

超 Killing 方程与超对称变换

张 历 宁

(中国科学院理论物理研究所)

1980年3月18日收到

提 要

在超空间 (x, θ) 上定义了度规张量场 G^{AB} 后, 计算了四阶曲率张量 $R^D{}_{AB\hat{C}}$, 并找出其推广的循环性 (cyclicity).

推导了超空间上保度量变换所应满足的条件, 即超 Killing 方程:

$$\xi_{A:B} + \eta_{ab}\xi_{B:A} = 0.$$

在零曲率情形, 求出了超 Killing 方程的通解, 及其相应生成元间的对易关系. 在常曲率情形, 找出了超 Killing 方程的特解.

一、引 言

空间、时间和物质构成了宇宙, 而按照爱因斯坦的宇宙观, 物理空-时是一张流形, 确切的说是一张定义有度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的黎曼流形, 其度规不是独立于物质先验的被指定, 而是被物质(它的分布、性质与状态)所决定.

作为一种近似, 发现 $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, 因而知空-时流形是四维平直流形 R_{3+1} 的, 就是爱因斯坦狭义相对论.

考虑到物质的影响后, 所解出的精确的度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 则确定了一张四维弯曲黎曼流形 V_{3+1} , 就是所谓的 R_{3+1} 的弯曲化(局部化), 这是爱因斯坦广义相对论中的空-时流形.

囊括进物质本身的 N 个内部自由度后, 空-时流形就扩充为 $4+N$ 维, 这就是 V_{3+1} 的高维化. 如果新增加的坐标不是(对易的)玻色坐标 y 而是(反对易的)费密坐标 θ , 就称为超化即分层化 (graded), 而如此扩充后的空-时流形就是超流形即分层流形. 这是近年新发展的超对称与超引力理论的观点与课题^[1].

V_{3+1} 的最小费密扩充是 $4+4$ 维的超对称空间, 其点 $Z = (x, \theta)$ 的坐标是 (x^μ, θ^α) , $\mu = 0, 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$. 其中 $(x^\mu) \in V_{3+1}$, $[x^\mu, x^\nu] = 0$, 即 $x^\mu \in R$ 是对易的玻色坐标, V_{3+1} 可称为玻色流形, 而 (θ^α) 是 Majorana 旋量, 属于旋量空间 F_4 , 由于 $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0$, 即 θ^α 是 Grassmann 代数的奇元素而称为费密坐标, F_4 就称为费密空间.

超对称空间可以看作是玻色流形 V_{3+1} 与费密空间 F_4 的结合, 因而又称为玻色-费密空间. 不同的结合方式等价于定义了不同的度规, 而度规的引进就自然的带来了联络、曲率与黎曼几何, 这就是超对称空间的几何.

对给定的度规, 有物理兴趣的变换显然首先是保度量变换 (isometry). 我们将讨论无

穷小的保度量变换所应满足的条件,并称之为超 Killing 方程,因为它是普通 Killing 条件方程的推广.

另外,由于最简单的超对称空间显然是零曲率的及常曲率的,所以作为二个特例,解出超 Killing 向量. 零曲率超对称空间的无穷小保度量变换有 40 个参数,而常曲率超对称空间的无穷小保度量变换就是迄今熟知的超对称变换.

二、超对称空间

1. 超对称空间,以下简称之为玻色-费密空间,其元素 Z 称为逆变向量,其坐标是 $Z^A = (x^\mu, \theta^a)$, 其 Grassmann 宇称 a 对玻色坐标 x^μ 是 0; 对费密坐标 θ^a 是 1.

对易关系记作

$$[Z^A, Z^B] = Z^A Z^B - (-1)^{ab} Z^B Z^A = 0.$$

左微分与右微分运算分别记作 $\frac{\partial_L}{\partial Z^B}$ 与 $\frac{\partial_R}{\partial Z^B} \equiv ", "$. 关于玻色-费密空间上的微积分可以参考文献 [3].

