

四维静态黎曼时空中的 Hawking 辐射

赵 峰

(北京师范大学天文系)
1981 年 2 月 16 日收到

提 要

本文论证了四维静态黎曼时空中的视界普遍会产生 Hawking 辐射,辐射温度正比于视界的表面重力 κ . 并把这一工作推广到电磁场存在的情况,指出影响 Hawking 辐射谱的静电势既可起源于视界内部的电荷,也可起源于视界外部的电荷. 上述工作统一了史瓦西黑洞、Reissner-Nordström 黑洞、Schwarzschild-de Sitter 宇宙的 Hawking 辐射和匀加速系的 Rindler 辐射. 指出在 Rindler 辐射的问题上等效原理依然成立, Rindler 辐射确实来源于该参考系的视界, Hawking 辐射与时空的曲率无关,而只与视界附近的动力学效应 κ 有关.

在文献[1]中,我们证明了 1+1 维稳态黎曼时空如果存在视界,则一定会有 Hawking 辐射自视界附近产生,辐射的温度正比于视界的表面重力 κ . 我们认为,上述情况在四维稳态黎曼时空中仍然成立. 下面,我们就把文献[1]推广到四维静态黎曼时空,并对视界附近热辐射的产生作进一步的研究.

一、四维静态时空中视界的热辐射

在四维静态黎曼时空中,如果与时间无关的曲面 $F(x, y, z)$ 是视界,考虑到视界面的存在不依赖于坐标系的选择,我们总可以作纯空间坐标变换,使得在视界面附近, x 轴与视界面的法矢量平行,而 y, z 轴(曲线坐标)在视界面上. 这样,法矢量为

$$n_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \left(0, \frac{\partial F}{\partial x}, 0, 0\right). \quad (1)$$

在整个视界面上有 $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$, 唯一的可能是 F 与 y, z, t 无关,即 F 与某个 x 为常数的坐标面重合,这正是我们选择坐标系的结果.

由于视界必须满足零曲面条件

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} = 0,$$

考虑(1)式,得

$$g^{11} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

显然有

$$g^{11} = 0 \quad (2)$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

我们首先考虑

$$g^{11} = f(x, y, z)(x - \xi)^m = 0, \quad (4)$$

即视界位于 $x = \xi$ 处. 因为 F 与 y, z, t 无关, 所以 ξ 是常数. 容易看出, 视界面 $x = \xi$ 把时空分为互不连通的两个区域, 因而有限的视界面具有封闭性.

由于在整个视界面附近, x 轴与 y, z, t 轴均正交, 所以

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = \frac{1}{f(x, y, z) \cdot (x - \xi)^m}. \quad (5)$$

同理

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}}. \quad (6)$$

再考虑到视界内外时空坐标互换, g_{11} 与 g_{00} 要同时变号, 所以 g_{00} 必须写成下述形式:

$$g_{00} = (x - \xi)^n / \theta(x, y, z), \quad (7)$$

$$g^{00} = \theta / (x - \xi)^n. \quad (8)$$

这里, 假定了 f, θ 在 $x = \xi$ 附近非零也非奇异. 另外, 我们考虑 g_{22}, g_{33}, g_{23} 在此邻域内也非零非奇异的情况.

另一方面, 由短程线方程可得四维静态黎曼时空中静止物体受到的沿 x 方向的重力 κ .

从坐标加速度

$$-\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d^2 x}{ds^2} = -\Gamma_{00}^1 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = -\Gamma_{00}^1 \frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} \cdot \frac{1}{g_{00}}$$

可得固有加速度 $b = -\frac{d^2 X}{d\tau^2} = \frac{d^2 X}{ds^2} = \sqrt{\gamma_{11}} \frac{d^2 x}{ds^2} = \sqrt{g_{11}} \frac{d^2 x}{ds^2}$, 其中 γ_{ij} 为纯空间度规, 对于静态, $\gamma_{ij} = g_{ij}$. $\frac{d^2 x}{d\tau^2}$ 前的负号是定义加速度与 x 轴反向而引起的.

