第 30 卷 第 12 期 物 理 学 报 Vol. 30, No. 12
1981 年 12 月 ACTA PHYSICA SINICA Dec., 1981

约束系统的变换性质

李 子 平
（新疆大学物理系）

1981 年 4 月 29 日收到

提 要

受约束的系统，它的运动可用非独立的态函数来描述．在约束系统的时空坐标和态函数作无穷小变换下，考虑到作用量和约束方程的变化，导致了普遍的变换结果，沿着系统运动的轨线，得到约束系统变换性质的一般方程，从而给出约束系统在变换下产生守恒律的条件，对连续系统的某些具体变换写出了其变换性质方程，在特殊情况下，变换性质方程可化为经典 Noether 定理的结果．用于经典力学作了较详细的讨论，并把 Poincaré-Cartan 不变量推广到了受约束系统．

一

对称性和守恒律有密切的联系，从对称性出发导出守恒律主要有两种方法：分析系统运动方程的对称性质[1]，或借助于变分原理的不变性所联系的 Noether 定理[2]．这个定理指出：使作用量（或拉氏量）不变（或规范变式）的无穷小变换，导致一种守恒律．近来对 Noether 定理的研究有所进展[3]，例如，研究了其逆定理[4]，将其推广到非保守力学系统[5]，作者还探讨了推广到约束系统的可能性[6]，对于非完整约束，一般地说，系统的对称变换不产生经典 Noether 定理的守恒量．对于受约束的系统，究竟在什么条件下，变换需满足什么要求，才会产生经典 Noether 定理的守恒量呢？这里继续讨论这方面的问题．

在经典的 Noether 定理中，确定系统拉氏量的态函数（力学中的广义坐标，场论中的场函数等等），是彼此独立的，用变分原理时，是作为自由变分来处理的．但是，在实际问题中，描述系统的态函数彼此间往往满足一些约束关系，例如，经典力学中的完整和非完整约束，连续介质中热力学关系的约束，场论中场函数满足的附加条件等等．这里我们仍基于变分原理来研究用非独立态函数描述的受约束系统，其运动方程由约束条件下的限制变分给出．在约束系统的时空坐标和态函数作无穷小变换下，考虑到系统作用量和约束方程的改变，我们导致了变换的普遍结果，在利用约束系统的运动方程之后，即沿着约束系统运动的轨线，得到了约束系统变换性质的普遍方程，从这个方程直接可给出约束系统存在守恒量的充分条件．对受约束的连续系统，我们写出了 Poincaré 群和内部变换群下，沿轨线的变换性质方程．文中特别以经典力学为例作了较详细的讨论，并把 Poincare-Cartan 不变量推广到一般的受约束系统．

二

设受约束系统由非独立的态函数 $\phi^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 来描述，其中 $x=(\boldsymbol{r},ict)$，对于有限自由度的经典力学，α 为标志广义坐标的指标，而在场论中，α 可代表场函数的张量或旋量指标．诸 $\phi^\alpha(x)$ 不独立是由于它们之间存在约束条件

$$G_r=G_r(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu})=0\quad(r=1,2,\cdots,k<n),\tag{1}$$

其中

$$\phi^\alpha_{;\mu}\equiv\partial_\mu\phi^\alpha.\tag{2}$$

设系统的拉氏量为 $\mathscr{L}(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu})$，系统的作用量为

$$I=\int_D\mathscr{L}(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu})d(x).\tag{3}$$

I 的泛函导数记为

$$[\mathscr{L}]_{\phi^\alpha}\equiv\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{;\mu}}\right).\tag{4}$$

假设约束系统的运动方程是由适合约束条件(1)式的使作用量(3)式取极值的态函数所决定的，对于线性约束[7]，此限制变分问题导致态函数 ϕ^α 适合 Euler-Lagrange 方程为

$$[\mathscr{L}^*]_{\phi^\alpha}=0,\tag{5}$$

其中

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}+\lambda_rG_r.\tag{6}$$

$\lambda_r(x)$ 为相应的拉氏乘子．

今考虑系统的作用量(3)式和约束方程(1)在变换

$$\begin{cases}x_\mu\to x'_\mu=x_\mu(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu},\omega_s);\\ \phi^\alpha(x)\to\phi^{\alpha\prime}(x')=\phi^\alpha(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu},\omega_s)\end{cases}\tag{7}$$

下的变换性质．其中 $\omega_s(s=1,2,\cdots,l)$ 为变换李群的参数，$\omega_s=0$ 代表恒等变换，相应于(7)式的无穷小变换为

$$\begin{aligned}\delta x_\mu&=x'_\mu-x_\mu=\xi_{\mu(s)}\omega_s;\\ \delta\phi^\alpha&=\phi^{\alpha\prime}(x')-\phi^\alpha(x)=\zeta^\alpha_{(s)}\omega_s,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 δx_μ, $\delta\phi^\alpha$ 均为 x_μ, ϕ^α, $\phi^\alpha_{;\mu}$ 和 ω_s 的函数．

$$\xi_{\mu(s)}=\left.\frac{\partial x_\mu(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu},\omega_t)}{\partial\omega_s}\right|_{t=0},\tag{9}$$

$$\zeta^\alpha_{(s)}=\left.\frac{\partial\phi^\alpha(x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{;\mu},\omega_t)}{\partial\omega_s}\right|_{t=0}.\tag{10}$$