协变向量有不同的两类,分别记作 Q_A 与 Q_A . 又 $P^A Q_A = Q_A P^A$ 是标量,而 $Q_A P^A$ 则不是标量. 由此可以定义高阶混合张量^[2].

以下讨论玻色-费密空间上无挠率的黎曼几何,即假定在玻色-费密空间上已定义了一个二阶协变张量场 $G_{AB}(Z)$, 它有对称性:

$$G_{AB}(Z) = (-1)^{a+b+ab} G_{BA}(Z) \equiv \eta_{ab} G_{BA}(Z),$$

称为度规张量场. 这里,我们采用 Nath 与 Arnowitt^[2] 文中的符号.

2. 假设在玻色-费密空间上已定义了平行移动,由于挠率为零,这就等价于定义了右协变微分“;”,也就等价于定义了联络“ Γ ”.

对于逆变向量 V^A ,经过平行移动后有如下的关系式:

$$V^A{}_{;B} = V^A{}_{,B} + V^C \Gamma_{CB}{}^A.$$

对于协变向量 U_A ,由于 $V^A U_A$ 是标量,易证有如下公式:

$$U_{A;B} = U_{A,B} - (-1)^{bc} \Gamma_{AB}{}^C U_C.$$

对于张量 T_{AB} ,易证有如下公式:

$$T_{AB;C} = T_{AB,C} - (-1)^{b(b+d)} T_{AB} \Gamma_{BC}{}^D - (-1)^{c(b+d)} \Gamma_{AC}{}^D T_{DB}.$$

特别是对度量张量 G_{AB} 有

$$G_{AB;C} = (-1)^{b(b+d)} G_{AB} \Gamma_{BC}{}^D + (-1)^{c(b+d)} \Gamma_{AC}{}^D G_{DB},$$

故可解出

$$\Gamma_{AB}{}^C = (-1)^{bc} \{ (-1)^{bd} G_{AD,B} + (-1)^{a+b+ab+ad} G_{BD,A} - G_{AB,D} \} G^{DC},$$

且知有对称性

$$\Gamma_{BA}{}^C = (-1)^{c(a+b)} \eta_{ab} \Gamma_{AB}{}^C.$$

又,不难推导四阶曲率张量 $R^D{}_{AB\hat{C}}$ 的表达式如下. 因为对任意协变向量 U_A 的二阶协变微分有

$$U_{A;B;\hat{C}} = U_{A;B,C} - (-1)^{c(b+d)} \Gamma_{AC}{}^D U_{D;B} - (-1)^{cd+a(b+c+d)} \Gamma_{BC}{}^D U_{A;D},$$

故有

$$\begin{aligned} -(-1)^{bc+bd+cd} R^D_{AB} \hat{C} U_D &= U_{A;\hat{B};\hat{C}} - (-1)^{bc} U_{A;\hat{C};\hat{B}} \\ &= -(-1)^{bc+bd+cd} [-\Gamma_{AC}{}^D{}_{,B} + (-1)^{bc} \Gamma_{AB}{}^D{}_{,C} - (-1)^{c(d+e)} \Gamma_{AC}{}^E \Gamma_{EB}{}^D \\ &\quad + (-1)^{b(c+d+e)} \cdot \Gamma_{AB}{}^E \Gamma_{EC}{}^D] U_D. \end{aligned}$$

推广的 Ricci 张量与推广的曲率标量分别是如下的缩并

$$R_{AB} \equiv (-1)^c R^C_{AB} \hat{C}$$

及

$$R \equiv (-1)^b G^{BA} R_{AB}.$$

3. 在玻色-费密空间的切空间 T 上选择基向量为 $\{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\}$. 对所定义的 G_{AB} 说来, 可知一般 ∂_μ 与 ∂_α 是斜交的. 但可以选择正交基 $\{\partial_\mu, D_\alpha \equiv \partial_\alpha - B_\alpha{}^\mu(x, \theta) \partial_\mu\}$, 其中函数 $B_\alpha{}^\mu(x, \theta)$ 与度规 $G_{AB}(x, \theta)$ 的关系为