按 Wald^[2],

$$\kappa = b \cdot \sqrt{-g_{00}} = -\frac{1}{2} g_{00,1} \sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}}. \quad (9)$$

注意, 由于我们采用号差 +2 的度规, $g_{00} = -\sqrt{g_{00}^2}$, $\theta = -\sqrt{\theta^2}$.

把(4),(7)式代入(9)式, 可得

$$\kappa = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-f}{\theta}} (x - \xi)^{\frac{m+n}{2}-1} \left[n - \frac{\theta'}{\theta} (x - \xi) \right]. \quad (10)$$

我们把 Tortoise^[1,3] 坐标变换写成更一般的形式

$$\frac{dx}{d\hat{x}} = 2\kappa \cdot (x - \xi), \quad (11)$$

$$\hat{x} = \int^x \frac{dx}{2\kappa \cdot (x - \xi)}. \quad (12)$$

下面将会看到, 只有在 $x \rightarrow \xi$ 时, $\hat{x} \rightarrow \frac{1}{2\kappa} \cdot \ln(x - \xi)$, 我们才有可能把 Klein-Gordon 方

程化成波动方程后得到 Hawking 热谱。于是我们假定在 $x \rightarrow \xi$ 时, κ 不为零也不为 ∞ , 这就必须有

$$m + n = 2, \quad n \neq 0, \quad (13)$$

于是(10)式可写成

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-f}{\theta}} \left[n - \frac{\theta'}{\theta} (x - \xi) \right]. \quad (14)$$

在 $x \rightarrow \xi$ 时, 得到视界表面重力

$$\kappa = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{-f(\xi, y, z)}{\theta(\xi, y, z)}}. \quad (15)$$

顺便指出, 视界上的切向表面重力为零,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{ds^2} &= -\Gamma_{00}^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} g^{2\alpha} g_{00,\alpha} \cdot \frac{1}{g_{00}}, \\ b_y &= \sqrt{g_{22}} \frac{d^2 y}{ds^2}, \\ \kappa_y &= b_y \sqrt{-g_{00}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g_{22} \cdot \theta} \left(-\frac{1}{\theta^2} \right) \cdot (x - \xi)^{\frac{n}{2}} \left[g^{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} + g^{23} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

下面我们将指出, n 必须大于零, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \kappa_y = 0.$$

同理,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \kappa_z = 0.$$

现在我们求解 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) = \mu^2 \Phi. \quad (16)$$

分离变量 $\Phi = \phi(x, y, z) e^{-i\omega t}$ 得

$$\begin{aligned} g^{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2g^{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} g^{11})}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{22})}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{33})}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{23})}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{32})}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = (\mu^2 + \omega^2 g^{00}) \phi. \end{aligned} \quad (17)$$

作 Tortoise 坐标变换

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{1}{2\kappa \cdot (x - \xi)} \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{1}{4[\kappa \cdot (x - \xi)]^2} \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial x} (x - \xi)}{2[\kappa \cdot (x - \xi)]^2} \frac{d}{d\xi}, \end{aligned} \quad (18)$$

得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{x}^2} - 2[\kappa + \kappa'(x - \xi)] \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} + \frac{4\kappa^2(x - \xi)^2}{g^{11}} H \\ & + \frac{2\kappa \cdot (x - \xi)}{g^{11}\sqrt{-g}} \left\{ \sqrt{-g} [f' \cdot (x - \xi)^m + mf \cdot (x - \xi)^{m-1}] \right. \\ & \left. + g^{11} \frac{(-1)}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial x} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} = \frac{4\kappa^2 \cdot (x - \xi)^2}{g^{11}} (\mu^2 + \omega^2 g^{00}) \phi, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} H = & \left\{ g^{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2g^{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} g^{22})}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{33})}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{23})}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{23})}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \right\}. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} g &= g_{00}g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}^2) = \frac{1}{f \cdot \theta} (x - \xi)^{n-m} (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)^2, \\ \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{n-m}{x - \xi} + A(x, y, z), \\ A(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}{f \cdot \theta} \right) / \left(\frac{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}{f \cdot \theta} \right) \end{aligned}$$