设记 $\bar\delta\phi^\alpha\equiv\phi^{\alpha\prime}(x)-\phi^\alpha(x)$，那么

$$\bar\delta\phi^\alpha=\delta\phi^\alpha-\phi^\alpha_{;\nu}\delta x_\nu=\eta^\alpha_{(s)}\omega_s,\tag{11}$$

其中

$$\eta^\alpha_{(s)}\equiv\zeta^\alpha_{(s)}-\phi^\alpha_{;\nu}\xi_{\nu(s)}.\tag{12}$$

假设在无穷小变换(8)式下，作用量仅发生一独立积分的改变，即假设

$$\mathscr{L}'(x', \phi^{\alpha'}, \phi^{\alpha'}_{,\mu})d(x') = \mathscr{L}(x, \phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{,\mu})d(x) + \Phi(x, \phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{,\mu}, \omega_s)d(x). \tag{13}$$

由于描述系统的拉氏量不是唯一确定的，拉氏量添加一散度项将导致同样的运动方程，于是在无穷小变换下，可能有

$$\mathscr{L}'(x', \phi^{\alpha'}, \phi^{\alpha'}_{,\mu}) = \mathscr{L}(x', \phi^{\alpha'}, \phi^{\alpha'}_{,\mu}) + \partial'_{\mu}(\delta\Omega_{\mu}), \tag{14}$$

其中 $\delta\Omega_{\mu} = \delta\Omega_{\mu}(x', \phi^{\alpha'}, \phi^{\alpha'}_{,\mu}, \omega_s)$. 由于 Jacobian 为

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \partial_{\nu}(\delta x_{\nu}). \tag{15}$$

从 (13) 和 (14) 式得

$$\left(\delta x_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \delta\phi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi^{\alpha}} + \delta\phi^{\alpha}_{,\mu}\frac{\partial}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}} + \frac{\partial(\delta x_{\nu})}{\partial x_{\nu}}\right)\mathscr{L} = \Phi - \frac{\partial(\delta\Omega_{\nu})}{\partial x_{\nu}}. \tag{16}$$

在变分 (8) 式下，导致作用 I 的变分为[8]

$$\delta I = \int_D [\mathscr{L}]_{\phi^{\alpha}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s d(x) + \int_D \partial_{\nu}\left[\mathscr{L}\xi_{\nu(s)}\omega_s + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha}_{,\nu}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s + \delta\Omega_{\nu}\right]d(x). \tag{17}$$

在无穷小变换下，假设 Φ, $\delta\Omega_{\nu}$ 关于参数 ω_s 是线性的，

$$\Phi = \Phi_{(s)}(x, \phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{,\mu})\omega_s, \tag{18}$$

$$\delta\Omega_{\nu} = \delta\Omega_{\nu(s)}(x, \phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{,\mu})\omega_s. \tag{19}$$

由假设 (13) 式，得

$$\int_D [\mathscr{L}]_{\phi^{\alpha}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s d(x) + \int_D\left\{\partial_{\nu}\left[\mathscr{L}\xi_{\nu(s)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha}_{,\nu}}\eta^{\alpha}_{(s)} + \delta\Omega_{\nu(s)}\right] - \Phi_{(s)}\right\}\omega_s d(x) = 0. \tag{20}$$

设约束方程 (1) 在无穷小变换 (8) 式下的改变为

$$\delta G_r = \Psi_r = \Psi_{r(s)}(x, \phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{,\mu})\omega_s. \tag{21}$$

由于 (11) 式，以及

$$\delta G_r = \frac{\partial G_r}{\partial x_{\mu}}\delta x_{\mu} + \frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}}\delta\phi^{\alpha} + \frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}}\delta\phi^{\alpha}_{,\mu}, \tag{22}$$

$$\delta\phi^{\alpha}_{,\mu} = \bar{\delta}\phi^{\alpha}_{,\mu} + \phi^{\alpha}_{,\mu\nu}\delta x_{\nu}, \tag{23}$$

$$\bar{\delta}(\phi^{\alpha}_{,\mu}) = (\bar{\delta}\phi^{\alpha})_{,\mu}. \tag{24}$$

这样，由 (8), (11), (22)—(24) 式，可将 (21) 式写为

$$\frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s + \frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}}\eta^{\alpha}_{(s),\mu}\omega_s = (\Psi_{r(s)} + K_{r(s)})\omega_s, \tag{25}$$

其中

$$K_{r(s)} = -\left[G_{r,\mu}\xi_{\mu(s)} + \frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}}\phi^{\alpha}_{,\mu}\xi_{\mu(s)} + \frac{\partial G_r}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}}\phi^{\alpha}_{,\mu\nu}\xi_{\nu(s)}\right]. \tag{26}$$

