

在相干重整化中的非线性漂移波能量守恒

章 扬 忠

(中国西南物理研究所)

1981年2月20日收到

提 要

通过对 $\langle \mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle$ 的直接微扰展开证明了在六级近似以内相干重整化理论满足非线性漂移波的能量守恒。

本文是文献[1,2]的继续。目的在于通过证明相干重整化理论满足非线性漂移波的能量守恒,从而进一步论证了这种微扰理论的合理性。

在文献[1]中已经提到过,以往的 Власов-Poisson 方程重整化微扰理论的一个严重缺点在于:当把它们应用于非线性漂移波问题时会出现能量不守恒的困难。Dupree^[3]首先指出这一点,并在三级微扰内解决了这一困难。以后, Krommes 又根据 DIA 的理论指出^[4],为了保证能量守恒,必须要求平均分布函数做重整化修正,并在 DIAC 的扩散近似下证明了能量守恒。但是他们的证明仅限于三级近似之内。在这个近似下, DIA 理论中的非相干源效应和极化部分都已被略去^[5]。特别是 Krommes 所建议的 DIAC 如果是一种合理的近似,那末应当证明极化部分加入之后也能保证能量守恒。但从目前看来这似乎是困难的。另一方面,在文献[2]中曾经指出,相干重整化理论和 DIA 的一个重要区别在于前者的重整化平均分布函数仅由相干部分所贡献,而后者的极化部分中却包含了绝对非相干源的贡献。从这点来看,相干重整化的微扰展开方式是否能够满足能量守恒就具有特殊重要的意义。

一般地证明相干重整化微扰论中的每一级都能够满足能量守恒是困难的。本文采用的方法是直接导出横向漂移电流所做的功 $\langle \mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle$ 在相干重整化下的微扰展开式,然后逐级地证明它们为零。发现一直做到六级微扰这一结论仍然正确。

漂移波能量守恒问题是指:仅当存在电漂移的情况下横向漂移电流的功率密度 $\langle \mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle$ 应当为零。不失一般性可以利用平板模型,这时对应

$$\hat{L}_0 \langle f \rangle = -\mathbf{k} \cdot [\partial_\parallel + (c/BL_n) \mathbf{y}_0] \langle f \rangle. \quad (1)$$

而波-粒子顶点为

$$\hat{L}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -K'_\parallel \partial_\parallel - (ic/B) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{z}_0). \quad (2)$$

利用空间均匀性和静电波条件,

$$\langle \mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle = ie \int d\mathbf{v} d\mathbf{k} G_k^{(0)-1} \langle f_k \phi_k^* \rangle. \quad (3)$$

(3)式表明,当仅考虑共振粒子时,能量守恒是显然的。以往的微扰论并不出现困难^[3],按

文献[1]的(5.1)式: $f_k = \mathcal{A}\phi_k + \mathcal{B}$ 和(2.4)式: $G_k^{(0)-1} = G_k^{-1} - i\Gamma_k$, 代入后, 得到

$$\langle \mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle = ic \int d\nu dk \{ (\mathcal{A}/G_k) I_k + (-i\Gamma_k \mathcal{A}) I_k + \langle (\mathcal{B}/G_k) \phi_k^* \rangle + (-i\Gamma_k) \langle \mathcal{B} \phi_k^* \rangle \}. \quad (4)$$

这里 $I_k \equiv \langle \phi_k \phi_k^* \rangle$. (4) 式右方的四项都可以采用连通图表示. 其中 $(\mathcal{A}/G_k)$ 应采用文献[2]中附录四所给出的绝对非相干部分图形; 而文献[2]附录三中相干部分的贡献还要做进一步的叠代. 但这仅使绝对非相干图形的求和条件放宽(可以包括 k) 而不增加新的图形. 关于 $\mathcal{B}$ 的图形由文献[1]的附录二给出. 这些图形的非涨落贡献对应了闭合的多波顶点.



图1 引理 I 的图形结构

为方便起见先证明以下引理:

引理 I 和连通图第一个顶点相联系的两条波线 k 和 k' 如果相交于另一多波顶点时, 该图的贡献必为零(见图 1).

证明: 对于连通图来说, 这样的图形中和 k 及 k' 有关的部分可以写成

$$\hat{L}(k, k') P(k - k') \phi_k \phi_k^*.$$

按照(2)式, 对第一个顶点来说由于对速度积分后纵向运动的贡献为零, 有贡献的部分仅是

$$\hat{L}(k, k') \rightarrow -(ic/B) k \cdot (k' \times z_0) \equiv \tilde{L}(k, k'). \quad (5)$$

它在 Z -变换 ($k \rightarrow -k'$, $k' \rightarrow -k$) 下出现一个负号, 而 $k - k'$ 及 $\phi_k \phi_k^*$ 均为 Z -变换下的不变量. 故引理得证.

