

矢引力子场度规场引力理论的 共形平直静止解及引力场的 能量动量赝张量的正常性

钟 在 哲

1979年11月26日收到

提 要

本文求出了 VGM 引力理论^[1]的共形平直静止解。文中把胡宁^[2]表达式引入 VGM, 它同样是守恒的能量动量表达式。对于单个集中质量的引力场, 与 GR 一样, 可证实引力质量与惯性质量相等。但 Einstein 的等效原理在这理论中并不成立。利用所求得解, 可知当 $n < 1/4$ 时, 引力场的能量动量赝张量就是正常的。

一、引 言

根据钱尚武^[3]提出的一种引力理论, 即所谓“矢引力子场度规场引力理论”(VGM), 真空引力场方程的右端要显含一个与场源质量有关的项。本文第二部分讨论它的共形平直静止解, 并在一定条件下求出了这种解。

本文后一部分是上述解的应用。引力场的能量密度及其物质性, 一直是个有争论的疑难问题。最近的一个表达式是胡宁^[2]提出来的。但该结果亦未能彻底解决问题, 因为它要求 n 是个足够大的不定负数, 且其恒正区域的内界仍在 Schwarzschild 奇异球面的外边, 若回到“球坐标系”, 则那内界还要增大。我们把胡宁^[2]的表达式推广到 VGM 中来, 仍得符合守恒条件的表达式。对单个集中物质, 同样证实了引力质量与惯性质量相等, 但涵意与 GR 不同, 即 Einstein 的等效原理这时并不成立。而后应用所得的解, 证明了当 $n < 1/4$ 时, 包括引力能在内的场的总能量动量赝张量就是正常的(能密恒正而胁强为零)。若回到“球坐标系”, 那内界恰好就是 VGM 奇异球面。这样, VGM 确实较彻底地解决了问题。

二、共形平直静止解

对于一个带电物质系统, VGM 的真空场方程如下(以下希腊指标 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 取值为 0, 1, 2, 3。拉丁指标 $i, j, k, \dots$ 取值为 1, 2, 3。所用的单位制中光速 $c = 1$)

$$H^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad \{H_{\alpha\beta,\gamma}\} = 0, \quad (A1)$$

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad \{F_{\alpha\beta,\gamma}\} = 0, \quad (A2)$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa (T_{\alpha\beta(gr)} + T_{\alpha\beta(el)}), \quad (A3)$$

$\kappa = 8\pi G$, G 为引力常数.

这里, $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ 为线元, 且号差为 -2 . “ $\{ \}$ ” 表示对三个指标的轮换求和.

$H^{\alpha\beta}$ ——描写矢引力子场的反对称张量; $F^{\alpha\beta}$ ——描写电磁场的反对称张量; $T_{\alpha\beta(gr)}$ ——矢引力子场的能量动量张量; $T_{\alpha\beta(gr)} = -\frac{1}{4\pi G} \left(g^{\gamma\delta} H_{\alpha\gamma} H_{\beta\delta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} H^{\gamma\delta} \right)$; $T_{\alpha\beta(el)}$ ——电磁场的能量动量张量; $T_{\alpha\beta(el)} = -\frac{1}{4\pi} \left(g^{\gamma\delta} F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right)$. 由 (A3) 式缩并指标得 $R = 0$.

现在考虑静止系统, 这意味着各物体带同号电荷, 即系统由于静电斥力而处于平衡态. 按文献 [3], 设这时的线元形如

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = V^2 dt^2 - \bar{g}_{ij} dx^i dx^j,$$

其中 V 与 t 无关. 由于方程 (A1) 与 (A2), 应当存在相应于 $H^{\alpha\beta}$ 与 $F^{\alpha\beta}$ 的势 Ψ^α 与 Φ^α , 满足

$$H_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta,\alpha} - \Psi_{\alpha,\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}.$$

