

微裂纹演化的随机模型

邢 修 三

(中国科学院原子能研究所)

1980年12月24日收到

提 要

本文用非平衡统计的概念和方法探讨了各种断裂过程中的共同问题——微裂纹或微空洞的演化。文中从描述微裂纹演化过程的多元主方程出发,导出了微裂纹演化动力学方程,指出了微观机理与宏观过程相结合的途径,讨论了微裂纹分布函数应有的性质。

一、引 言

固体在外应力作用下,随着载荷方式和温度条件的不同,可有几种不同类型的断裂。当外应力是定向的(如拉伸或压缩),在低温或室温,多数金属和离子晶体及共价晶体发生脆性断裂;在滑移充分的室温或高温,变为范性断裂;在扩散充分的更高温度且当外应力较小时,呈现蠕变断裂;若外应力非定向的,而是交变的,金属发生疲劳断裂。

不同类型的断裂,其微观机理不同。脆性断裂^[1]是由滑移位错产生的微裂纹长大和传播引起的;范性断裂^[2]是由范性变形产生的微空洞长大和相互合并长大引起的;蠕变断裂^[3,4]是蠕变过程中成核的微空洞或微裂纹扩散长大和相互合并长大引起的;至于疲劳断裂^[5],仍是微裂纹不断扩展引起的。

尽管类型和微观机理不同,各种断裂之间仍有共同特点。这就是:固体的各种断裂都有一个长短不等的发展过程,从宏观外形来说,固体在不断发生范性变形(即使脆性断裂也有极小的范性变形),从微观结构来说,若非预先存在一个大裂纹,固体内部总有大量不同大小的微裂纹或微空洞在不断演化(这里所谓演化,即是成核、长大和相互合并三部分的总称)。这些宏观和微观变化,都是不可逆的。正因此,可以认为,所有断裂过程都是不可逆的动力学过程,而微裂纹或微空洞的成核、长大和相互合并,最后由一个主裂纹导致断裂,却是各种断裂过程的实质和共同规律。

作者^[6]在研究脆性断裂时,曾试图把微观机理和宏观过程结合起来,从理论上将整个断裂过程描述成微裂纹系统成核长大的非平衡统计过程和最可几的单个主裂纹的传播过程,从而导出所有重要的宏观力学量。本文正是在此基础上,进一步把各种断裂过程中的共同问题——微裂纹或微空洞系统的演化都看成是个非平衡统计过程,并用随机过程的理论方法来研究。这样做的目的:一是想用统一的概念和方法来研究固体的各种断裂,二是用更严格的数学方法来描述微裂纹或微空洞的演化过程。

为精简用词,下面一概将微裂纹或微空洞都称之为微裂纹,所有讨论,对两者同样适用,无必要时,不再区别指出.

二、多元主方程

如上所述,在外应力作用下,微裂纹系统在不断演化.由于实际固体内部微观成分、缺陷及显微组织的不均匀性,各个微裂纹的成核条件、长大速率及其与其他微裂纹的相互合并几率,都将随机变化.正因此,我们才将微裂纹系统的演化过程看成是个非平衡统计过程.现在就来导出描述这种演化过程的主方程.为简化起见,我们只讨论形状相同的一维长度的微裂纹,并简设它们在固体内部的空间取向分布是均匀的.设 t 表示固体受外应力作用的时间,动力学变量 c 表示微裂纹长度(或微空洞半径).密度分布函数 $N_c dc \equiv N(t, c)dc$ 表示 t 时单位体积内在长度 c 和 $c + dc$ 间形成的微裂纹的数目.多元几率 $P(\{N_c\}, t)\{\delta N_c\} \equiv P(N_{c_1}, N_{c_2}, \dots, N_{c_i}, \dots, t)\delta N_{c_1}\delta N_{c_2}\dots\delta N_{c_i}\dots$ 表示 t 时形成一组长度为 $(c_1, c_2, \dots, c_i, \dots)$ 而密度各在 N_{c_1} 和 $N_{c_1} + \delta N_{c_1}$ 间、 N_{c_2} 和 $N_{c_2} + \delta N_{c_2}$ 间... N_{c_i} 和 $N_{c_i} + \delta N_{c_i}$ 间...的微裂纹的几率. $W(\{N_c\} \rightarrow \{N'_c\})$ 表示单位时间内一组密度为 $\{N_c\}$ 的微裂纹演化为另一组密度为 $\{N'_c\}$ 的微裂纹的几率.由于微裂纹的成核长大和合并仅与当时及稍早的外应力和固体的微观结构有关,而与其更早的历史条件无关,故微裂纹系统的演化过程可看成是个马尔柯夫过程,根据几率平衡原理,描述这个过程的多元主方程应为