引理 II 和连通图第一个顶点相联系的两条波线 k 和 k' 如果均为波-粒子内线, 那末该图与它对偶的 (k, k') Z -变换图之和必为零.

证明: 类似于证明引理 I 的分析方法, 这两个对偶图(例如图2)中的一个在 Z -变换下必为另一图的负值. 故引理得证.

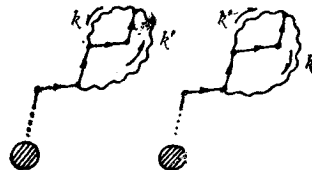


图2 引理 II 的图形结构之例

一级微扰中仅是 $(\mathcal{A}/G_k)$ 中的 $\odot$ 有贡献. 按照(1)式, 它在 k 反演下变号, 因而对(4)式贡献为零.

二级微扰下仅非相干源有一个图(图 3(a)), 按引理 I, 它的贡献为零. 三级微扰中非相干源给出的图 3(b) 也由于引理 I 为零; 而相干部分 $(\mathcal{A}/G_k)$ 和相干自能部分 $(-i\Gamma_k \mathcal{A})$ 给出的两个图(图 3(c) 和 (d)) 按引理 II 可知它们的和为零. 这正是 Krommes 利用 DIAC 的扩散近似已经证明的结果^[4]. 显然, 这说

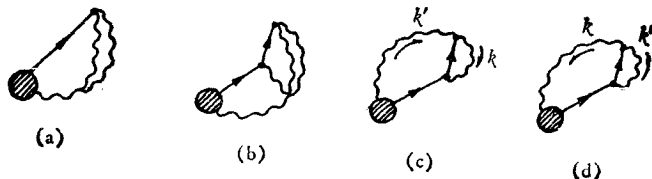


图 3

明 DIAC 至少在三级近似之内满足能量守恒条件是由于非相干源不给出贡献的缘故。

非相干源的多波相互作用从四级微扰起开始有贡献, 它们给出了两个三波相互作用图形(图 4(a), (b)) 被相干部分的一个对应图形抵消, 而相干自能部分不存在四级微扰图形。

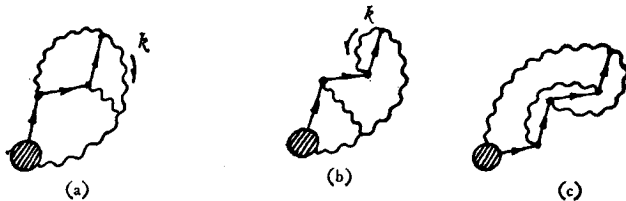


图 4

在五级微扰中相干自能部分的重整化传播量四级修正开始起作用, 对应的图形为图 4(c), 它与相干部分中的对应图形相抵消。五级微扰中出现的另一现象是相干部分本身有两个对偶图形(图 5(a), (b)), 按引理 II, 它们为零。

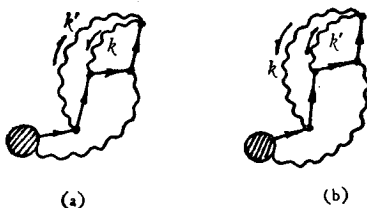


图 5

六级微扰中相干部分共给出 18 个非零图形, 而非相干源 $\langle (\mathcal{B}/G_k)\phi_k^* \rangle$ 的 11 个图中由于引理 I 为零的共有四个, 其余七个和相干部分的对应图形对消。而相干自能部分的两个图和非相干自能部分的三个图又消去相干部分的五个图。这时相干部分还剩下三对对偶图形, 按引理 II 它们的贡献为零, 至此为止, 已经证明了直做到六级微扰时, 每一级近似都满足能量守恒条件。

从以上的证明可以看出: 单 k 波不能保证能量守恒, 也就是说, 不同 k 波之间存在有能量交换才保证了能量守恒。这支持了 Krommes 对 Dupree 工作的批评^[4]。另一方面, 如果考虑到纵向漂移波的存在, 一种速度的粒子也不能保证能量守恒, 而仅考虑横向漂移波时却可以。

本文结论的意义在于: 它证明了相干重整化理论是目前唯一适用于研究非线性漂移波的高级微扰理论(注意, 这里所说的三级微扰实际上是最低级的非平庸的非线性效应)。

参 考 文 献

- [1] 章扬忠, 物理学报, **30**(1981), 1020.
- [2] 章扬忠, 物理学报, **30**(1981), 1206.
- [3] T. H. Dupree, D. J. Tetreault, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 425.
- [4] J. A. Krommes, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 736.
- [5] J. A. Krommes, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 2168.

ENERGY CONSERVATION OF NON-LINEAR DRIFT WAVES IN THE COHERENT RENORMALIZATION

ZHANG YANG-ZHUNG

(Southwestern Institute of Physics Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

By using the perturbative expansions of $\langle j_{\perp} \cdot E_{\perp} \rangle$ it was proved that the coherent renormalization theory acquired the energy conservation of non-linear drift waves within the sixth order.