以及

$$2\kappa \cdot (x - \xi) \left[\frac{m}{x - \xi} + \frac{n-m}{2(x - \xi)} \right] = 2\kappa.$$

于是方程可化成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{x}^2} - 2(x - \xi) \left[\frac{\kappa f'}{f} + \frac{\kappa}{2} A - \kappa' \right] \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} + \frac{4\kappa^2(x - \xi)^{2-m}}{f} \cdot H \\ & = \frac{4\kappa^2(x - \xi)^{2-m}}{f} (\mu^2 + \omega^2 g^{00}) \phi. \end{aligned} \quad (19)$$

显然, 必须有 $m \leq 2$, 否则 $x \rightarrow \xi$ 时, 上式中有些项出现发散. 但 $m = 2$ 将与 $n \neq 0$ 矛盾[见(13)式], 所以必有 $m < 2$; 又从(4)式知, $m > 0$, 显然, 这将限制 $0 < n < 2$, 结合(13)式, 得到

$$m + n = 2, \quad 0 < m < 2, \quad 0 < n < 2. \quad (20)$$

下面将证明, 度规满足(20)式的视界将会产生热辐射.

当 $x \rightarrow \xi$ 时, (19)式化成

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{x}^2} = \frac{4\kappa^2 \omega^2}{f} (x - \xi)^{2-m} \cdot \frac{\theta}{(x - \xi)^n} \phi = \frac{4\kappa^2 \omega^2 \theta}{f} \phi.$$

把(15)式代入上式得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{x}^2} + n^2 \omega^2 \phi = 0. \quad (21)$$

分离变量 $\phi = \phi(y, z) \cdot \phi_1(\hat{x})$, 得

$$\frac{d^2 \phi_1}{d \hat{x}^2} + n^2 \omega^2 \phi_1 = 0. \quad (22)$$

其解为

$$\phi_1 = e^{\pm i n \omega \xi}.$$

于是我们得到视界上的入射波和出射波

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= e^{-i\omega(t+n\xi)} = e^{-i\omega v}, \\ \Phi_{\text{out}} &= e^{-i\omega(t-n\xi)} = e^{-i\omega v} \cdot e^{i2\omega n\xi},\end{aligned}\quad (23)$$

其中 $v = t + n\xi$ 为超前爱丁顿坐标. 由(12)式得

$$x \rightarrow \xi \text{ 时, } \xi \rightarrow \frac{1}{2\kappa} \ln(x - \xi), \quad (24)$$

代入(23)式,

$$\Phi_{\text{out}} = e^{-i\omega v} \cdot (x - \xi)^{\frac{i n \omega}{\kappa}}. \quad (25)$$

下面我们把波函数 Φ_{out} 延拓到视界内部. 因为 Φ_{out} 在视界 $x = \xi$ 处非解析, 必须通过复平面绕过该点进行解析延拓.

我们要求视界内部是 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 类空区, 因为只有 $\xi_{(t)}$ 类空区才能允许负能粒子存在. 这就要求穿过视界后 (g_{00}, g_{11}) 要改变符号, 即时空坐标互换.

我们注意到, 如果在 x 的复平面内, 以 ξ 为圆心, $|x - \xi| = \rho$ 为半径作一个圆, 并沿下半圆周把 g_{00} 和 g_{11} 从实轴上 $[(x - \xi)]$ 的幅角 $\alpha = 0$ 处解析延拓到 $\alpha = \frac{\pi}{n}$ 处, 就

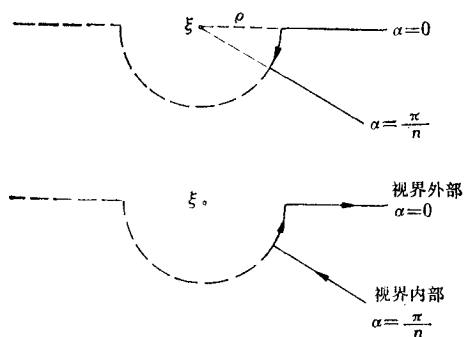


图 1

可使 (g_{00}, g_{11}) 改变符号(见图 1).