$$\frac{\partial P(\{N_c\}, t)}{\partial t} = \int [W(\{N'_c\} \rightarrow \{N_c\})P(\{N'_c\}, t) - W(\{N_c\} \rightarrow \{N'_c\})P(\{N_c\}, t)]\{\delta N_c\}. \quad (1)$$

为了使(1)式具体化,就需进一步结合微裂纹系统演化包含着成核长大和合并三部分的具体内容来讨论.考虑到数学上处理的相似性,我们将成核长大作为一部分来讨论,而将合并作为另一部分来讨论,即多元主方程在形式上可分为两部分

$$\frac{\partial P(\{N_c\}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^{ns} P(\{N_c\}, t)}{\partial t} + \frac{\partial^k P(\{N_c\}, t)}{\partial t}. \quad (2)$$

(2)式右边第一项为成核长大项,第二项为合并项.

现在来求这二者的具体表示.设 $q_{c_i} dc_i \equiv q(t, c_i)dc_i$ 为 t 时单位时间单位体积内微裂纹在长度 c_i 和 $c_i + dc_i$ 间成核的数目, $\dot{c}_i \equiv \dot{c}(t, c_i)$ 为 t 时长度为 c_i 的微裂纹的长大速率, Δc_i 为变化 dc_i 时由于随机性而使微裂纹 c_i 所作的实际变化, $\pm \frac{1}{\Delta c_i} (\dot{c}N)_{c_i}$ 为单位时间单位体积内由于长大而经 c_i 端在单位长度内长入或长出的微裂纹数目,则微裂纹成核长大而引起多元几率的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{ns} P(\{N_c\}, t)\{\delta N_c\}}{\partial t} = & \int d\mathbf{i} \{ [qP(\{N_c\}, t)]_{(N-\delta N)_{c_i}} - [qP(\{N_c\}, t)]_{N_{c_i}} \} \{\delta N_c\}_A \\ & + \int \frac{d\mathbf{i}}{\Delta c_i} \{ [\dot{c}NP(\{N_c\}, t)]_{(N-\delta N)_{c_i-\Delta c_i}} - [\dot{c}NP(\{N_c\}, t)]_{N_{c_i}} \} \{\delta N_c\}_A. \end{aligned} \quad (3)$$

上式右边第一部分是成核使微裂纹密度变化而引起的,第二部分是长大使微裂

纹密度变化而引起的, δN_c 是由于成核或长大而使长度为 c 的微裂纹的密度变化数, $\{\delta N_c\} = \delta N_c \{\delta N_c\}_A$. 注意: 在成核部分第一项的右下标用的是 $(N - \delta N)_{c_i}$ 符号, 而在长大部分第一项的右下标用的却是 $(N - \delta N)_{c_i - \Delta c_i}$ 符号, 因长大是由小的微裂纹 $c_i - \Delta c_i$ 变成 c_i 的, 而成核则是看成在 c_i 处产生的.