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} & G_{\mu\beta} \\ G_{\alpha\nu} & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu \cdot \partial_\nu & \partial_\mu \cdot \partial_\beta \\ \partial_\alpha \cdot \partial_\nu & \partial_\alpha \cdot \partial_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & -B_\beta{}^\nu \eta_{\mu\nu} \\ B_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} & \eta_{\alpha\beta} - B_\alpha{}^\mu B_\beta{}^\nu \eta_{\mu\nu} \end{pmatrix},$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是洛伦兹度规而 $\eta_{\alpha\beta} = -(C^{-1})_{\alpha\beta}$, C 是电荷共轭矩阵, 悉知它是反对称的.

4. 在玻色-费密空间的切空间的偶空间 T^* 上选择基向量为 $\{dx^\mu, d\theta^\beta\}$, 对所定义的 $G^{AB} = (-1)^{ab} G^{BA}$ 说来, 可知一般 dx^μ 与 $d\theta^\beta$ 是斜交的, 但可以选择正交基 $\{\omega^\mu = dx^\mu - B_\alpha{}^\mu(x, \theta) d\theta^\alpha, d\theta^\beta\}$, 其中函数 $B_\alpha{}^\mu(x, \theta)$ 与度规 G^{AB} 的关系为

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} + B_\alpha{}^\mu B_\beta{}^\nu \eta^{\alpha\beta} & B_\alpha{}^\mu \eta^{\alpha\beta} \\ B_\beta{}^\nu \eta^{\alpha\beta} & \eta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

5. $G_{AB}(Z)$ 的表达式是什么?

在玻色空间情形, $G_{\mu\nu}(x)$ 由爱因斯坦场方程定出. 类似于此, 在玻色-费密空间情形, 则 $G_{AB}(Z)$ 应由推广的爱因斯坦场方程定出^[2]. 但作为一种近似, 其最简单的选择是使玻色-费密空间为零曲率的或常曲率的. 为此, 可以选择 $B_\alpha{}^\mu(x, \theta)$ 分别等于 $i(\bar{\theta}\gamma^\mu)_\alpha$ 或 $i\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^\mu)_\alpha$, 其中 θ 是常量旋量, θ 仍是 Majorana 变量旋量. 由此可得

$$\begin{aligned} \textcircled{1} G_{AB} &= \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & -i(\bar{\theta}\gamma_\nu)_\beta \\ i(\bar{\theta}\gamma_\nu)_\alpha & \eta_{\alpha\beta} + (\bar{\theta}\gamma_\lambda)_\alpha (\bar{\theta}\gamma^\lambda)_\beta \end{pmatrix}, \\ \textcircled{2} G^{AB} &= \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} + (\bar{\theta}\gamma^\mu)_\tau (\bar{\theta}\gamma^\nu)_\delta \eta^{\tau\delta} & i(\bar{\theta}\gamma^\mu)_\tau \eta^{\tau\beta} \\ i(\bar{\theta}\gamma^\nu)_\tau \eta^{\tau\alpha} & \eta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \\ \textcircled{3} G_{AB} &= \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & -i\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_\mu)_\beta \\ i\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_\nu)_\alpha & \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_\lambda)_\alpha (\bar{\theta}\gamma^\lambda)_\beta \end{pmatrix}, \\ \textcircled{4} G^{AB} &= \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma^\mu)_\tau (\bar{\theta}\gamma^\nu)_\delta \eta^{\tau\delta} & i\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^\mu)_\tau \eta^{\tau\beta} \\ i\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma^\nu)_\tau \eta^{\tau\alpha} & \eta^{\alpha\beta} \equiv -c_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因而可以计算出曲率张量^[2]

$$\begin{aligned} R_{AB}^{(\text{常})} &= \frac{1}{4} G_{AB}^{(\text{常})} + \frac{1}{4} [-(C^{-1})_{AB}], \\ R &= (-1)^b G^{BA} R_{AB} = (-1)^b G^{BA} \frac{1}{4} G_{AB}^{(\text{常})} + (-1) \frac{1}{4} G^{\beta\alpha} \eta_{\alpha\beta} = -1 \end{aligned}$$

