2} \cos \theta \frac{A_3}{(kR)^4} \right\} e^{-(\alpha+jk)R}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$a = kR \sin^2 \theta, \quad A_n = \int_0^{kR} z^n e^{-\beta_1 z} dz = A_n(R),$$

显然, $S_{m+1}(R, \theta)$ 是将 $S_m(R, \theta)$ 进行一次 m 阶勒让德算符的运算所得到的结果.

三、参量阵性质的探讨

从(14)式可见, 每一级近似中, 都是以 a 的降幂表示的, 而每个 S_m 中 a 的最高次幂的项是菲涅耳近似的贡献(见附录二), 但当 $\theta=0$ 时, 这些贡献消失. 由此可见, 文献

[1]所做的菲涅耳修正在 $kR \sin^2 \theta$ 很小时贡献很小,而对轴向声场毫无贡献,只有在(见附录三)

$$\left| a \frac{A_l}{(kR)^{l+1}} / \frac{A_{l-1}}{(kR)^l} \right| \gg 1$$

或者

$$\sin^2 \theta \gg |A_{l-1}/A_l| \quad (15)$$

时菲涅耳近似才有主要贡献。从(A.18)式可见,如果

$$a = kR \sin^2 \theta \gg 1 \quad \sin^2 \theta \gg |\beta|/k, \quad (16)$$

(15)式就能满足(附录三)。而(16)式近似给出

$$\theta > \theta_d.$$

这个结果表明,参量阵声场的菲涅耳近似只是对卢瑟福散射半宽角之外的场才有显著贡献,而对主波束无甚贡献。

当 $\beta R \gg 1$, 由(10)式可知,除了 $S_0(R, \theta)$ 这一项外,其它都是高阶小量,这时

$$S(R, \theta) \simeq S_0(R, \theta) = S_w(R, \theta),$$

即过渡到 Westervelt 的解。

四、截断参量阵

现在讨论一种长度为 R_1 的参量阵,即所谓截断参量阵,这种阵是有其实际意义的,因为一个活塞型换能器在其瑞利距离 $R_1 = \pi b^2/\lambda$ 内(b 为活塞半径, λ 是原频波的波长),波束近似当作准直束,而在瑞利距离以外,波束近似看成为球面扩展。准直束部分通常是作为截断参量阵来处理,为了使解收敛,我们只讨论 $R > R_1$ 的情形。对于这样的阵,(10)式应改为

$$S(R, \theta) = \frac{e^{-(\alpha+jk)R}}{R} T \left\{ \frac{1 - e^{-\beta R_1}}{\beta} \right\}. \quad (17)$$

与此相对应的,在(14)式中要将诸 A_n 中的 R 换成 R_1 。对于轴向场取 $\theta = 0$,这时

$$S(R, \theta) = S(R, 0).$$

参照(14)和(17)式得

$$S(R, 0) = e^{-(\alpha+jk)R} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{R} \right)^{m+1} \left[\frac{A_m}{(kR)^{m+1}} \right]_{\substack{R=R_1 \\ \theta=0}}. \quad (18)$$

因为

$$A_m = \int_0^{kR_1} z^m e^{-\beta_1 z} dz,$$

故

$$B_m = \left[\frac{A_m}{(kR)^{m+1}} \right]_{\substack{R=R_1 \\ \theta=0}} = \frac{e^{-\alpha_T R_1}}{m+1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_T R_1}{m+2} + \frac{\alpha_T^2 R_1^2}{(m+2)(m+3)} + \cdots \right\} \\ \alpha_T = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (19)$$

当 $\alpha_T R_1 < 1$, 即截断阵的长度小于参量阵的长度时

$$\frac{1}{m+1} e^{-\alpha_T R_1} < B_m < \frac{1}{m+1} e^{-\alpha_T R_1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_T R_1 / (m+2)}{1 - \alpha_T R_1 / (m+2)} \right\}$$

$$= \frac{m+2}{m+2 - \alpha_T R_1} \frac{e^{-\alpha_T R_1}}{m+1}.$$

在 $\alpha_T R_1$ 比 $m+2$ 小得多时,

$$B_m \simeq \frac{1}{m+1} e^{-\alpha_T R_1},$$

于是

$$S(R, 0) \simeq e^{-(\alpha+jk)R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} e^{-\alpha_T R_1} \left(\frac{R_1}{R} \right)^{m+1}$$

或者

$$S(R, 0) \simeq e^{-(\alpha+jk)R - \alpha_T R_1} \ln \frac{R}{R - R_1}. \quad (20)$$

这个式子与 Berklay 等人导出的端射阵近场公式的(参见: *J. Acoust. Soc. Am.* **53**(1973), 550 页中(6)式)形式完全相同.