用 $\lambda_r(x)$ 乘 (25) 式求和后积分，注意到 (24) 式，施行分部积分后，得

$$\int_D\left\{[\lambda_r G_r]_{\phi^{\alpha}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s + \partial_{\mu}\left[\frac{\partial(\lambda_r G_r)}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}}\eta^{\alpha}_{(s)}\omega_s\right]\right\}d(x)$$
$$= \int_D \lambda_r(\Psi_{r(s)} + K_{r(s)})\omega_s d(x). \tag{27}$$

将 (20) 式与 (27) 式相加，得

$$\int_D [\mathscr{L}^*]_{\phi^\alpha}\eta^\alpha_{(s)}\omega_s d(x) + \int_D \left\{\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)} + \mathscr{L}\xi_{\mu(s)} + \delta\Omega_{\mu(s)}\right]\right.$$
$$\left. - \Phi_{(s)} - \lambda_r(\Psi_{r(s)} + K_{r(s)})\right\}\cdot \omega_s d(x) = 0. \tag{28}$$

(28) 式就是约束系统的时空坐标和态函数在无穷小变换下，由于作用量和约束方程的改变所导致的普遍变换结果.

在线性约束下，系统的运动适合方程 (5)，这样，沿着系统运动的"轨线"("轨线"适合方程 (5))，得到约束系统在变换 (8) 式下的一个直接结果

$$\int_D \left\{\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)} + \mathscr{L}\xi_{\mu(s)} + \delta\Omega_{\mu(s)}\right] - \Phi_{(s)} - \lambda_r(\Psi_{r(s)} + K_{r(s)})\right\}\omega_s d(x) = 0. \tag{29}$$

由于此关系对任何区域均适用，并且李群的参数是彼此独立的，从 (29) 式得沿约束系统的轨线，在变换 (8) 式下有下列变换性质：

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)} + \mathscr{L}\xi_{\mu(s)} + \delta\Omega_{\mu(s)}\right] = \Phi_{(s)} + \lambda_r(\Psi_{r(s)} + K_{r(s)}). \tag{30}$$

由 (28) 式可知，(30) 式和系统的运动方程 (5) 是等效的. 在经典的 Noether 定理中也有类似的泛等价定理[3]. 假如在变换 (8) 式下，系统的作用量 (3) 式和约束条件 (1) 式均不变，即 $\Phi_{(s)} = 0$，$\Psi_{r(s)} = 0$，即变换为约束系统的对称变换，那么 (30) 式就化为约束系统推广的 Noether 定理[9]；假如系统不受约束，$\lambda_r = 0$，在变换 (8) 式下，系统的作用量不变，$\Phi_{(s)} = 0$，那么 (30) 式就化为经典的 Noether 定理.

三

约束系统在变换 (8) 式下沿系统"轨线"导致的普遍结果 (30) 式，它反映了约束系统在变换下的性质，虽然在对称变换下可得到推广的 Noether 定理，由于约束存在，一般说来，仍然没有经典形式的 Noether 定理[9]. 对于受约束系统，究竟需要满足什么条件或者选取什么样的变换才可以导致经典形式的 Noether 守恒律呢？从 (21)，(22) 和 (26) 式直接可算得

$$\Psi_{r(s)} + K_{r(s)} = \frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha}\eta^\alpha_{(s)} + \frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\eta^\alpha_{(s),\mu}. \tag{31}$$

将 (31) 式代入 (30) 式中，简化后得

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)} + \mathscr{L}\xi_{\mu(s)} + \delta\Omega_{\mu(s)}\right]$$
$$= \Phi_{(s)} + \lambda_r\left[\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\right]\eta^\alpha_{(s)} - (\partial_\mu \lambda_r)\left(\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)}. \tag{32}$$

如果

$$\Phi_s + \lambda_r\left[\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\right]\eta^\alpha_{(s)} - (\partial_\mu \lambda_r)\left(\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)} = 0, \tag{33}$$

那么 (32) 式就给出经典形式的 Noether 定理

$$\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\mu}}\right)\eta^\alpha_{(s)}+\mathscr{L}\xi_{\mu(s)}+\delta\Omega_{\mu(s)}\right]=0. \tag{34}$$

(33) 式为约束系统在变换 (8) 式下可导致经典 Noether 守恒律的一般条件，即如能选取由 $\xi_{\mu(s)}$ 和 $\zeta^\alpha_{(s)}$ 生成的变换使 (33) 式满足，则沿着系统运动的"轨线"，此变换将产生经典的 Noether 守恒律.

假使系统的作用量在变换 (8) 式下保持不变，$\Phi_{(s)}=0$，我们可以给出适合条件(33)式的一些特殊情况，例如

1) 线性约束方程 (1) 的 G_r 和变换中的 $\eta^\alpha_{(s)}$ 在适合

$$[G_r]_{\phi^\alpha}=0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha_{,\mu}}\eta^\alpha_{(s)}=0 \tag{36}$$

时，约束系统在变换 (8) 式下能导致经典 Noether 守恒律.