以及

$$R_{AB}^{(\text{零})} = 0, \quad R^{(\text{零})} = 0.$$

三、保度量变换

1. 无穷小坐标变换

$$\begin{aligned} Z^A &\rightarrow Z'^A = Z^A + \xi^A(Z), \\ |\xi^A| &\ll |Z|, \end{aligned}$$

称作保度量变换, 如果保持度规不变即有

$$G_{AB}(Z) \rightarrow G'_{AB}(Z') = G_{AB}(Z'),$$

亦即保持线元不变

$$ds^2 = dZ^A G_{AB}(Z) dZ^B = dZ'^A G_{AB}(Z') dZ'^B = ds'^2.$$

因此有等式

$$\begin{aligned} G_{AB}(Z) &= \left(\frac{\partial_L}{\partial Z^A} Z'^C \right) G_{CD}(Z') \left(Z'^D \frac{\partial_R}{\partial Z^B} \right) \\ &= G_{AB}(Z) + G_{AB,D} \xi^D + G_{AD} \xi^D_{,B} + (-1)^{a+ac} \xi^C_{,A} G_{CB}, \end{aligned}$$

也就是方程

$$G_{AB,D} \xi^D + G_{AD} \xi^D_{,B} + (-1)^{a+ad} \xi^D_{,A} G_{DB} = 0. \quad (1)$$

我们称满足上式的 ξ^A 为超 Killing 向量。

2. 对协变的超 Killing 向量 $\xi_A = G_{AD} \xi^D$ 有公式

$$G_{AD} \xi^D_{,B} = \xi_{A,B} - (-1)^{bd} G_{AD,B} \xi^D$$

以及

$$(-1)^{a+ad} \xi^D_{,A} G_{DB} = \eta_{ab} [\xi_{B,A} - (-1)^{ad} G_{BD,A} \xi^D].$$

于是保度量条件方程 (1) 式, 变成

$$\xi_{A;B} + \eta_{ab} \xi_{B;A} = 0,$$

这可称为超 Killing 条件方程, 详细的写出是

$$\begin{aligned} 10 \text{ 个独立的方程} & \quad \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \\ 16 \text{ 个独立的方程} & \quad \xi_{\mu;\hat{b}} - \xi_{\hat{b};\mu} = 0, \\ 6 \text{ 个独立的方程} & \quad \xi_{\alpha;\hat{b}} - \xi_{\hat{b};\hat{\alpha}} = 0. \end{aligned}$$

四、曲率张量及其循环性

由 $R^D{}_{AB\hat{C}}$ 的表达式可以推出下面的代数对称性方程:

$$R^D{}_{AB\hat{C}} + (-1)^{bc+(a+b)d}\eta_{ab}R^D{}_{B\hat{C}A} + (-1)^{ab+(a+c)d}\eta_{ac}R^D{}_{CA\hat{B}} = 0,$$

即 $R^D{}_{AB\hat{C}}$ 有循环性.

对超 Killing 向量 ξ_A , 利用第二节的公式, 知满足下式:

$$\xi_{A;\hat{B};\hat{C}} - (-1)^{bc}\xi_{A;\hat{C};\hat{B}} = -(-1)^{bc}[(-1)^{(b+c)d}R^D{}_{AB\hat{C}}\xi_D].$$

对 ξ_B , ξ_C 可求出类似的方程.

