

等离子体在均匀强磁场中的横向输运系数

胡希伟 霍裕平 陈正雄 张澄

(中国科学院等离子体物理研究所)

1979年11月20日收到; 1980年1月28日收到修改稿

提 要

本文利用 Kubo 型线性输运系数公式和 Landau 表象计算了等离子体在强磁场中的扩散系数、热导率和粘滞系数。和以往解 Boltzmann 方程的方法相比, 本文所用方法有如下优点: 在处理强磁场、多体长程相互作用体系时没有原则上的困难; 物理图象简单、清晰; 在准确到相互作用的二次项时, 不用解输运方程就能得到上述的横向输运系数的解析表达式。本文结果和用 Chapman-Enskog 法解线性 Boltzmann 方程时得到的数值结果基本相符而略有不同, 在对离子电荷数 Z 的依赖关系上则有较明显的不同。

一、引 言

计算输运系数通常有两种方法: 一种是解 Boltzmann 方程; 另一种是利用 Kubo 线性输运系数公式。因此, 比较这两种方法的异同是很有意义的。

文献[1]证明了对电子-声子相互作用(点相互作用)体系, 这两种方法给出的无磁场时的电导率在准确到相互作用二次项时是完全相同的。文献[2]把上述问题推广到有磁场时的横向电导率及热导系数上, 发现在磁场为零时两种方法得出的准确到相互作用二次项时的输运系数是完全相同的, 而在磁场增强时两种方法得出的结果逐渐分离。文献[2]认为这种偏离主要是由于在磁场增强时, 带电粒子的回旋半径和平均自由程可以相比, 因而破坏了 Boltzmann 方程的基本假定之一——自由碰撞而造成的。

本文试图通过对等离子体在磁场中的横向输运系数的计算来进一步比较上述两种方法的结果。等离子体中的带电粒子经受的是多体非点相互作用, 这就进一步破坏了 Boltzmann 方程的另一个基本假设——二体相互作用, 因此可以预期用两种方法计算得到的结果应该有更大的偏离。

在用 Boltzmann 方程计算等离子体在磁场中的横向输运系数时, 一般是用 Chapman-Enskog 方法近似地求解^[3-5], 其优点是可以把输运系数的对角部份和非对角部份都同时算出, 其缺点是计算非常复杂, 只能通过 Sonine 多项式的逐阶展开给出数值结果。一般当展开多项式的阶级大于 2 时, 要通过计算机进行计算。

而在用 Kubo 公式进行计算时, 关键是选择表象。本文用的是 Landau 表象^[6], 其优点是可以将粒子慢变的导心运动和快变的回旋运动分开, 因此在计算横向输运系数中的对角部份(如扩散系数、热导系数、粘滞系数)时不但特别简单而且图象清晰。所以, 在比较

两种方法时,选用这些输运系数是特别方便的.

本文的基本出发点和假设是

1. 采用复合的 Landau 表象

假定磁场 $\mathbf{B}$ 在 z 方向,则复合 Landau 表象中的基矢为

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha}\phi_{\beta},$$

其中 (α, β) 可以取成 $(e, e), (e, i), (i, i)$, 而

$$\phi_e(\mathbf{r}_e) = \varphi_n(x_e - X_e) \frac{1}{L_y^{1/2}} e^{ik_y y_e} \frac{1}{L_z^{1/2}} e^{ik_z z_e},$$

$$\phi_i(\mathbf{r}_i) = \varphi_N(x_i - X_i) \frac{1}{L_y^{1/2}} e^{iK_y y_i} \frac{1}{L_z^{1/2}} e^{iK_z z_i}$$

是普通 Landau 表象中的电子 (e) 和离子 (i) 波函数, $V = L_x L_y L_z$ 是等离子体的体积. 下面用

$$\alpha = (n, k_y, k_z), \quad \beta = (N, K_y, K_z)$$

分别表示两组不同的量子数;如果复合表象是由不同粒子组成的, α 表示电子波函数的一组量子数, β 表示离子波函数的一组量子数;如果表象是由同种粒子组成的, 则 α, β 表示两组独立的量子数. 和 $\phi_{\alpha\beta}$ 相应的本征值为