在研究微裂纹的相互合并时, 鉴于固体内部微裂纹的密度通常都较稀薄, 因而只考虑两个微裂纹间的相互合并, 略去三个以上的相互合并项. 设 $\omega(c_i, c_j, c)$ 为微裂纹 c_i 和 c_j 在单位时间内合并成微裂纹 c 的几率, 则由于合并使微裂纹密度变化而引起多元几率的变化率为

$$\frac{\partial^k P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}}{\partial t} = \int di \int dj [\omega(c_i, c_j, c) N'_{c_i} N'_{c_j} P(\{N'_c\}, N_{c_i} + \delta N_{c_i}, N_{c_j} + \delta N_{c_j}, N_c - \delta N_c, t) - \omega(c, c_j, c_i) N_c N_{c_j} P(\{N_c\}, t)] \{\delta N_c\}_A, \quad (4)$$

其中

$$\delta N_{c_i} + \delta N_{c_j} \rightarrow \delta N_c$$

表示 δN_{c_i} 个微裂纹与 δN_{c_j} 个微裂纹合并成 δN_c 个微裂纹.

将(3)与(4)式代入(2)式, 即得我们所求的具体描述微裂纹系统演化过程的多元主方程.

三、主方程展开式

为了导出微裂纹演化动力学方程, 先将组成多元主方程的(3)式和(4)式各自展开.

首先, 我们引入阶梯算符 $\exp\left(\pm \delta N_c \frac{\partial}{\partial N_c}\right)$, 它满足

$$\exp\left(\pm \delta N_c \frac{\partial}{\partial N_c}\right) \phi(N_c) = \phi(N_c \pm \delta N_c). \quad (5a)$$

$$\exp\left[e^{\pm \Delta c \frac{\partial}{\partial c}} \left(\pm \delta N_c \frac{\partial}{\partial N_c}\right)\right] \phi(N_c) = \phi((N \pm \delta N)_{c \pm \Delta c}), \quad (5b)$$

其中 $\phi(N_c)$ 为 N_c 的任意函数.

1. 成核长大项的展开

利用 (5a), (5b) 式, (3) 式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}}{\partial t} &= \int di \left[\exp\left(-\delta N_{c_i} \frac{\partial}{\partial N_{c_i}}\right) - 1 \right] q_{c_i} P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\ &+ \int \frac{di}{\Delta c_i} \left\{ \exp\left[e^{-\Delta c_i \frac{\partial}{\partial c_i}} \left(-\delta N_{c_i} \frac{\partial}{\partial N_{c_i}}\right)\right] - 1 \right\} (c_i N_{c_i}) P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\ &= \int di \left\{ \exp\left[-\int dk \delta(k-i) \delta N_{c_k} \frac{\partial}{\partial N_{c_k}}\right] - 1 \right\} q_{c_i} P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\ &+ \int \frac{di}{\Delta c_i} \left\{ \exp\left[-\int dk \delta(k-i) \left(1 - \Delta c_k \frac{\partial}{\partial c_k}\right) \delta N_{c_k} \frac{\partial}{\partial N_{c_k}}\right] - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\dot{c}_i N_{c_i}) P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\
& = \int di \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n \delta(k_1 - i) \cdots \delta(k_n - i) \delta N_{c_{k_1}} \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \right. \\
& \quad \times \left. \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \right] q_{ci} P(\{N_c\}, t) \delta N_c \{\delta N_c\}_A \\
& + \int di \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n \delta(k_1 - i) \cdots \delta(k_n - i) \left[\sum_{l=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial c_l} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ m=1}}^n \left(-\frac{\partial}{\partial c_l} \right) \left(-\Delta c_m \frac{\partial}{\partial c_m} \right) \right] \delta N_{c_{k_1}} \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \right\} \\
& \times (\dot{c}_i N_{c_i}) P(\{N_c\}, t) \delta N_c \{\delta N_c\}_A. \tag{6}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^* P(\{N_c\}, t)}{\partial t} & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n \delta N_{c_{k_1}} \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \\
& \quad \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \int di \delta(k_1 - i) \cdots \delta(k_n - i) \left\{ q_{ci} + \left[\sum_{l=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial c_l} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ m=1}}^n \left(-\frac{\partial}{\partial c_l} \right) \left(-\Delta c_m \frac{\partial}{\partial c_m} \right) \right] (\dot{c}_i N_{c_i}) \right\} P(\{N_c\}, t). \tag{7}
\end{aligned}$$

(6), (7) 式中的 $\delta(k - i)$ 为 Dirac 函数.