由上述公式利用超 Killing 条件方程, 不难求得超 Killing 向量 ξ_C 所应满足的二阶微分方程

$$\xi_{C;\hat{B};\hat{A}} = -(-1)^{a(b+c)+(a+c)d}[(-1)^{(b+c)d}R^D{}_{AB\hat{C}}\xi_D].$$

五、零曲率玻色-费密空间

1. 于此情形, 四阶曲率张量 $R^D{}_{AB\hat{C}} = 0$. 当选取零联络后, 有 $\xi_{A;\hat{B}} = \xi_{A,B}$, 因此超 Killing 向量 ξ_A 所应满足的二阶微分方程为

$$\xi_{A,B,C} = 0.$$

其通解显然是

$$\xi_A = C_A + C_{AB}Z^B,$$

即

$$\begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \xi_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\mu \\ C_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\mu\nu}x^\nu \\ C_{\alpha\nu}x^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\mu\beta}\theta^\beta \\ C_{\alpha\beta}\theta^\beta \end{pmatrix},$$

其中 C_A 及 C_{AB} 是不依赖于 Z 的常量. 将上述解代入超 Killing 方程, 得如下的几组代数方程

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu} &= 0, & C_{\mu\beta} - C_{\beta\mu} &= 0, \\ C_{\alpha\nu} - C_{\nu\alpha} &= 0, & C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

即 $C_{\mu\nu}$ 是反对称的, 因而只有 6 个独立分量, 以后记作 $\epsilon_{\mu\nu}$. $C_{\alpha\beta}$ 是对称的, 故有 10 个独立分量. $C_{\mu\beta} = C_{\beta\mu}$ 有 16 个独立分量. 加上 8 个独立分量 C_μ 及 C_a 后, 知超 Killing 向量 ξ_A 共有 40 个独立参数. 总之, 零曲率玻色-费密空间的超 Killing 向量为

$$\begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \xi_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{\mu\nu}x^\nu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\mu\beta}\theta^\beta \\ C_{\alpha\beta}\theta^\beta \end{pmatrix}.$$

2. 对应于 (40 个) 超对称变换参数 C_μ , $C_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}$, C_a , $C_{\alpha\beta}$, $C_{\mu\alpha}$ 的相应生成元是 P_μ , $J_{\mu\nu}$, S_a , $S_{\alpha\beta}$, $E_{\mu\alpha}$. 可以推导出它们的具体微分算符表达式为

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -i\partial_\mu, \\ J_{\mu\nu} &= -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \\ S_a &= -i \frac{\partial}{\partial \theta^a} = -i\partial_a, \\ S_{\alpha\beta} &= \theta_\alpha\partial_\beta + \theta_\beta\partial_\alpha, \\ E_{\mu\alpha} &= i(x_\mu\partial_\alpha + \theta_\alpha\partial_\mu). \end{aligned}$$

3. 这些生成元间的对易关系为

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] &= 0, [P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho), \\
 [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \\
 \{S_\alpha, S_\beta\} &= 0, [S_\alpha, P_\nu] = [S_\alpha, J_{\rho\sigma}] = 0, \\
 [S_\alpha, S_{\beta\gamma}] &= -\eta_{\gamma\alpha}S_\beta - \eta_{\beta\alpha}S_\gamma, \{S_\alpha, \Xi_{\nu\beta}\} = i\eta_{\alpha\beta}P_\nu, \\
 [S_{\alpha\beta}, S_{\gamma\delta}] &= \eta_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma}S_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\gamma}S_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta}S_{\alpha\gamma}, \\
 [S_{\alpha\beta}, P_\nu] &= [S_{\alpha\beta}, J_{\rho\sigma}] = 0, [S_{\alpha\beta}, \Xi_{\rho\gamma}] = \eta_{\beta\gamma}\Xi_{\rho\alpha} + \eta_{\alpha\gamma}\Xi_{\rho\beta}, \\
 \{\Xi_{\mu\alpha}, \Xi_{\nu\beta}\} &= \eta_{\mu\nu}S_{\alpha\beta} - i\eta_{\alpha\beta}J_{\mu\nu}, [\Xi_{\mu\alpha}, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}S_\alpha, \\
 [\Xi_{\mu\alpha}, J_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\rho\mu}\Xi_{\sigma\alpha} - \eta_{\sigma\mu}\Xi_{\rho\alpha}).
 \end{aligned}$$

Dondi 等人^[4]曾对 4 + 2 维的超空间进行过研究,并得出过类似的对称关系式。

六、常曲率玻色-费密空间

1. 线元为

$$ds^2 = \left(dx^\mu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu d\theta\right)\left(dx_\mu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu d\theta\right) + d\bar{\theta}d\theta,$$