选择适当的坐标系, 忽略物体的内部结构, 认为物质与电荷在同一物体内部是均匀分布的. 那么, 不失一般性, 可假定 $\Psi_i = 0$, $\Phi_i = 0$, 而 $\Psi_0 = \Psi$, $\Phi_0 = \Phi$, 且 Ψ 与 Φ 均与 t 无关. 于是

$$H^{i0} = -V^{-2} \bar{g}^{ij} \Psi_{,j}, \quad H^{ij} = 0,$$

$$F^{i0} = -V^{-2} \bar{g}^{ij} \Phi_{,j}, \quad F^{ij} = 0.$$

这时全部 Maxwell 式方程均自动满足, 只余下一个, 就是

$$V \bar{g}^{ij} \Psi_{||ij} - \bar{g}^{ij} V_{,i} \Psi_{,j} = 0,$$

$$V \bar{g}^{ij} \Phi_{||ij} - \bar{g}^{ij} V_{,i} \Phi_{,j} = 0.$$

这里“ $\parallel$ ”表示相对于空间部分线元 $d\sigma^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$ 的协变微商. 再引进算子 Δ_1 与 Δ_2 , 它们对场量 ξ 的作用分别为

$$\Delta_1 \xi = \bar{g}^{ij} \xi_{,i} \xi_{,j}, \quad \Delta_2 \xi = \bar{g}^{ij} \xi_{||ij}.$$

可假定 V 能表为 Ψ 与 Φ 的函数, 记 $V'_\Psi = \frac{\partial V}{\partial \Psi}$, $V'_\Phi = \frac{\partial V}{\partial \Phi}$, 则前式可写成

$$V \Delta_2 \Psi - V'_\Psi \Delta_1 \Psi = 0,$$

$$V \Delta_2 \Phi - V'_\Phi \Delta_1 \Phi = 0.$$

在这些记号下,

$$T_{ij(gr)} = -\frac{2}{\kappa} V^{-2} \left(\Psi_{,i} \Psi_{,j} - \frac{1}{4} \bar{g}_{ij} \Delta_1 \Psi \right),$$

$$T_{i0(gr)} = 0, \quad T_{00(gr)} = -\frac{1}{\kappa} \Delta_1 \Psi,$$

$$T_{ij(el)} = -\frac{2G}{\kappa} V^{-2} \left(\Phi_{,i} \Phi_{,j} - \frac{1}{4} \bar{g}_{ij} \Delta_1 \Phi \right),$$

$$T_{i0(el)} = 0, \quad T_{00(el)} = -\frac{G}{\kappa} \Delta_1 \Phi.$$

现在来考虑共形平直静止解. 这时线元的一般形式应为^[4]

$$ds^2 = A(\rho)dx^{02} - B(\rho)\delta_{ij}dx^i dx^j.$$

考虑到在“球坐标系”下, 钱尚武^[1]给出的外部解为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

引进 $\rho = r - GM$, 立即得共形度规

$$ds^2 = (1 + \tilde{\varphi})^{-2} dt^2 - (1 + \tilde{\varphi})^2 \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

式中 $\tilde{\varphi} = \frac{GM}{\rho}$. 这提示我们, 对一般的带电系统, 可寻找下述形状的共形平直静止(外部)解

$$ds^2 = U^{-2} dt^2 - U^2 \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

其中 $U^{-1} = V$ 与 t 无关. 由此算出

$$R_{ij} = \delta_{ij} U^{-1} (U_{,kk} - U^{-1} U_{,k} U_{,k}) + 2U^{-2} U_{,i} U_{,j},$$

$$R_{i0} = 0,$$

$$R_{00} = U^{-5} (U_{,kk} - U^{-1} U_{,k} U_{,k}),$$

$$R = 2U^{-3} U_{,kk}.$$

由于 $R = 0$, 所以 $U_{,kk} = 0$, 即函数 U 相对于平直空间 $d\sigma_0^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ 乃是谐和的. 如果我们已经选好了这个函数, 那么

$$R_{ij} = U^{-2} (2U_{,i} U_{,j} - \delta_{ij} U_{,k} U_{,k}),$$

$$R_{i0} = 0, \quad R_{00} = -U^{-6} U_{,k} U_{,k}.$$

注意到这时

$$\Delta_1 \xi = U^{-2} \xi_{,k} \xi_{,k}, \quad g_{ij} \Delta_1 \xi = \delta_{ij} \xi_{,k} \xi_{,k},$$