由上面的讨论可以看出, $S(R, 0)$ 是一个正项级数之和, 随着 R 的减小它单调增大, 当 $R \rightarrow R_1$ 时, 它至少以对数奇性发散, 即在 $R \geq R_1$ 的区域它增大很快.

当 θ 为不等于零的有限值时, 由(1)式可知,

$$S(R, \theta) < \int_0^{R_1} \frac{1}{r} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x - \alpha_T r} dx < \int_0^{R_1} \frac{1}{r} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} dx$$

$$< \frac{1}{R - R_1 \cos \theta} \int_0^{R_1} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} dx = \frac{1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)R_1}}{(\alpha_1 + \alpha_2)(R - R_1 \cos \theta)}.$$

定义它的指向性

$$D(R, \theta) = \frac{S(R, \theta)}{S(R, 0)}.$$

对于不接近于零的那些 θ 值来说, 在 $R \geq R_1$ 的区域, 在 $R \rightarrow R_1$ 时, $S(R, \theta)$ 增大的速度远比 $S(R, 0)$ 慢得多, 因此截断参量阵的近场指向性随着 R 的减小变得尖锐起来, 这种现象正是文献[4], [7]和[10]的实验中观测到的结果(见表1). 当然, 由(14)及(17)式

表 1

文献	R_1 (厘米)	α_T^{-1} (厘米)	R (厘米)	$\bar{f}^{(1)}$ (兆赫)	f_- (兆赫)	指 向 性
[7]	150 ²⁾	10	<89	13.5	1	差频束宽比远场小一倍
[4]	58	25	62.5—170	8.75	1.1	R 越小, 指向性越尖锐
[10]	50	6.9	10—110	17	1	$R > 20$ 厘米时, R 减小, 指向性变尖
[8]	137	10 ³	≤ 100 米	0.45	6.4×10^{-2}	$R > 10$ 米, 指向性是常数
[9]	6	112	50—350	$\frac{4.22}{4.6}$	0.125—0.128	指向性随距离略有变化, 但很小

1) $\bar{f}$ 是平均原波频率, α_T 是按纯水吸收系数理论值计算的.

2) 当瑞利距离 $R_1 > \alpha_T^{-1}$ 时, 这时的截断阵长度不会超过 α_T^{-1} .

可知,在 $R \geq R_1$ 的近场区, $S(R, \theta)$ 并不像 $S(R, 0)$ 那样单调变化,故截断阵近场指向性的平均趋势是随 R 减小而变尖,但中间有振荡,这些现象在实际换能器参量阵近场也应该出现.

当 $R_1 \ll R, R_1 \ll 1/\alpha_T$, 因为

$$A_n(R_1) = \int_0^{kR_1} z^n e^{-\beta_1 z} dz < \frac{1}{n+1} (kR_1)^{n+1}.$$

代入(14)式可知,除了 $S_0(R, \theta)$ 这一部分是 R_1/R 的量级外,其它 $S_n(R, \theta) (n \geq 1)$ 至少是 $(R_1/R)^{n+1}$ 的量级,故这时截断参量阵的性质非常接近于 $S_0(R, \theta)$, 即指向性与距离无关,这一点与文献[8]和[9]所测得的现象一致. 这些结果都列在表1中. 由此可见,这里的截断参量阵理论能够解释已发表的主要实验结果,特别是近场测量结果的某些表面分歧^[8,9]能够在本文的理论基础上得到统一.

以往计算辐射问题时,对辐射源的振幅和相位都作了一定的近似,这类近似对换能器这种集中性的辐射源是有效的,但对于分布性的参量阵辐射源来说,某些近似就失去意义.

附 录 一

根据展开定理^[4]

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \begin{cases} (-jk) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kx) [h_n^{(1)}(kR)]^* & R > x; \\ (-jk) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kR) [h_n^{(1)}(kx)]^* & R < x, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

式中 $P_n(\cos\theta)$ 为勒让德多项式, $j_n(kx)$ 和 $h_n^{(1)}(kx)$ 分别为球贝塞尔函数和第一类球汉克函数. 因为

$$\begin{aligned} [h_n^{(1)}(z)]^* &= \frac{j^{n+1}}{z} e^{iz} \{X_{n+\frac{1}{2}}(z) + jY_{n+\frac{1}{2}}(z)\}, \\ X_{n+\frac{1}{2}}(z) &= 1 - \frac{n(n^2-1)(n+2)}{2^2 2! z^2} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n+4)}{2^4 4! z^4}, \\ Y_{n+\frac{1}{2}}(z) &= -\frac{n(n+1)}{2 \cdot z^1} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n+3)}{2^3 3! z^3} - \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

首先讨论 $R > x$ 的情况,将(A.2)式代入(A.1)式得到

$$\begin{aligned} \frac{e^{-jkr}}{r} &= (-jk) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kx) \frac{j^{n+1}}{kR} e^{-jkR} \left\{ 1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-j)^m}{2^m m! (kR)^m} \prod_{l=1}^m [n(n+1) - l(l-1)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