延拓前, 在实轴上

$$g_{00} = (x - \xi)^n / \theta = \frac{|x - \xi|^n}{\theta} = \rho^n / \theta,$$

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{1}{f \cdot (x - \xi)^n} = (x - \xi)^{n-2} / f \\ &= |x - \xi|^{n-2} / f = \rho^{n-2} / f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{11} \cdot (dx)^2 &= \frac{(x - \xi)^{n-2}}{f} [d(x - \xi)]^2 \\ &= \rho^{n-2} / f \cdot (d\rho)^2.\end{aligned}$$

延拓到 $\alpha = \frac{\pi}{n}$ 后,

$$g'_{00} = (\rho \cdot e^{-i\frac{\pi}{n}})^n / \theta = \rho^n e^{-i\pi} / \theta = -\rho^n / \theta,$$

$$\begin{aligned}g'_{11} (dx')^2 &= (\rho \cdot e^{-i\frac{\pi}{n}})^{n-2} / f \cdot [d(\rho e^{-i\frac{\pi}{n}})]^2 \\ &= \rho^{n-2} / f \cdot e^{-i\pi} (d\rho)^2 = -\rho^{n-2} / f \cdot (d\rho)^2.\end{aligned}$$

这里 $x - \xi = \rho \cdot e^{-i\alpha}$, ρ 为模, α 为幅角, 显然 $\rho \geq 0$.

上面的讨论指出, 在 x 的复平面内, 通过半径为 ρ 的圆沿下半圆周转动 π/n 角后, 就可到达 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 类空区——视界内部. 下面我们对波函数 Φ_{out} 作同样的解析延拓, 以得到视界内部的 Φ_{out} .

延拓前, 在视界外(即实轴上, 也即 $\alpha = 0$ 处)有

$$\Phi_{\text{out}} = e^{-i\omega v} (x - \xi)^{\frac{i n \omega}{\kappa}} = e^{-i\omega v} \rho^{\frac{i n \omega}{\kappa}} = \Phi_{\text{out}}(\rho).$$

延拓到视界内部 (即 $\alpha = \frac{\pi}{n}$ 处), 得

$$\Phi_{\text{out}} = e^{-i\omega\rho} [\rho \cdot e^{-i\frac{\pi}{n}}]^{-\frac{i\pi\omega}{\kappa}} = e^{-i\omega\rho} \rho^{-\frac{i\pi\omega}{\kappa}} \cdot e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}} = \Phi'_{\text{out}}(\rho) \cdot e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}. \quad (26)$$

统一写出视界内、外的波函数

$$\Phi_{\omega} = N_{\omega} \left[y(\alpha) \Phi_{\text{out}}(\rho) + y \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) \Phi'_{\text{out}}(\rho) \cdot e^{\frac{\omega\pi}{\kappa}} \right], \quad (27)$$

其中

$$y(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \text{ 等于 } 0 \text{ 或 } \alpha \text{ 不确定;} \\ 0 & \alpha \text{ 为不等于零的确定值.} \end{cases} \quad (28)$$

(α 不确定, 即 $\rho = 0$). 于是

$$(\Phi_{\omega}, \Phi_{\omega}) = N_{\omega}^2 \left[y(\alpha) \pm y \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) e^{\frac{2\omega\pi}{\kappa}} \right] = \pm 1 \quad (29)$$

恰在视界上 (α 不确定) 时, 有

$$(\Phi_{\omega}, \Phi_{\omega}) = N_{\omega}^2 [1 \pm e^{\frac{2\omega\pi}{\kappa}}] = \pm 1. \quad (30)$$

所以

$$N_{\omega}^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\omega\pi}{\kappa}} \pm 1} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{k_B T}} \pm 1}, \quad (31)$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k_B}. \quad (32)$$

此即所期望的由视界发出的 Hawking 热谱.