$$\Delta_2 \xi = U^{-2} \xi_{,kk} + U^{-3} U_{,k} U_{,k},$$

代入方程组 (A), 重新组合为

$$U \Psi_{,kk} + 2U_{,k} \Psi_{,k} = U \Phi_{,kk} + 2U_{,k} \Phi_{,k} = 0,$$

$$U_{,i} U_{,j} - \frac{1}{4} \delta_{ij} U_{,k} U_{,k} = U^4 \left[\Psi_{,i} \Psi_{,j} + G \Phi_{,i} \Phi_{,j} - \frac{1}{4} \delta_{ij} (\Psi_{,k} \Psi_{,k} + G \Phi_{,k} \Phi_{,k}) \right],$$

$$U_{,k} U_{,k} = U^4 (\Psi_{,k} \Psi_{,k} + G \Phi_{,k} \Phi_{,k}). \quad (\text{B})$$

由第一个式子看出, 最自然的情况是 $\Phi/\Psi = \text{常数}$. 这意味着每个物体所带电量与其质量成比例. 单个物体自然是如此. 一般地, 设物质分别集中在区域 $I_1, I_2, \dots, I_N$ 里, 其质量分别为 $M_1, M_2, \dots, M_N$, 分别带电荷 $Q_1 = \mu M_1, Q_2 = \mu M_2, \dots, Q_N = \mu M_N$. 考虑到 Ψ 与 Φ 的特性, 应有 $\Phi = -\mu \Psi$. 这时方程组 (B) 简化为

$$U \Psi_{,kk} + 2U_{,k} \Psi_{,k} = 0,$$

$$U_{,i} U_{,j} = U^4 (1 + \mu^2 G) \Psi_{,i} \Psi_{,j}.$$

利用 $U_{,kk} = 0$ 及边界条件(无限远处 $U^2 \rightarrow 1, \Psi \rightarrow 0$), 化上式为

$$(U \Psi)_{,kk} = 0,$$

$$(U^{-1} - 1)_{,i} (U^{-1} - 1)_{,j} = [(1 + \mu^2 G)^{\frac{1}{2}} \Psi]_{,i} [(1 + \mu^2 G)^{\frac{1}{2}} \Psi]_{,j}.$$

明显的自然解是

$$U^{-1} - 1 = (1 + \mu^2 G)^{\frac{1}{2}} \Psi = -(\mu^{-2} + G)^{\frac{1}{2}} \Phi.$$

这样一来,我们的问题就变成了

1) 可预先选取合条件的 U , 再定出 Ψ 与 Φ ;

2) 或反之,先在某坐标系中找出 Ψ 与 Φ 后再定出 U . 但 U 必须适合谐和条件与边界条件,这等价于对坐标系的选择加上了限制,这是我们早就预料到的.

现在我们给出两种重要的具体解如下: 对单个物体的情况,设物质(质量 M)与电荷(Q)分布在半径 $a \ll M, Q$ 的球状区域内,以 ρ 表示空间一点 P 到球心的距离(由线元 $d\sigma_0^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ 测度). 选取

$$U = 1 + C/\rho, \quad C = (G^2 M^2 + GQ^2)^{1/2},$$

它符合谐和条件与边界条件. 于是

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C}{\rho}\right)^{-2} dt^2 - \left(1 + \frac{C}{\rho}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

再作代换 $\rho = r - C$, 即得

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

式中 $\theta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. 当 $Q = 0$ (即 $\mu = 0$) 时,它就是钱尚武^[1]的解.

而且 $\Psi = U^{-1} - 1 = -GM/r$, 这是正确的. 当 $Q \neq 0$, 而 $M = 0$ 时,得 Sygne^[3] 解. 这时 $\Psi = 0$, 不能用 $\Phi = -\mu\Psi$ 求 Φ , 而是 $\Phi = \left[-\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2 G}} \left(\frac{1}{U} - 1\right)\right]_{\mu \rightarrow \infty} = \frac{Q}{r}$, 亦正确.

另一种情况是前述 N 个区域的情形,类似地可选取

$$U = 1 + \frac{C_1}{\rho_1} + \frac{C_2}{\rho_2} + \cdots + \frac{C_N}{\rho_N}, \quad (2)$$

其中

$$C_s = (G^2 M_s^2 + GQ_s^2)^{\frac{1}{2}} \quad (s = 1, 2, \cdots, N),$$

等等. 但须留心, 两个以上物体, 若不带同号电荷 ($\mu = 0$), 则不可能是静止的, 那时前边关于度规形状的假设根本就没有意义.