因为当 $m > n$ 时,乘积序列 $\prod_{l=1}^m [n(n+1) - l(l-1)] = 0$, 所以求和次序可以交换,于是

$$\begin{aligned} \frac{e^{-jkr}}{r} &= (-jk) \left\{ j \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kx) \right. \\ &\quad \left. + j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-j)^m}{2^m m! (kR)^m} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kx) \prod_{l=1}^m [n(n+1) - l(l-1)] \frac{e^{-jkR}}{kR} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) P_n(\cos\theta) j_n(kx) = e^{jkx \cos\theta}, \quad (\text{A.5})$$

利用球函数方程可得

$$n(n+1)P_n(\eta) = \left[2\eta \frac{d}{d\eta} - (1-\eta^2) \frac{d^2}{d\eta^2} \right] P_n(\eta). \quad (\text{A.6})$$

将 (A.5) 式和 (A.6) 式代入 (A.4) 式得到

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-jKR}}{R} T \{ e^{jkx \cos \theta} \}, \quad (\text{A.7})$$

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m}{2^m m! (kR)^m} \prod_{l=0}^m L^{(l-1)}, \quad (\text{A.8})$$

$$L^{(l-1)} = \begin{cases} 1 & l=0, \\ \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{d}{d\eta} \right] + l(l-1) & l \geq 1, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

式中 $\eta = \cos \theta$, $L^{(l-1)}$ 为 $l-1$ 阶勒让德算符。

根据同样的理由, 利用球贝塞耳方程可得

$$n(n+1)j_n(z) = \left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + 2z \frac{d}{dz} + z^2 \right] j_n(z). \quad (\text{A.10})$$

代入 (A.4) 式得到

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-jKR}}{R} T_1 \{ e^{jkx \cos \theta} \}, \quad (\text{A.11})$$

$$T_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-j)^m}{2^m m! (kR)^m} \prod_{l=0}^m B^{(l-1)}, \quad (\text{A.12})$$

$$B^{(l-1)} = \begin{cases} 1 & l=0, \\ (kx)^2 \frac{d^2}{d(kx)^2} + 2kx \frac{d}{d(kx)} + k^2 x^2 - l(l-1) & l \geq 1, \end{cases}$$

$B^{(l-1)}$ 为 $l-1$ 阶球贝塞耳算符。从 (A.8) 和 (A.11) 式可见, 球面波可以展开为受到算符作用下的平面波的叠加。

附 录 二

从 (9) 和 (11) 式可知,

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^m L^{(l-1)} &= \prod_{l=0}^m \left\{ \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{d}{d\eta} \right] + l(l-1) \right\} \\ &= (1-\eta^2)^m \frac{d^{2m}}{d\eta^{2m}} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

因此

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m}{2^m m! (kR)^m} \left\{ (1-\eta^2)^m \frac{d^{2m}}{d\eta^{2m}} + \dots \right\}. \quad (\text{A.14})$$

将 $\eta = \cos \theta$ 代入上式, 令

$$\beta_1 = \beta/k,$$

于是

$$\frac{A_0}{kR} = \frac{1-e^{-\beta R}}{\beta R} = \frac{1}{kR} \left(\frac{1-e^{-\beta_1 kR}}{\beta_1} \right). \quad (\text{A.15})$$

而

$$\frac{d}{d\eta} = -jk \frac{d}{d\beta} = -j \frac{d}{d\beta_1},$$

所以

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-j)^m}{2^m m! (kR)^m} \left\{ \sin^{2m} \theta \frac{d^{2m}}{d\beta_1^{2m}} + \dots \right\}. \quad (\text{A.16})$$

显然

$$\frac{d^{2m}}{d\beta_1^{2m}} \left(\frac{1}{kR} A_0 \right) = \frac{(-1)^{2m}}{kR} A_{2m}, \quad (\text{A.17})$$

$$A_n = \int_0^{kR} x^n e^{-\theta_1 x} dx. \quad (\text{A.18})$$

将这些结果代入(A.16)式,再将所得结果代入(10)式则有

$$S(R, \theta) = S_0(R, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-j)^m}{2^m m!} (kR \sin^2 \theta)^m \frac{A_{2m}}{(kR)^{2m+1}} e^{-(\alpha+jk)R} + \dots \quad (\text{A.19})$$

另一方面,根据 Berkta 近似,即把(4)式代入(1)式,得到

$$S(R, \theta) = \int_0^R \frac{1}{R} \exp \{ - [(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha \cos \theta) + jk(1 - \cos \theta)]x \} \\ \times e^{-(\alpha+jk)\frac{x^2}{2R} \sin^2 \theta} dx e^{-(\alpha+jk)R}. \quad (\text{A.20})$$

因为 $\frac{\alpha}{2R} \sin^2 \theta \ll 1$, 故 $\exp \{ -\alpha x^2 \sin^2 \theta / 2R \} \simeq 1$, 而

$$e^{-jk\frac{x^2}{2R} \sin^2 \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-j)^m}{2^m m!} \left(\frac{x}{R} \right)^{2m} (kR \sin^2 \theta)^m. \quad (\text{A.21})$$

将(A.21)式代入(A.20)式,得到的结果恰好就是(A.19)式中的前两项,这两项即为参量阵的夫琅和费近似与非涅耳修正.