2) 线性约束方程 (1) 的 G_r 中不含 $\phi^\alpha_{,\mu}$，且 G_r 在内部对称变换(时空坐标不变 $\xi_{\mu(s)}=0$) 下保持不变，即当 G_r 中不含 $\phi^\alpha_{,\mu}$ 时，约束系统在内部对称变换下可导致经典形式的 Noether 守恒律.

四

下面讨论约束系统在几种具体变换下所导致的结果. 假设在变换下系统的作用量不变.

1. 平移变换

$$x_\mu\to x'_\mu=x_\mu+\xi_{\mu(s)}\omega_s. \tag{37}$$

变换 (37) 式代表系统的刚性移动.

$$\delta\phi^\alpha=\phi^{\alpha\prime}(x')-\phi^\alpha(x)=0, \tag{38}$$

$$\bar{\delta}\phi^\alpha=\phi^{\alpha\prime}(x)-\phi^\alpha(x)=-\phi^\alpha_{,\mu}\xi_{\mu(s)}\omega_s. \tag{39}$$

由 (32) 式得

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=H_\mu, \tag{40}$$

其中

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\phi^\alpha_{,\mu}-\delta_{\mu\nu}\mathscr{L}, \tag{41}$$

$$H_\mu=\lambda_r\left[\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha}-\partial_\nu\left(\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\right)\right]\phi^\alpha_{,\mu}-(\partial_\nu\lambda_r)\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha_{,\nu}}\phi^\alpha_{,\mu}. \tag{42}$$

(41) 式的 $T_{\mu\nu}$ 可解释为连续系统的能量动量张量密度. 假如描述系统的态函数是彼此独立的，它们之间不存在约束 ($\lambda_r=0$)，在对称变换下就给出能量动量张量守恒，$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0$. 对于受约束的系统，在 $H_\mu=0$ 时，才给出能量动量张量守恒，例如，假使约束条件 G_r 中不含 $\phi^\alpha_{,\mu}$ (有限约束)并且 $\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha}\phi^\alpha_{,\mu}=0$ 时，变换如保持系统的作用量不变，此时 (40) 和 (42) 式仍导致系统的能量动量守恒.

2. 洛仑兹变换

在变换

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \tag{43}$$

下，

$$\delta\phi^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\phi^\beta \tag{44}$$

或

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\hat{D}_{\mu\nu}\phi. \tag{45}$$

如果 ϕ 是场论中的场函数，$\hat{D}_{\mu\nu}$ 依赖于 ϕ 为洛仑兹群的张量表示或旋量表示. 由(44)式，

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\phi^\beta - \varepsilon_{\mu\nu}\phi^\alpha_{,\mu} x_\nu \tag{46}$$

或

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi^\beta, \tag{47}$$

$$\bar{\delta}\phi = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\hat{D}_{\mu\nu} + x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi. \tag{48}$$

假如在洛仑兹变换下，系统的作用量不变，那么，由(32)式，有

$$\partial_\nu J_{\rho\mu\nu} = H_{\rho\mu}, \tag{49}$$

其中

$$J_{\rho\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\hat{D}_{\rho\mu}\phi + x_\rho T_{\mu\nu} - x_\mu T_{\rho\nu}, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} H_{\rho\mu} = {} & \lambda_r\left[\frac{\partial G_r}{\partial\phi} - \partial_\nu\left(\frac{\partial G_r}{\partial\phi_{,\nu}}\right)\right](\hat{D}_{\rho\mu} + x_\rho\partial_\mu - x_\mu\partial_\rho)\phi \\ & - (\partial_\mu\lambda_r)\left(\frac{\partial G_r}{\partial\phi_{,\nu}}\right)(\hat{D}_{\rho\mu} + x_\rho\partial_\mu - x_\mu\partial_\rho)\phi. \end{aligned} \tag{51}$$

(50)式中的 $J_{\rho\mu\nu}$ 可解释为系统的动量矩张量密度，(49)式给出了约束系统在洛仑兹变换下所导致的动量矩张量密度所适合的关系.

3. 态函数内部变换

考虑时空坐标不变，而描述系统的态函数作如下变换：

$$\begin{aligned} & x_\mu \to x'_\mu = x_\mu; \\ & \phi^\alpha(x) \to \phi^{\alpha\prime}(x) = \phi^\alpha(x) + \zeta^\alpha_{(s)}\omega_s. \end{aligned} \tag{52}$$

此时 $\xi_{\mu(s)} = 0$. 假使变换(52)式保持系统的作用量不变，那么由(32)式，有

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\mu}}\zeta^\alpha_{(s)}\right] = \lambda_r\left[\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\mu}}\right)\right]\zeta^\alpha_{(s)} - (\partial_\mu\lambda_r)\frac{\partial G_r}{\partial\phi^\alpha_{,\mu}}\zeta^\alpha_{(s)}. \tag{53}$$

如果约束条件 G_r 中不含 $\phi^\alpha_{,\mu}$，且变换保持作用量和约束条件均不变，即有

$$\frac{\partial G_r}{\partial \phi^\alpha}\zeta^\alpha_{(s)} = 0. \tag{54}$$

那么(53)式就化为经典 Noether 定理的结果.