三、能量动量赝张量

回到任意形状的度规, $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. 按照胡宁^[2]的办法来构造能量动量表达式. 此时引力场方程为

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = -\kappa (T_{(m)}^{\alpha\beta} + T_{(gr)}^{\alpha\beta} + T_{(el)}^{\alpha\beta}).$$

这里 $T_{(m)}^{\alpha\beta}$ 为普通物质的能量动量张量. 众所周知, 在空时中某固定点 P 附近的局部 Lorentz 坐标系中, 成立

$$G^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} h^{\alpha\beta}_{\nu}\right)_{,\sigma} = \left[\frac{1}{2} g^{-1} (-gg^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} + gg^{\sigma\alpha} g^{\lambda\beta})_{,\lambda}\right]_{,\sigma},$$

其中 $h^{\alpha\beta}$ 对于指标 β, σ 是反称的. 若 n 为一任意实数, 在任意坐标系中由下式定义量 $t^{(n)\alpha\beta}$,

$$t^{(n)\alpha\beta} + T_{(m)}^{\alpha\beta} + T_{(gr)}^{\alpha\beta} + T_{(el)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi G} (-g)^{-n} [(-g)^n h^{\alpha\beta}],_{,\sigma}. \quad (3)$$

再由下式定义场的总能量动量密度 $\tau^{(n)\alpha\beta}$,

$$\tau^{(n)\alpha\beta} = (-g)^n (t^{(n)\alpha\beta} + T_{(m)}^{\alpha\beta} + T_{(gr)}^{\alpha\beta} + T_{(el)}^{\alpha\beta}), \quad (4)$$

则它满足守恒律 $\tau^{(n)\alpha\beta}_{, \beta} = 0$. $t^{(n)\alpha\beta}$ 是个赝张量, 在局部 Lorentz 坐标系中, 由 (3) 式知有 $t^{(n)\alpha\beta} = 0$.

现在讨论 $t^{(n)\alpha\beta}$ 的意义及在 VGM 中是否成立 Einstein 等效原理的问题. 考虑单个物体且不带电荷的情形. 由 (1) 式, 非零度规分量只有 $g_{00} = (1 + \tilde{\varphi})^{-2}$, $g_{ij} = -\delta_{ij}(1 + \tilde{\varphi})^2$. 故 $g = -(1 + \tilde{\varphi})^4$, 等等. 将它们代入 (4) 式, $\tau^{(n)00} = \frac{1}{16\pi G} [(-g)^{n-1} (-g g^{00} g^{lm})_{,m}]_{,l}$.

由此可算出空间总能量. 利用 Gauss 定理,

$$P^0 = \frac{1}{16\pi G} \int [(-g)^{n-1} (-g g^{00} g^{lm})_{,m}]_{,l} (dx)^3 = \frac{1}{16\pi G} \int (-g)^{n-1} (-g g^{00} g^{lm})_{,m} dS_l.$$

计算这个面积分时, 只须注意到当 ρ 很大时, $(-g)^{n-1} \sim 1$, 故

$$(-g g^{00} g^{lm})_{,m} = [-(1 + \tilde{\varphi})^4]_{,m} \sim -\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{4GM}{\rho} \right),$$

于是得

$$P^0 = -\frac{1}{16\pi G} \int \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{4GM}{\rho} \right) dS_l = M = M c^2. \quad (5)$$