当然, 转动 $q \cdot \pi/n$ (q 为奇数) 角, 也可以延拓到 (g_{00}, g_{tt}) 改变符号的区域, 以致得到 Hawking 辐射温度是不唯一的. 如果我们考虑到史瓦西情况, 并考虑与其它方法得到的结果能够相洽 (例如用卡诺循环法定义的视界温度), 则应当选择延拓角为 π/n .

此外, 如果我们把 T 看作视界的温度, 则热力学第零定律要求在整个视界上 T 是常数, 也即 κ 是常数. 这就要求 $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f}{\theta} = \text{const.}$

不难看出 Hawking 辐射的物理意义. 视界内部存在 Killing 矢量类空区, 视界外附近由于真空涨落而产生的虚正反粒子对可以通过隧道效应而实化, 其中的负能粒子穿过隧道进入视界内, 正能粒子射向远方. 实化的粒子对虽然是相互关联的纯态, 但落入视界的负能粒子失去了几乎全部信息, 使剩下的正能粒子变为混合态, 熵大量增加, 因而产生的辐射必定是热的^[4]. 这一过程也相当于一个正能粒子逆着时间从视界内部跑到视界上, 再顺着时间向外跑向远方^[5]. 热辐射的能量来自视界内部, 即 Killing 矢量类空区, 那个区域允许负能粒子存在.

二、从 Killing 视界出发的考虑

上面我们讨论了满足(2)式的视界的 Hawking 蒸发. 但要注意, 条件(2)式是视界的充分条件, 但不是必要条件. 即使 $g'' \neq 0$, 满足(3)式的超曲面 F 仍是视界. 例如, 不难

证明, $F = h(x) \cdot (x - \xi)^L$ 在 $L > 1$ 时就是视界. 为了使我们的讨论能对全部视界有效, 下面我们从 Killing 视界出发来进行考虑.

在静态黎曼时空中, Killing 视界(即无限红移面)与事件视界重合. 决定 Killing 视界的条件也就是决定事件视界的条件.

我们知道, 决定 Killing 视界的充要条件是 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 长度为零, 即

$$\xi_{\mu(t)}\xi^{\mu}_{(t)} = g_{00} = 0. \quad (33)$$

从(33)式出发来进行讨论. 假定度规仍有(4), (5), (7), (8)式的形式, 只不过(33)式要求 $n > 0$, 而不像(4)式是要求 $m > 0$, 于是类似于(20)式, 我们有

$$m + n = 2, \quad m < 2, \quad n > 0. \quad (34)$$

显然, 对度规形式的要求比(20)式放宽了. 这里的讨论包含了四维静态黎曼时空中与时间无关的全部视界面. 上节讨论的情况只是这里的一部分.

用与上节完全相同的方法, 不难得到与(31), (32)式完全一样的结果.

综上所述, 在四维静态黎曼时空中, 如果

1) 存在与时间无关的视界, 它把时空分成互不连通的两个区域, 一个区域中 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 类时, 另一个区域中 $\xi_{(t)}$ 类空;

2) 度规是实数而且有如下形式:

$$g_{00} = (x - \xi)^n / \theta(x, y, z), \quad g_{11} = 1/f(x, y, z) \cdot (x - \xi)^m,$$

其中

$$m + n = 2, \quad m < 2, \quad n > 0.$$

$\theta, f, g_{ij} (i, j = 2, 3)$ 在视界附近非零也非奇异;

$$3) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x, y, z)}{\theta(x, y, z)} = \text{常数};$$

4) 视界的“表面重力” κ 非零也非奇异; 则将一定有 Hawking 热辐射自视界附近产生, 辐射温度正比于视界的“表面重力” κ .

$$N_{\omega}^2 = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{k_B T} \pm 1}}, \quad T = \frac{\kappa}{2\pi k_B}.$$

这里 k_B 是玻耳兹曼常数, 正号对应于费密子, 负号对应于玻色子.

显然, 当 $m = n = 1$ 时, 包括史瓦西黑洞, de sitter 宇宙视界等情况. 当 $m = 0, n = 2$ 时, 包括 Rindler 辐射的情况.