五

下面以经典力学为例，说明上述结果的应用.

设用非独立广义坐标 $q_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 所描述的动力学系统，其拉氏函数为 $\mathscr{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$，此系统的作用量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(t, q_i, \dot{q}_i)dt. \tag{55}$$

假设此动力学系统的广义坐标 q_i 除了受完整约束

$$G_r = G_r(t, q_i) = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, k, k < n) \tag{56}$$

的限制外，还受线性非完整约束

$$G_s = a_{si}\dot{q}_i + b_s = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, l, k + l < n) \tag{57}$$

的限制，此系统的动力学方程为

$$\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mu_s a_{si} = 0, \tag{58}$$

其中

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \lambda_r G_r. \tag{59}$$

λ_r 和 μ_s 为相应的拉氏乘子.

今考虑(55)，(56)和(57)式在无穷小变换

$$t \to t' = t + \delta t, \quad q_i(t) \to q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) \tag{60}$$

下的性质. 为明确起见，不妨设

$$\delta t = \varepsilon f(t, q_i, \dot{q}_i), \quad \delta q_i = \varepsilon F_i(t, q_i, \dot{q}_i). \tag{61}$$

假设在变换(6)式下，有

$$\mathscr{L}'(t', q'_i, \dot{q}'_i)dt' = \mathscr{L}(t, q_i, \dot{q}_i)dt + \delta\Phi(t, q_i, \dot{q}_i)dt. \tag{62}$$

描述系统的拉氏函数 $\mathscr{L}$ 可以添加时间的全微分项，于是在无穷小变换(60)式下，可能有

$$\mathscr{L}'(t', q'_i, \dot{q}'_i) = \mathscr{L}(t', q'_i, \dot{q}'_i) + \frac{d}{dt'}(\delta\Omega), \tag{63}$$

其中 $\delta\Omega = \delta\Omega(t', q'_i, \dot{q}'_i)$，由(62)和(63)式得

$$\left[\delta t\frac{\partial}{\partial t} + \delta q_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \delta\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta t)\right]\mathscr{L} = \delta\Phi - \frac{d}{dt}(\delta\Omega). \tag{64}$$

在变换(60)式下，根据(62)式，有[7]

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right][\delta q_i - \dot{q}_i\delta t] + \frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \delta\Omega\right] - \delta\Phi\right\}dt = 0. \tag{65}$$

在变换(60)式下，假设约束方程(56)的改变为

$$\delta G_r = \frac{\partial G_r}{\partial t}\delta t + \frac{\partial G_r}{\partial q_i}\delta q_i = N_r. \tag{66}$$

由于

$$\delta q_i = \bar{\delta} q_i + \dot{q}_i \delta t, \tag{67}$$

(66)式又可写为

$$\frac{\partial G_r}{\partial q_i}\bar{\delta} q_i = N_r - \left[\frac{\partial G_r}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial G_r}{\partial q_i}\right]\delta t = K_r, \tag{68}$$

其中

$$K_r = \frac{\partial G_r}{\partial q_i}\delta q_i - \dot{q}_i \frac{\partial G_r}{\partial t}\delta t. \tag{69}$$

在变换(60)式下,假设约束方程(57)的改变为

$$\delta G_s = \delta a_{si}\dot{q}_i + a_{si}\delta\dot{q}_i + \delta b_s = N_s, \tag{70}$$

由于 $\frac{d}{dt}(\bar{\delta} q_i) = \bar{\delta}\dot{q}_i$, (70)式又可写为

$$a_{si}\bar{\delta} q_i = \int_0^t [N_s + \dot{a}_{si}\bar{\delta} q_i - \delta a_{si}\dot{q}_i - a_{si}\ddot{q}_i\delta t - \delta b_s]dt + c_s, \tag{71}$$

即

$$a_{si}\bar{\delta} q_i = K_s, \tag{72}$$

其中

$$K_s = \int_0^t (\dot{a}_{si}\bar{\delta} q_i + a_{si}\bar{\delta}\dot{q}_i)dt + c_s, \tag{73}$$

$$c_s = a_{si}\bar{\delta} q_i|_{t=0}. \tag{74}$$

用 $\lambda_r(t)$ 乘(68)式求和后在 $[t_1, t_2]$ 上积分,同时用 μ_s 乘(72)式求和后在 $[t_1, t_2]$ 上积分,将所得结果与(65)式相加,即得作用量(55)式和约束方程(56),(57)在变换(60)式下导致的普遍关系式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \dot{q}_i}\right) + \mu_s a_{si}\right](\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \delta\Omega\right]\right\}dt = \int_{t_1}^{t_2}(\delta\Phi + \lambda_r K_r + \lambda_s K_s)dt. \tag{75}$$

根据系统的动力学方程(58),即沿质点组运动的轨线,得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \delta\Omega\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}(\delta\Phi + \lambda_r K_r + \mu_s K_s)dt \tag{76}$$

或

$$\frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \delta\Omega\right] = \delta\Phi + \lambda_r K_r + \mu_s K_s. \tag{77}$$

(77)式是系统的作用量和约束方程在变换(60)式下,由于系统的动力学方程(58)所直接产生的结果. 从(75)式可见,(77)式与系统的动力学方程(58)是等效的.