附 录 三

条件(16)式的证明:

附录二中证明,参量阵的非涅耳近似解是(14)式诸 $S_n(R, \theta)$ 右端第一项的总和,现在要证明,在什么条件下其它项可以忽略? 显然只有在

$$\left| a \frac{A_l}{(kR)^{l+1}} / \frac{A_{l-1}}{(kR)^l} \right| \gg 1 \quad (\text{A.22})$$

时,非涅耳近似解起主要作用. 由 A_l 的定义可知

$$\frac{A_l}{(kR)^{l+1}} = -\frac{1}{\beta R} e^{-\beta R} + \frac{l}{\beta R} \frac{A_{l-1}}{(kR)^l}. \quad (\text{A.23})$$

如果上式右端第一项占主导地位,则

$$\frac{A_l}{(kR)^{l+1}} \simeq -\frac{1}{\beta R} e^{-\beta R}$$

与 l 无关,则(A.22)式化为

$$a \gg 1. \quad (\text{A.24})$$

如果(A.23)式的右端是第二项起主要作用,则(A.22)式成为

$$\left| a \frac{l}{\beta R} \right| = \sin^2 \theta \frac{kl}{|\beta|} \gg 1$$

或者

$$\sin^2 \theta \gg \frac{|\beta|}{k}. \quad (\text{A.25})$$

如果(A.23)式右端两项都起作用,从数量级的观点看来,如(A.24), (A.25)式都满足,则(A.22)式恒成立,因而条件(16)式得证.

另一方面,通过积分和归纳可以得到

$$\frac{A_l}{(kR)^{l+1}} = \frac{1}{(\beta R)^{l+1}} \left\{ l! (1 - e^{-\beta R} - \beta R e^{-\beta R}) - \frac{l!}{2!} (kR)^2 e^{-\beta R} \right. \\ \left. - \frac{l!}{3!} (\beta R)^3 e^{-\beta R} - \dots - \frac{l!}{(l-1)!} (\beta R)^{l-1} e^{-\beta R} \right. \\ \left. - (\beta R)^l e^{-\beta R} \right\}.$$

从这个结果也可以导出(A.24)和(A.25)式.

参 考 文 献

- [1] H. O. Berkta, *J. Sound and Vib.*, 20(1972), 135.
- [2] P. J. Westervelt, *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(1963), 535.

- [3] B. V. Smith, *J. Sound and Vib.*, **14**(1971), 7.
- [4] 见文献[1].
- [5] 钱祖文, 本刊本期.
- [6] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, 1st ed. (1948), 408.
- [7] J. L. S. Bellin and R. T. Beyer, *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**(1962), 1051.
- [8] T. G. Muir and J. G. Willette, *J. Acoust. Soc. Am.*, **52**(1972), 1481.
- [9] H. Hobæk and Vestrheim, *Acustica*, **37**(1977), 74.
- [10] M. Vestrheim and H. Hobæk, *Proc. of Symp. on Nonlinear Acoust. held at the Univ. of Birmingham on 1st and 2nd April (1971)*, 159.

A NEW METHOD FOR CALCULATING RADIATION FROM PARAMETRIC LINE ARRAY

QIAN ZU-WEN

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A technique for analytic evaluation of one-dimension Huygens' integral is proposed. The sound fields of the parametric line array can be analysed by it. Firstly, the point-source function is expanded into an operator on a plane wave function. Putting it into above mentioned integral and calculating it, it is shown that if we make an operation of this operator on the far-field solution, a general expression of radiation from parametric line array can be obtained. Secondly, both Fraunhofer's far-field approximation expression and Fresnel's nearfield approximation expression are derived from it, but the latter approximation make a appreciable contribution on the radiation only outside the range of half-width angle.

Furthermore, the radiation of a truncated parametric line array whose length is R_1 is calculated. We find that the beam pattern of this array becomes more narrow as decreasing the range. And a prediction can be made that the radiation field of a real parametric array will depend on following three parameters: $kR \sin^2 \theta$, βR , R_1 . Finally, basing on this theory, it appears to the author that the inconsistencies in appearance for some published experiments can be consistent with each other.