2. 合并项的展开

我们先注意: 当 c 与 c_i 互换位置, 下列两式成立.

$$\begin{aligned}
a) \quad & \int dc \int di \int dj \omega(c, c_j, c_i) N_c N_{c_j} P(\{N_c\}, t) \\
& = \int di \int dc \int dj \omega(c_i, c_j, c) N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t), \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & \int di \int dj \int dk \omega(c_i, c_j, c) \delta(k - c) \delta N_{c_k} \frac{\delta}{\delta N_{c_k}} N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t) \\
& = \int dk \delta N_{c_k} \frac{\delta}{\delta N_{c_k}} \int di \int dj \omega(c, c_j, c_k) N_c N_{c_j} P(\{N_c\}, t). \tag{9}
\end{aligned}$$

将(4)式两边对 c 积分, 并利用(5)式和(8)式, 得

$$\begin{aligned}
\int dc \frac{\partial^* P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}}{\partial t} & = \int dc \int di \int dj [\omega(c_i, c_j, c) N'_{c_i} N'_{c_j} P(\{N_c\}, \\
& N_{c_i} + \delta N_{c_i}, N_{c_j} + \delta N_{c_j}, N_c - \delta N_c, t) - \omega(c, c_j, c_i) N_c N_{c_j} P(\{N_c\}, t)] \{\delta N_c\}_A \\
& = \int dc \int di \int dj \omega(c_i, c_j, c) \left[\exp \left(\delta N_{c_i} \frac{\delta}{\delta N_{c_i}} + \delta N_{c_j} \frac{\delta}{\delta N_{c_j}} - \delta N_c \frac{\delta}{\delta N_c} \right) - 1 \right] \\
& \quad \times N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\
& = \int dc \int di \int dj \omega(c_i, c_j, c) \left\{ \exp \left[\int dk (\delta(k - i) - \delta(k - c)) \delta N_{c_k} \frac{\delta}{\delta N_{c_k}} \right] - 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t) \{\delta N_c\}_A \\
& = \int dc \int di \int dj \omega(c_i, c_j, c) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n [\delta(k_1 - i) - \delta(k_1 - c)] \right. \\
& \quad \cdots [\delta(k_n - i) - \delta(k_n - c)] \delta N_{c_{k_1}} \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \\
& \quad \times \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \left. \right\} N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t) \delta N_c \{\delta N_c\}_A. \quad (10)
\end{aligned}$$

(10) 式两边去积分, 得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k P(\{N_c\}, t)}{\partial t} & = \int di \int dj \omega(c_i, c_j, c) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n [\delta(k_1 - i) \right. \\
& \quad - \delta(k_1 - c)] \cdots [\delta(k_n - i) - \delta(k_n - c)] \delta N_{c_{k_1}} \\
& \quad \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \left. \right\} N_{c_i} N_{c_j} P(\{N_c\}, t). \quad (11)
\end{aligned}$$

将(7)式和(11)式代入(2)式, 则得多元主方程的展开式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(\{N_c\}, t)}{\partial t} & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dk_1 \cdots \int dk_n \delta N_{c_{k_1}} \cdots \delta N_{c_{k_{n-1}}} \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_1}}} \cdots \frac{\delta}{\delta N_{c_{k_n}}} \\
& \quad \times \left\{ di \delta(k_1 - i) \cdots \delta(k_n - i) (-1)^n \left[q_{c_i} + \left(- \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial c_l} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \Delta c_m \frac{\partial}{\partial c_l} \frac{\partial}{\partial c_m} \right) (\dot{c}_i N_{c_i}) \right] + \int di \int dj \omega(c_i, c_j, c) [\delta(k_1 - i) \\
& \quad - \delta(k_1 - c)] \cdots [\delta(k_n - i) - \delta(k_n - c)] N_{c_i} N_{c_j} \left. \right\} P(\{N_c\}, t). \quad (12)
\end{aligned}$$