假如变换(60)式为约束系统的对称变换,即此变换保持系统的作用量和约束条件不变,那么,(77)式就化为经典力学约束系统的推广 Noether 定理[6]. 如果系统不受约束

$(\lambda_r = 0, \mu_s = 0)$，(77) 式就化为经典形式的 Noether 定理.

即使是在约束系统的对称变换下，由于约束的作用，一般说 (77) 式仍不能给出经典形式的 Noether 定理[6]. 这里我们来讨论约束系统在变换下能导致经典 Noether 守恒律的条件. 如果在变换 (60) 式下，存在函数 $\delta\Omega_1(t, q_i, \dot{q}_i, \varepsilon)$，使得

$$\delta\Phi = -\frac{d}{dt}(\delta\Omega_1), \tag{78}$$

并且有

$$\lambda_r K_r + \mu_s K_s = 0. \tag{79}$$

那么，由于 $\mathscr{L}^*$ 中的 G_r 不含 $\dot{q}_i$，根据 (77) 式就有

$$\frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) + \delta\Lambda\right] = 0, \tag{80}$$

其中 $\delta\Lambda = \delta\Omega_1 + \delta\Omega_2$. (80) 式即为经典的 Noether 守恒律.

作为守恒条件的一种特殊情况，可以指出，如果在变换 (60) 式下，系统的作用量不变 $(\delta\Phi = 0)$，而由 (64) 式有相应的 $\delta\Omega$ 存在，同时由 (61)，(69)，(73) 和 (74) 式，假设又有

$$\frac{\partial G_r}{\partial q_i}(F_i - \dot{q}_i f) = 0, \tag{81}$$

$$\dot{a}_{si}(F_i - \dot{q}_i f) + a_{si}\frac{d}{dt}(F_i - \dot{q}_i f) = 0, \tag{82}$$

$$a_{si}(F_i - \dot{q}_i f)|_{t=0} = 0. \tag{83}$$

那么 (78) 和 (79) 式就自动满足. 从而约束系统在变换 (60) 式下将导致经典形式的 Noether 守恒律. (82) 式和 (83) 式可合并为

$$a_{si}(F_i - \dot{q}_i f) = 0. \tag{84}$$

由 (61) 式可知，(81) 式和 (84) 式恰好是定时变分满足了虚位移条件. 这样，对于一个用非独立坐标描述的受约束动力学系统，如果能选取某种变换 (60) 式，使系统的作用量不变，并且变换中的 F_i 和 f 满足方程 (81) 和 (84) 式. 即这个定时无穷小变换适合虚位移的约束条件，那么，根据约束系统的变换性质，沿质点组运动轨线，此变换就导致经典的 Noether 守恒量，这时的守恒量不再与约束条件有关. 我们已经指出，对于仅受有限约束的动力学系统，在 $f = 0$ 的对称变换下，将产生经典 Noether 定理的守恒量[6]，正好是这里结果的一个特例.

适合 (81) 和 (84) 式的函数 F_i 和 f，形成的变换 (60) 式，如保持系统的作用量不变，此时系统将存在经典的 Noether 守恒量. 条件 (81) 和 (84) 式只是系统存在上述守恒量的充分条件，它还不能视为约束系统 Noether 定理之逆.

下面通过一些熟知的例子来说明上述结果.

例 1. 有心力场中光滑旋转椭球面上运动的质点.

拉氏函数和完整约束条件为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(r) \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \tag{85}$$

$$G = a^2(x_1^2 + x_2^2) + b^2x_3^2 - R^2 = 0. \tag{86}$$

绕 x_3 轴的转动变换，$F_1 = x_2$，$F_2 = -x_1$，$F_3 = f = 0$，此变换保持了系统的拉氏函数 $\mathscr{L}$ 不变，$\delta\Phi = \delta\Omega = 0$，并且变换中的 F_i 和 f 适合条件(81)式，根据(80)式，质点沿 x_3 轴的动量矩守恒.

绕 x_1 轴的转动变换，$F_1 = 0$，$F_2 = x_3$，$F_3 = -x_2$，$f = 0$，此变换保持了系统的拉氏函数不变，$\delta\Phi = \delta\Omega = 0$，但变换中的 F_i 和 f 不适合条件(81)式，此时(77)式给出

$$\frac{d}{dt}(x_3p_2 - x_2p_3) = x_3\left(\lambda\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) - x_2\left(\lambda\frac{\partial G}{\partial x_3}\right). \tag{87}$$

此即质点的动量矩定理在 x_1 方向的分量式.

时间平移变换 $F_i = 0(i = 1, 2, 3)$，$f = 1$. 此变换保持了系统的拉氏函数不变，$\delta\Phi = \delta\Omega = 0$，变换中的 F_i 和 f 适合条件(81)式，根据(80)式得系统的机械能守恒.