三、几个例子

1) 史瓦西时空

由 $g_{00} = 0$ 得到史瓦西时空在 $r = 2M$ 处有视界. 视界表面重力为

$$\lim_{x \rightarrow 2M} \kappa = \frac{1}{4M}.$$

热辐射的温度为

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k_B} = \frac{1}{8\pi M k_B}. \quad (35)$$

2) Schwarzschild-de Sitter 宇宙^[6,7]

由 $g_{00} = 0$ 可得

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 = \frac{-\Lambda}{3r} \left[r^3 - \frac{3}{\Lambda} r + \frac{6M}{\Lambda} \right] = 0,$$

共有三个实根

$$\begin{aligned} r_- &= -2\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha, \\ r_+ &= 2\Lambda^{\frac{1}{2}} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right), \quad \left(\alpha = \frac{1}{3} \arccos(9M\Lambda^{\frac{1}{2}}) \right) \\ r_c &= 2\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

其中 $r_- < 0$ 无意义.

对于 r_+

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{g_{00,1}}{2} \sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\Lambda}{3r} [(r-r_+)(r-r_c) + (r-r_-)(r-r_+) + (r-r_-)(r-r_c)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Lambda}{3r^2} (r-r_-)(r-r_+)(r-r_c) \right\}. \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow r_+$ 时,

$$\kappa_H \rightarrow \frac{-\Lambda}{6r_+} (r_+ - r_-)(r_+ - r_c) \quad (36)$$

$$T_H = \frac{\kappa_H}{2\pi K_B} = \Lambda(12\pi r_+ K_B)^{-1} (r_+ - r_-)(r_c - r_+). \quad (37)$$

采用渐近近似得

$$T_H = \frac{1}{8\pi M K_B} - \frac{\Lambda M}{6\pi K_B}. \quad (38)$$

这是 Schwarzschild-de Sitter 宇宙中黑洞视界的辐射温度. 当 $\Lambda \rightarrow 0$ 时, 回到史瓦西黑洞的情况.

对于 r_c :

当 $r \rightarrow r_c$ 时,

$$\kappa_c \rightarrow \frac{\Lambda}{6r_c} (r_+ - r_c)(r_c - r_-), \quad (39)$$

$$T_c = \frac{\kappa_c}{2\pi K_B} = \frac{\Lambda}{12r_c K_B} (r_+ - r_c)(r_c - r_-). \quad (40)$$

采用渐近近似得

$$T_c = \frac{\Lambda}{6\pi K_B} \left(2M - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right). \quad (41)$$

这是 Schwarzschild-de Sitter 宇宙视界的辐射温度. 当 $\Lambda \rightarrow 0$ 时, 回到 de Sitter 宇宙视界的情况.

3) Rindler 辐射^[8]

Rindler 坐标系下的线元是

$$ds^2 = -Z^2 dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2. \quad (42)$$

由 $g_{00} = 0$ 出发, 我们得到 Rindler 时空的视界在 $Z = 0$ 处, 视界的表面重力

$$\kappa = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}} g_{00,1} = 1, \quad (43)$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k_B} = \frac{1}{2\pi k_B}. \quad (44)$$

热谱为

$$N_\omega^2 = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{k_B T}} \pm 1} = \frac{1}{e^{2\pi\omega} \pm 1}. \quad (45)$$

(44), (45) 式是用坐标量表出的, 若改用固有量

$$E = \omega / \sqrt{-g_{00}}, \quad T' = T / \sqrt{-g_{00}}. \quad (46)$$

表示, 并考虑到 $\kappa = b \cdot \sqrt{-g_{00}}$,

则

$$N_\omega^2 = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T'}} \pm 1}, \quad (47)$$

$$T' = \frac{b}{2\pi k_B}. \quad (48)$$

我们用上述方法不仅得到了 Rindler 辐射, 而且明确指出了该辐射确实来自视界.

我们看到, 在有关 Hawking 辐射和 Rindler 时空的讨论中, 等效原理仍然成立, 而且 Hawking 辐射的存在与时空曲率无关, 只与时空的动力学效应 κ 有关.