设微裂纹演化的随机起伏可看成是最常用的高斯起伏, 则展开式只存在第一项和第二项, 其余各项都可略去. 利用(9)式, (11)式变为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(\{N_c\}, t)}{\partial t} & = - \int dk \frac{\delta}{\delta N_{c_k}} \left\{ q_{c_k} - \frac{\partial}{\partial c_k} (\dot{c}_k N_{c_k}) \right. \\
& \quad + \int dj [\omega(c_i, c_j, c_k) N_{c_i} N_{c_j} - \omega(c_k, c_j, c_i) N_{c_k} N_{c_j}] \left. \right\} P(\{N_c\}, t) \\
& \quad + \frac{1}{2} \int dk \int dl \delta N_{c_k} \frac{\delta}{\delta N_{c_k}} \frac{\delta}{\delta N_{c_l}} \left\{ \delta(k - l) \right. \\
& \quad \times \left[q_{c_k} + \left(- \frac{\partial}{\partial c_k} - \frac{\partial}{\partial c_l} + \Delta c_k \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{\partial}{\partial c_l} \right) (\dot{c}_k N_{c_k}) \right] \\
& \quad + \int dj [\omega(c_i, c_j, c_k) N_{c_i} N_{c_j} + \omega(c_k, c_j, c_i) N_{c_k} N_{c_j}] \\
& \quad \times [\delta(k - l) - \delta(k - i)] \left. \right\} P(\{N_c\}, t). \quad (13)
\end{aligned}$$

这就是众所周知的 Fokker-Plank 型方程, 它是我们所得的微裂纹演化多元主方程展开式(12)的近似结果.

四、演化动力学方程

所谓微裂纹演化动力学方程,是指描述微裂纹系统演化过程的动力学变量 c 的密度分布函数 $N(t, c)$ 随时间变化的方程. 按随机过程理论的标准方法^[7,8],立即由(12)式或(13)式求得 $N(t, c)$ 应遵守下列随机微分积分方程,或名广义朗之万方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(t, c)}{\partial t} = & q(t, c) - \frac{\partial}{\partial c} [\dot{c}(t, c)N(t, c)] \\ & + \int dj [\omega(c_i, c_j, c)N(t, c_i)N(t, c_j) \\ & - \omega(c, c_j, c_i)N(t, c)N(t, c_j)] + F(N_c, t), \end{aligned} \quad (14)$$

其中起伏项满足

$$\langle F(N_c, t) \rangle = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle F(N_{ck}, t)F(N_{cl}, t') \rangle = & \delta(t - t')\delta(k - l)\delta N_{ck} \left\{ q(t, c_k) \right. \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial c_k} - \frac{\partial}{\partial c_l} + \Delta c_k \frac{\partial}{\partial c_k} - \frac{\partial}{\partial c_l} \right) [\dot{c}(t, c_k)N(t, c_k)] \\ & + \int dj [\omega(c_i, c_j, c_k)N(t, c_i)N(t, c_j) + \omega(c_k, c_j, c_i)N(t, c_k)N(t, c_j)] \\ & \left. \times [\delta(k - l) - \delta(k - i)] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

(15)式和(16)式正表示随机起伏项是高斯分布的,其平均值为零,而其相关函数是 δ 函数型的.

(14)式的物理意义为:微裂纹数目随时间的变化率来自三部分:成核(右边第一项)、长大(右边第二项)、合并(右边第三项)以及由于固体微观结构不均匀性而引起这三部分的随机起伏(右边第四项).可见,它包含着微裂纹系统随机演化的全部内容.

应该指出,由于固体微观结构不均匀性而引起的随机起伏,除了集中表现于起伏项 $F(N_c, t)$ 外,实际上,本文上列各式中所有的成核率 $q(t, c)$ 、长大速率 $\dot{c}(t, c)$ 、合并几率 $\omega(c, c_i, c_j)$ 及分布函数 $N(t, c)$ 亦都是随机变量.为了将随机方程(14)变成平均值方程,我们将成核率、长大速率、合并几率及分布函数都写成

$$q(t, c) = \langle q(t, c) \rangle + \Delta q(t, c), \quad (17)$$

$$\dot{c}(t, c) = \langle \dot{c}(t, c) \rangle + \Delta \dot{c}(t, c), \quad (18)$$