直接求解超 Killing 方程是比较困难的,但是容易找出一个特解,即使线元 ds^2 的两项中的每一项都是不变量的变换。显然,变换

$$\theta \rightarrow \theta' = s\theta = e^{-i\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\theta \simeq \theta + \frac{-i}{4}\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\theta, \quad \sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

使得 $d\bar{\theta}d\theta$ 为不变,而 $\bar{\theta}\gamma^\mu d\theta$ 象四维向量一样变换。故知 Poincaré 变换

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = b_\mu + x_\mu + \epsilon_{\mu\nu}x^\nu, \quad \theta_\alpha \rightarrow \theta'_\alpha = \theta_\alpha - \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha$$

使得量 $\left(dx^\mu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu d\theta\right)\left(dx_\mu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu d\theta\right)$ 是不变量,因而知超 Killing 向量为

$$\begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \xi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{\mu\nu}x^\nu \\ -\frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha \end{pmatrix}.$$

另外,变换

$$\theta \rightarrow \theta + \epsilon,$$

显然使量 $d\bar{\theta}d\theta$ 为不变量,为了使

$$\left(dx^\mu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu d\theta\right)\eta_{\mu\nu}\left(dx^\nu - i\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu d\theta\right)$$

为不变量,只须伴随以变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta$ 即可。这就是所谓的超平移变换 (super-translation)。

显然,此常曲率超空间中的一般超 Killing 向量为

$$\begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \xi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma_\mu \theta \\ e_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{\mu\nu} x^\nu \\ -\frac{i}{4} e_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \theta \end{pmatrix}.$$

2. 对应于(14个)超对称变换参数; C_μ , $C_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}$, C_α 的相应生成元是 P_μ , $J_{\mu\nu}$, S_α . 悉知^[5], 它们的具体微分算符表达式为

$$P_\mu = -i\partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \quad S = -i\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\right), \quad \bar{\theta} = \gamma_\rho\partial_\rho.$$

而它们间的对易关系为

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad \frac{1}{i}[P_\mu, J_{\nu\lambda}] = \eta_{\mu\nu}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\nu,$$

$$\frac{1}{i}[J_{\mu\nu}J_{\lambda\rho}] = \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho},$$

$$[S_\alpha, P_\mu] = 0, \quad [S_\alpha, J_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}S)_\alpha, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = -(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu.$$

参 考 文 献

- [1] D. V. Volkov, V. P. Akulov, *Phys. Lett.*, **46B**(1973), 109; A. Neveu, J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.*, **B70**(1974), 39; A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.*, **B76**(1974), 477.
- [2] R. Arnowitt, P. Nath, *Gen. Rel. Grav. J.*, **7**(1976), 89; P. Nath, *Gauge Theories and Modern Field Theory*, (1975), 281.
- [3] Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, М., «Наука», (1965).
- [4] P. H. Dondi, P. D. Jarvis, *Physics Letters*, **84B**(1979), 75.
- [5] A. Salam, J. Strathdee, *Fortschritte der Physik*, **26**(1978), 57; P. Fayet, S. Ferrara, *Physics Report C*, **32**(1977), 249.

SUPER KILLING EQUATION AND SUPERSYMMETRY TRANSFORMATION

ZHANG LI-NING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In super space (x, θ) , as the metric tensor field $G^{AB}(x, \theta)$ is given, we calculated the Riemann curvature tensor $R^D{}_{AB\hat{C}}$ of the fourth rank and its generalized cyclicity.

The equation that must be satisfied by isometry in the super space, i.e. super Killing equation: $\xi_{A:B} + \eta_{AB} \xi_{B:A} = 0$, is deduced.

In flat super space with zero curvature tensor, we have obtained the general solutions of the super Killing equation and the commutation relations of the corresponding generators. In the case of constant curvature, we have obtained a special solution of the super Killing equation.