把我们的定理应用于上面三个例子的结果, 与前人的结论完全一致.

四、电磁场存在的情况

在电磁场存在的情况下 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ieA_\nu \right) \Phi \right] = \mu^2 \Phi, \quad (49)$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right) + G(x, y, z) = \mu^2 \Phi, \quad (50)$$

其中

$$G(x, y, z) = -\frac{ie}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} A_\nu) \Phi - 2ieA_\mu g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi - e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \Phi. \quad (51)$$

对于静电磁场的情况, 即 A_μ 与 t 无关时, 有

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = & -\frac{ie}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{-g} g^{11} A_1) \Phi \\ & -\frac{ie}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ij} A_j) \Phi - 2ie \left[A_0 g^{00} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A_1 g^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$+ A_i g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \Big| - e^2 (g^{00} A_0^2 + g^{11} A_1^2 + g^{ij} A_i A_j) \Phi,$$

其中 $i, j = 2, 3$;

$$\begin{aligned} \frac{4\kappa^2(x-\xi)^2}{g^{11}} G(x, y, z) = & \frac{-4\kappa^2\theta}{f} [2\omega e A_0 + e^2 A_0^2] \Phi + 4\kappa^2(x-\xi)^2(-ie) \\ & \cdot \left\{ \left[\frac{A_1(n-m)}{2(x-\xi)} - \frac{A_1}{2} \left(\frac{f'}{f} + \frac{\theta'}{\theta} \right) + \frac{A_1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x} (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)}{(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)} + \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{A_1 f'}{f} \right. \right. \\ & + \left. \frac{mA_1}{x-\xi} \right\} \Phi + \frac{4\kappa^2(x-\xi)^{2-m}}{f} \left[-\frac{ie}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ij} A_j) \cdot \Phi \right] + \frac{4\kappa^2(-2ie)}{f} \\ & \cdot \left[\frac{A_1 f}{2\kappa} (x-\xi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (x-\xi)^{2-m} A_i g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right] + 4\kappa^2(x-\xi)^2 \cdot A_1^2 e^2 \Phi \\ & + \frac{4\kappa^2(x-\xi)^{2-m}}{f} g^{ij} A_i A_j e^2 \Phi. \end{aligned} \quad (52)$$

因为 $m < 2$, 所以当 $x \rightarrow \xi$ 时,

$$\frac{4\kappa^2(x-\xi)^2}{g^{11}} G(x, y, z) \rightarrow n^2(2\omega e A_0 + e^2 A_0^2) \Phi. \quad (53)$$

这里用了 $\lim_{x \rightarrow \xi} \kappa = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{-f}{\theta}}$.

把(52)式代入(50)式,则在分离变量 $\Phi = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t}$, 并作 Tortoise 坐标变换之后,令 $x \rightarrow \xi$, 得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{x}^2} + n^2(\omega + e A_0)^2 \phi = 0. \quad (54)$$

但 $A_0 = -V$, V 为视界上的静电势,所以在分离变量 $\phi = \phi_1(\hat{x})\phi(y, z)$ 后,得

$$\frac{d^2 \phi_1}{d\hat{x}^2} + n^2(\omega - \omega_0)^2 \phi_1 = 0, \quad (55)$$

其中

$$\omega_0 = eV. \quad (56)$$

最后可得相应的热辐射

$$N_\omega^2 = \frac{1}{e^{\frac{\omega - \omega_0}{k_B T} \pm 1}}, \quad (57)$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k_B}. \quad (58)$$

如果电磁场很弱,但随时间变化,度规仍可近似作为稳态处理,则 $G(x, y, z)$ 中多一项

$$\frac{-ie}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-g} g^{00} A_0) \Phi = -ie g^{00} \frac{\partial A_0}{\partial t} \cdot \Phi, \quad (59)$$