$$\omega(c, c_i, c_j) = \langle \omega(c_i, c_j, c) \rangle + \Delta \omega(c_i, c_j, c), \quad (19)$$

$$N(t, c) = \langle N(t, c) \rangle + \Delta N(t, c). \quad (20)$$

上列各量右边第一项表示平均值,第二项表示其较小的随机起伏值.注意,这里的平均值仅是指对所有长度相等的微裂纹的平均值.将(17)–(20)式代入(14)式,并将平均值与随机值分开,则得

$$\frac{\partial \langle N(t, c) \rangle}{\partial t} = \langle q(t, c) \rangle - \frac{\partial}{\partial c} [\langle \dot{c}(t, c) \rangle \langle N(t, c) \rangle]$$

$$\begin{aligned}
& + \int dj [\langle \omega(c_i, c_j, c) \rangle \langle N(t, c_i) \rangle \langle N(t, c_j) \rangle \\
& - \langle \omega(c, c_j, c_i) \rangle \langle N(t, c) \rangle \langle N(t, c_j) \rangle], \quad (21) \\
\frac{\partial \Delta N(t, c)}{\partial t} = & \Delta q(t, c) - \frac{\partial}{\partial c} [\langle \dot{c}(t, c) \rangle \Delta N(t, c) - \langle N(t, c) \rangle \Delta \dot{c}(t, c)] \\
& + \int dj \{ [\Delta \omega(c_i, c_j, c) \langle N(t, c_i) \rangle \langle N(t, c_j) \rangle + \langle \omega(c_i, c_j, c) \rangle \\
& \times (\langle N(t, c_j) \rangle \Delta N(t, c_j) + \Delta N(t, c_j) \langle N(t, c_j) \rangle)] \\
& - [\Delta \omega(c, c_j, c_i) \langle N(t, c) \rangle \langle N(t, c_j) \rangle + \langle \omega(c, c_j, c_i) \rangle \\
& \times (\langle N(t, c) \rangle \Delta N(t, c_j) + \Delta N(t, c) \langle N(t, c_j) \rangle)] \} + F(\langle N_c \rangle, t). \quad (22)
\end{aligned}$$

在(22)式中,略去了二次随机项,并以 $F(\langle N_c \rangle, t)$ 代替 $F(N_c, t)$.

这样,(21)式就给出了微裂纹系统的平均密度分布函数随时间变化的方程,其物理意义与(14)式相同,只不过各量都是平均值,不再出现随机起伏的影响.

(22)式则表示微裂纹系统的密度分布函数的起伏值随时间变化的方程.

(14)式和(21)式正都是我们所求的微裂纹系统演化的动力学方程,只不过前者是随机方程,能明显反映微裂纹演化的随机性,后者是平均值方程,便于理论计算.

为了便于书写,略去(21)式中各量的平均值符号 $\langle \rangle$,只记其仍是平均值内容,即(21)式可写为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(t, c)}{\partial t} = & q(t, c) - \frac{\partial}{\partial c} [\dot{c}(t, c) N(t, c)] \\
& + \int dj [\omega(c_i, c_j, c) N(t, c_i) N(t, c_j) \\
& - \omega(c, c_j, c_i) N(t, c) N(t, c_j)]. \quad (23)
\end{aligned}$$

由于两个微裂纹合并成一个,(14)式和(23)式积分号内的 c_i, c_j 和 c 间总存在一种关系式,使得 c_i 可由 c_j 和 c 表示,从而可由方程式中消去.例如,当合并前后微裂纹长度不变时,则积分号内前一项中有 $c_i + c_j = c$,后一项中有 $c + c_j = c_i$.

若所有微裂纹核的长度相等,且以 c_0 表示,则

$$q(t, c) = q(t) \delta(c - c_0). \quad (24)$$

$q(t)$ 表示 t 时单位时间单位体积内微裂纹成核的平均数目.