可见 P^0 的值仍然与数 n 无关, n 仅仅影响能量在空间中的分布情况. (5) 式说明, 对于 VGM, 引力质量与惯性质量相等的结论仍然成立. 但是, 注意到计算 P^0 时, 乃是遍及整个空间的体积分, 对局部空间而言, 当 $t^{(n)\alpha\beta} = 0$ 时, 并不化为仅仅对普通物质项 $T_{(m)}^{\alpha\beta}$ 的积分, 而是还有附加项 $T_{(gr)}^{\alpha\beta}$ 的贡献. 这就是说, 若认为 $t^{(n)\alpha\beta}$ 是“纯引力能”的能量动量密度, 则它其实不是全部, 而是去掉了具有张量性质的部分 $T_{(gr)}^{\alpha\beta}$ 的. 这样, Einstein 等效原理在这样的引力理论中并不成立. 因为对于真正的空虚空间 (无任何物质及场), $t^{(n)\alpha\beta} = T_{(m)}^{\alpha\beta} = T_{(gr)}^{\alpha\beta} = T_{(el)}^{\alpha\beta} = 0$, 而当在空间某处存在物质时, 对比如短程坐标系, 虽然 $t^{(n)\alpha\beta} = 0$, 但一般地, $T_{(gr)}^{\alpha\beta} \neq 0$, 两种情况并不等价. 这样, 这种引力理论中的 $T_{(gr)}^{\alpha\beta}$ 的存在就排除了虚构的局部引力场. 这样的引力理论中, 引力质量集中分布, 惯性质量则按赝张量 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 的形式分布, 其中包括不确定的“纯引力能”部分 $t^{(n)\alpha\beta}$.

四、能量动量赝张量的正常性

在第二节的各条件下, 由 (2) 式知总有

$$ds^2 = \left(1 + \sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_s \right)^{-2} - \left(1 + \sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_s \right)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

式中 $\tilde{\varphi}_s = \frac{C_s}{\rho_s}$. 于是可直接写出各度规分量 $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, 而 $g = -\left(1 + \sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_s \right)^4$. 注意到

φ_s 的谐和性, 则

$$\begin{aligned}\tau^{(n)00} &= -\frac{1}{4\pi G} \left[\left(1 + \sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_s \right)^{4n-1} \sum_{s=1}^N \varphi_{s,k} \right]_{,k} \\ &= \frac{1}{4\pi G} (1-4n) \left(1 + \sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_s \right)^{2(2n-1)} \left(\sum_{s=1}^N \tilde{\varphi}_{s,k} \right)^2.\end{aligned}$$

显然, 只消取 $n < 1/4$, 则 $\tau^{(n)00} > 0$. 这样, VGM 确实保证了 ($n < 1/4$) 引力场能量密度的恒正性. 另外, $\tau^{(n)0i} = 0$, $\tau^{(n)ij} = 0$, 是极易验证的, 因而胁强为零, 空间并无应力. 总之, 当 $n < 1/4$ 时, 赝张量 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 就是正常的, 亦即体现了引力场的物质性^[2]. 对于单个不带电的孤立星体, $\tilde{\varphi} = GM/\rho$, 此时唯一的奇异面是 $\rho = 0$, 若回到通常的“球坐标系”, 即作变换 $\rho = r - GM$, 则 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 保持正常的区域的内界恰好就是 VGM 的奇异球面 $r = GM$. 这就意味着彻底达到文献 [2] 的目的. 最后, 因为要求 $n < 1/4$, 可见关于能量动量的 Einstein 表达式 ($n = 1/2$) 或 Landau-Lifshitz 表达式 ($n = 1$) 仍不可用.

写作本文时曾得北京大学钱尚武先生的指导与支持, 作者表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] 钱尚武, 物理学报, 28(1979), 258.
- [2] 胡宁, 中国科学, 1977, 3, 210.
- [3] J. L. Synge, Relativity, The General Theory (amsterdam, 1960).
- [4] R. M. Adler *et al.*, Introduction to General Relativity (McGraw-Hill, New York, 1975).

THE CONFORMASTAT FLAT SOLUTION AND THE NORMALITY OF THE ENERGY-MOMENTUM PSEUDO-TENSOR OF GRAVITATIONAL FIELD IN THE THEORY OF GRAVITATION

ZHONG ZAI-ZHE

ABSTRACT

In this paper, we have found the conformastat flat solution in the theory of gravitation by condering the vector graviton field and the metric field^[1]. We introduce Hu-Ning's expression^[2] into this theory, then it appears also as the conservative expression of energy-momentum. For the gravitational field of singular centralized mass, it can be shown, as in GR, that the gravitational mass and the inertial mass are equal. But Einstein's principle of equivalence doesn't hold in this theory. When $n < 1/4$, by the conformastat flat solution, the energy-momentum pseudotensor of the gravitational field is normal.