而

$$\frac{4\kappa^2(x-\xi)^2}{g^{11}} \left(-ie g^{00} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \Phi = \frac{4\kappa^2(x-\xi)^2}{f \cdot (x-\xi)^m} \cdot \frac{\theta}{(x-\xi)^n} (-ie) \frac{\partial A_0}{\partial t} \cdot \Phi$$

$$= -\frac{ie4\kappa^2\theta}{f} \frac{\partial A_0}{\partial t} \cdot \Phi.$$

当 $x \rightarrow \xi$ 时,有

$$-\frac{ie4\kappa^2\theta}{f} \frac{\partial A_0}{\partial t} \Phi \rightarrow ien^2 \frac{\partial A_0}{\partial t} \cdot \Phi. \quad (60)$$

若 A_0 是交变场, $A_0 = A_0 \cdot e^{-i\omega t}$, 则方程(54)式可化成

$$\frac{d^2\phi_1}{d\lambda^2} + n^2[(\omega - \omega_0)^2 - eQV]\phi_1 = 0. \quad (61)$$

辐射谱为

$$N_\omega = \frac{1}{e \frac{[(\omega - \omega_0)^2 - eQV]^{\frac{1}{2}}}{k_B T} \pm 1}. \quad (62)$$

显然,对辐射谱有影响的只是 $V(t)$, 当 V 与 t 无关时, (62)式就回到(57)式.

综上所述,对于稳定电磁场或弱的非稳定电磁场,都只有电势 V 对热辐射有影响. 静电场的影响以 $\omega_0 = eV$ 的形式出现在 Hawking 热谱中. 但要注意, V 不一定起源于视界内部的电荷,它也可以起源于视界外部的电荷. 若视界处于电场 $V(x, y, z)$ 中,视界面上各点 V 不同,则各点的热谱将不同,虽然辐射温度是一样的.

Reissner-Nordström 黑洞的 Hawking 辐射,即这里的 $m = n = 1$, 而且 $V = Q/r_+$ 的情况.

本文是在刘辽副教授的指导下完成的;承中国科学技术大学方励之教授审阅并提出宝贵的修改意见;在写作过程中,作者与吴咏时、桂元星、郑玉昆、许殿彦等同志作过有益的讨论,在此一并表示深切感谢.

参 考 文 献

- [1] 刘辽、赵峰,“稳态黎曼时空中的 Hawking 辐射”(在第十届得克萨斯国际相对论天体物理会议上的报告, 1980, 12).
- [2] R. M. Wald, “Black Holes, Thermodynamics and Time Reversibility” (Preprint, 1980, Enrico Fermi Institute, Chicago, Illinois, U. S. A.)
- [3] T. Damour, R. Ruffini, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 332.
- [4] J. D. Bekenstein, *Physics Today*, **33**(1980), 24.
- [5] S. W. Hawking, *Scientific American*, **236**(1977), 34.
- [6] G. Denardo and E. Spallucci, *IL Nuovo Cimento*, **53B**(1979), 334.
- [7] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **15**(1977), 2738.
- [8] L. Parker, in “Asymptotic Structure of Space-time”, ed. by F. P. Esposito & L. Witten (Plenum Press New York, 1977), 107.

HAWKING RADIATION IN FOUR DIMENSIONAL STATIC RIEMANN SPACETIME

ZHAO ZHENG

(Department of Astronomy, Beijing Normal University)

ABSTRACT

It has been proved in this paper that in general the horizons in 4-dimensional static Riemann spacetime will produce Hawking radiations and the radiative temperature is proportional to the surface gravity κ of the horizon.

This work is extended to the state that there exist electromagnetic fields. We point out that the static electric potential which effects Hawking radiative spectrum may originate from the electric charge inside the horizon as well as outside the horizon.

The Rindler radiations in uniform accelerated frames and the Hawking radiations from Schwarzschild B. H., Reissner-Nordstrom B. H. as well as Schwarzschild-de Sitter universe horizons are the special cases of our present general theory.

It is pointed out that the equivalence principle is still effective and Rindler radiations do originate from the horizons of the Rindler frames of reference. Hawking radiation only has relation with dynamic effect κ near the horizon, but has no relation with curvature of the spacetime.