当已知 $q(t, c)$, $\dot{c}(t, c)$ 和 $\omega(c_i, c_j, c)$, 就可由(23)式解出 $N(t, c)$. 怎样才得知 $q(t, c)$, $\dot{c}(t, c)$ 和 $\omega(c_i, c_j, c)$? 这就要求从微裂纹演化的微观机理出发来进行理论推算. 由于脆性断裂、蠕变断裂、疲劳断裂等各种断裂的类型和微观机理不同,它们的成核率 $q(t, c)$ 、长大速率 $\dot{c}(t, c)$ 和合并几率 $\omega(c_i, c_j, c)$ 将由哪些基本物理量决定,以什么样的函数形式决定,都将互不相同. 甚至对于同一类型的断裂(如同是脆性断裂),由于点阵结构、缺陷、显微组织及电子结构等结构层次的不同, $q(t, c)$, $\dot{c}(t, c)$ 及 $\omega(c_i, c_j, c)$ 亦将有所不同. 由此可见: 微裂纹演化过程的普遍性和演化机理的特殊性,动力学方程的相同性和方程系数的差异性,这就构成了各种断裂过程中共性和个性的对立统一.

解得了 $N(t, c)$, 就可进一步计算断裂过程中各个有关的宏观力学量^[6],从而有可能

实现微观与宏观的统一。

这样,从本文来看,如何根据各自合适的微观机理,从理论上正确推算出各种断裂的 $q(t, c)$, $\dot{c}(t, c)$ 和 $\omega(c_i, c_j, c)$, 显然是断裂理论中一项关键课题。

下面我们结合具体物理内容来讨论一下(23)式解的性质。

因为在外应力作用下,固体内部总存在着微裂纹,且因未断裂时,固体内部不会存在无限大的裂纹,故应有

$$\begin{aligned} a \quad & 0 < N(t, c) < \infty \\ b \quad & N(t, c \rightarrow \infty) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

至于 $N(t, c)$ 所满足的起始条件,可能有下列三种情况:

1. 固体内部原先不存在导致断裂的微裂纹,则

$$N(t=0, c) = 0. \quad (26)$$

2. 固体内部原先只存在一个裂纹,其长度为 c_1^0 , 则

$$N(t=0, c) = \delta(c - c_1^0)/V \quad (27)$$

V 为固体的体积。

3. 固体内部原先就存在一定数目的微裂纹,其密度分布函数为 $N_0(c)$, 则

$$N(t=0, c) = N_0(c). \quad (28)$$

最后,作点说明。本文主旨是将非平衡统计的概念和方法推广用来统一研究各种断裂过程中微裂纹的演化,以试图建立统一的断裂理论。同时,由于数学方法上是从较严格的多元主方程出发,也得到了一些新结果。第一,本文的随机方程式(12)–(14)是过去工作中没有的,它们能从理论上显示微裂纹演化过程的随机性。第二,本文的平均值方程式(21)或(23)是个非线性方程,其非线性项来自两个微裂纹的合并,犹如玻耳兹曼方程的非线性项来自两个粒子的碰撞,而过去所用的是个线性方程。这些都可以说是对过去工作的改善。

参 考 文 献

- [1] B. R. Lawn and T. R. Wilshaw, *Fracture of Brittle Solids*, (1975).
- [2] D. M. R. Taplin ed., *Fracture*, V. 2A (1977).
- [3] F. Garofalo, *Fundamentals of creep and creep rupture in metals*, (1965).
- [4] В. Р. Регель, А. И. Слущер, Э. Е. Томашевский, *Кинетическая природа прочности твердых тел*, (1974).
- [5] S. Kocanada, *Fatigue failure of metals*. (1978).
- [6] 邢修三, *物理学报*, **29**(1980), 718.
- [7] D. Bedeaux, *Phys. Letters*, **62A**(1977). 10.
- [8] L. Garrido *et al.* ed., *Stochastic process in Nonequilibrium Systems*, (1978).

THE STOCHASTIC FORMULATION OF MICROCRACKS EVOLUTION

XING XIU-SAN

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

The general problem in various fracture processes microcracks or voids evolution has been investigated by employing non-equilibrium statistical concept and method. The kinetic equation of microcrack evolution is derived from multivariated master equation describing the process of microcracks evolution. The way how to connect micro mechanism with macro process is indicated. And the inherent properties of distribution function of microcracks is discussed.