沿 x_1 方向的平移变换 $F_1 = 1$，$F_2 = F_3 = f = 0$. 此时条件(81)式不满足，拉氏函数也是非不变的，由(77)式给出 x_1 方向的动量定理

$$m\ddot{x}_1 = \lambda\frac{\partial G}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_1}. \tag{88}$$

沿 x_1 轴方向的伽里略变换，$F_1 = -t$，$F_2 = F_3 = f = 0$，由(77)式仍给出(88)式.

变换 $F_1 = x_2t$，$F_2 = -x_1t$，$F_3 = f = 0$，此时条件(81)式满足，由(80)式给出质点沿 x_3 轴的动量矩守恒.

例 2. 铁环沿斜面无滑动地滚下.

拉氏函数和约束方程分别为[10]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - x)\sin\varphi, \tag{89}$$

$$G = \dot{x} - r\dot{\theta} = 0. \tag{90}$$

沿 x 方向的伽里略变换，$F_x = -t$，$F_\theta = f = 0$，这时

$$\delta\Lambda = \varepsilon\left(Mx + \frac{1}{2}Mgt^2\sin\varphi\right).$$

变换中的 F_i 和 f 不满足(84)式. 由(77)式得

$$M\ddot{x} = \mu + mg\sin\varphi. \tag{91}$$

变换 $F_x = \dot{x}$，$F_\theta = \dot{\theta}$，$f = 0$，满足条件(84)式，又

$$\delta\Lambda = -\varepsilon\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + mgx\sin\varphi\right). \tag{92}$$

根据(80)式得系统的机械能守恒.

同样，变换 $F_x = x$，$F_\theta = \theta$，$f = 0$ 仍可导致系统的机械能守恒.

时间平移变换 $F_x = F_\theta = 0$，$f = 1$，保持了系统的拉氏函数不变，$\delta\Phi = \delta\Omega = 0$，并且变换中的 F_i 和 f 适合条件(84)式，根据(80)式仍得系统的机械能守恒.

例 3. 质量为 m_1，m_2 的两质点，由长为 l 的轻刚杆联结，此质点组仅能在铅直平面内运动，且杆中心点的速度必须沿杆方向.

此系统的拉氏函数和约束条件分别为[11]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gy_1 - m_2gy_2, \tag{93}$$

$$G_1 = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] = 0, \tag{94}$$

$$G_2 = (x_2 - x_1)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0. \tag{95}$$

沿 x 轴的平移变换 $F_x = 1$, $F_y = f = 0$，此变换使 $\mathscr{L}$, G, G_2 均保持不变，即此变换为约束系统的对称变换，$\delta\Phi = \delta\Omega = 0$，但变换中的 F_i 和 f 不适合条件(84)式，由(69)，(73)，(74)，(77)式可得

$$\frac{d}{dt}\sum m_i x_i = 2\mu(y_1 - y_2). \tag{96}$$

(96)式为系统动力学方程的直接结果．这个例子又一次说明，沿 x 轴的平移变换虽然是约束系统的对称变换，但它不满足虚位移条件，因而变换不产生经典的守恒量.

沿 x 方向的伽里略变换，$F_x = -t$, $F_y = f = 0$，此时 $\delta\Lambda = \varepsilon\sum m_i x_i$，由(77)式仍得到(96)式.

绕 z 轴的转动变换 $F_x = y$, $F_y = -x$, $f = 0$，此时(77)式给出系统沿 z 轴的动量矩定理的分量式.

六

现在讨论约束系统的 Poincaré-Cartan 不变量.

假设动力学系统除了受完整约束条件(56)式的限制外，还受线性非完整约束条件(57)式的限制．设在变换

$$\begin{aligned} &t \to t' = t + \delta t(\alpha), \\ &q_i(t) \to q_i'(t', \alpha) = q_i(t) + \delta q_i(t, \alpha), \\ &\dot{q}_i(t) \to \dot{q}_i'(t', \alpha) = \dot{q}_i(t) + \delta\dot{q}_i(t, \alpha) \end{aligned} \tag{97}$$

下，条件(56)，(57)式的变化分别适合(68)式和(72)式．(97)式中的 α 为参数，

$$q_i'(t, 0) = q_i(t), \quad \dot{q}_i'(t, 0) = \dot{q}_i(t). \tag{98}$$

由(68)式，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial(\lambda_r G_r)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\lambda_r G_r)}{\partial\dot{q}_i}\right)\right](\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) - \lambda_r K_r\right\}dt = 0. \tag{99}$$

由(72)式，有

$$\int_{t_1}^{t_2}[\mu_s a_{si}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) - \mu_s K_s]dt = 0. \tag{100}$$

作用量(55)式在变换(97)式下的改变为

$$\begin{aligned} \delta I = I'(\alpha)\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{&\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\right](\delta q_i - \dot{q}_i\delta t) \\ &+ \frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t)\right]\Big\}dt. \end{aligned} \tag{101}$$

将(99)，(100)和(101)式相加，得

$$\delta I = I'(\alpha)\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\dot{q}_i}\right) + \mu_s a_{si}\right](\delta q_i - \dot{q}_i\delta t)\right.$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\mathscr{L}\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}^*}{\partial\dot{q}_i}(\delta q_i-\dot{q}_i\delta t)-\lambda_r K_r-\mu_s K_s\right]\Big\}dt. \tag{102}$$

因此，沿着质点系运动的轨线，由动力学方程(58)，注意到 $\mathscr{L}^*$ 中的 G_r 不含 $\dot{q}_i$，于是得

$$\delta I=I'(\alpha)\delta\alpha=\left[\left(\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-\lambda_r K_r-\mu_s K_s\right]_1^2. \tag{103}$$

设在广义坐标、广义速度和时间所张成的 $2n+1$ 维空间中，有一条满足约束方程(56)和(57)的闭合曲线 c_1. (由于约束条件，曲线 c_1 实际上是在某子空间中)，c_1 的方程设为

$$q_i=q_i^1(\alpha),\quad \dot{q}_i=\dot{q}_i^1(\alpha),\quad t=t_1(\alpha). \tag{104}$$

这里 $\alpha=0$ 和 $\alpha=l$ 是曲线上的同一点，过 c_1 上的任一点，有一条适合方程(58)的质点系的轨线，过 c_1 上的每一点的轨线构成一封闭的轨线管

$$q_i=q_i(t,\alpha),\quad \dot{q}_i=\dot{q}_i(t,\alpha), \tag{105}$$

其中

$$q_i(t,0)\equiv q_i(t,l),\quad \dot{q}_i(t,0)\equiv\dot{q}_i(t,l). \tag{106}$$

在此轨线管子上任取一闭曲线 c_2，使它包围此轨线管，并和轨线管母线仅交于一点. 曲线 c_2 的方程设为

$$q_i=q_i^2(\alpha),\quad \dot{q}_i=\dot{q}_i^2(\alpha),\quad t=t_2(\alpha). \tag{107}$$

将(103)式在 $[0,l]$ 上沿 c_1 和 c_2 积分，得

$$\begin{aligned}&\oint_{c_1}\left[\left(\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-\lambda_r K_r-\mu_s K_s\right]\\&=\oint_{c_2}\left[\left(\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-\lambda_r K_r-\mu_s K_s\right].\end{aligned} \tag{108}$$

(108)式就是约束系统的推广 Poincaré-Cartan 积分不变量. 只要闭曲线 c 满足约束条件，沿质点组运动轨线，在 t, q_i, $\dot{q}_i$ 作任意变更下，有

$$\oint_c\left[\left(\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-\lambda_r K_r-\mu_s K_s\right]=\text{不变量}. \tag{109}$$

假如变换(97)式中广义坐标的定时变分适合虚位移条件(81)和(84)式，那么(109)式就化为经典的 Poincare-Cartan 不变量[11]

$$\oint_c\left[\left(\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right]=\oint_c(p\delta q_i-H\delta t)=\text{不变量}. \tag{110}$$

参 考 文 献

[1] H. H. Denman, *J. Math. Phys.*, **7**(1966), 1910; W. Sarlet, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 1049, 李子平，新疆大学学报(自然科学版)，(2)(1980).

[2] P. Havas, *Helv. Phys. Acta*, **51**(1978), 293; E. A. Desloge and R. I. Karch, *Am. J. Phys.*, **45**(1977), 336.

[3] 吴学谋，力学与实践，(2)(1979), 54; (3)(1980), 24.

[4] E. Candotti, C. Palmieri and B. Vitale, *Nuovo Cimento*, **70A**(1970), 233; *Am. J. Phys.* **40**(1972), 424.

[5] B. Vujanovic, *Int. J. non-linear mech.*, **13**(1978), 185; Dj. Djukic and A. M. Straus, *J. Phys., A: Math. Gen.* (*GB*), **13**(1980), 431.

[6] 李子平，自然杂志，即将发表；新疆大学学报(自然科学版)，(1)(1981).

[7] E. Klingbeil, Variationsrechnung, (1977), 226.
[8] E. L. Hill, *Rev. Mod. Phys.*, 23(1951), 253.
[9] 李子平，本刊本期.
[10] H. Goldstein, Classical mechanics, (1953), 43.
[11] Ф. Р. Гатмахер, *Лекции по Аналитической Механике* (1960), §3; §18.

THE TRANSFORMATION PROPERTIES OF CONSTRAINED SYSTEM

LI ZI-PING
(Department of Physics, Xinjiang University)

ABSTRACT

The motion of constrained system may be described in terms of non-independent state functions. We considered the change of the action integral and constraint equations under the infinitesimal transformation of the time-space points and state functions of the constrained system, this leads to the general transformation result. We obtained the general equations for the transformation properties of constrained system along the trajectory of motion of that system. From these equations, the condition under which the transformation of constrained system yields conservation law can be worked out. For some specific transformations of the continuous system, we have found the equations of transformation properties. In the special cases, the general equations of transformation properties can be reduced to the results the classical Noether's theorem, The application of general results to classical mechanics is discussed in detail and the Poincare-Cartan invariant is generalized to the constrained system.