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta},$$

其中

$$\epsilon_e = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_e + \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2, \quad \epsilon_i = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_i + \frac{\hbar^2}{2m_i} K_z^2.$$

在波函数中, $\varphi(x - X)$ 是谐振子的归一化波函数, 其中

$$X_e = -\frac{\hbar}{m_e \omega_e} k_y = -l_e^2 k_y, \quad X_i = -\frac{\hbar}{m_i \omega_i} K_y = l_i^2 K_y$$

是导心坐标. $\omega_e = |e|B/m_e c$, $\omega_i = |e|B/m_i c$, 是电子和离子的回旋频率.

2. 根据 Bohm-Pines 理论, 等离子体中粒子间的短程(“碰撞”)相互作用可以用屏蔽库仑作用来很好地描述,

$$V_{12} = \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/D} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}},$$

其中 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ 是相碰粒子的间距, $D = (8\pi n_e e^2 \beta)^{-1/2}$ 是德拜半径, n_e 是电子密度, $\beta = 1/kT$. 而

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2 + D^2}.$$

3. 在计算中, 和 1 相比略去了 $(m_e/m_i)^{1/2}$ 以上的小量.

4. 对于等离子体, 高温近似, $\beta^{-1} = kT \gg \hbar\omega$ 总是成立的: 这时量子数 $n, k_z; N, K_z$ 都是大数, 可以连续取值并趋向无穷.

5. 在以上的假定下, 准确到相互作用二级时的等离子体扩散系数 D_i , 热导率 K_i 和粘滞系数 $\eta_i (j = e, i)$ 可以写成^[2,7,10]

$$D_j = \frac{\pi}{n_j \hbar V} \text{Tr}[R_j L' \delta(L_0) L' R_j \rho_0],$$

$$\kappa_j = \frac{\pi \hbar \beta_j^2}{\hbar V} \text{Tr}[Q_j L' \delta(L_0) L' Q_j \rho_0],$$

$$\eta_i = \frac{\pi \beta_i}{\hbar V} \text{Tr}[J_i L' \delta(L_0) L' J_i \rho_0],$$

其中 $k, \hbar$ 分别是 Boltzmann 常数和 Plank 常数(已被 2π 除过), 而

$$R_e = \sum_{\alpha} X_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad R_i = \sum_{\beta} X_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta};$$

$$Q_e = \sum_{\alpha} X_{\alpha} e_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad Q_i = \sum_{\beta} X_{\beta} e_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta};$$

$$J_e = \hbar \sum_{\alpha} X_{\alpha} k_x a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad J_i = \hbar \sum_{\beta} X_{\beta} K_x b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta}$$

是各力学量在二次量子化表象中的表示式。其中 $a_{\alpha}^{\dagger}, a_{\alpha}; b_{\beta}^{\dagger}, b_{\beta}$ 分别是电子和离子的产生、消灭算符。 L_0 和 L' 是和 H_0 及 V_{12} 相对应的 Liouville 算子

$$L_0 = [H_0, \cdot], \quad L'_{12} = [V_{12}, \cdot],$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 是量子力学对易关系。

$$V_{ei} = \sum_{\substack{\alpha' \alpha \\ \beta' \beta}} V_{ei} \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \\ \beta' \beta \end{pmatrix} a_{\alpha'}^{\dagger} b_{\beta'}^{\dagger} a_{\alpha} b_{\beta}.$$

V_{ee} 和 V_{ii} 也可以类似地写出, 只是把产生、消灭算子改成同类粒子的。其中

$$\begin{aligned} V_{12} \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \\ \beta' \beta \end{pmatrix} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \langle \beta' | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_2} | \beta \rangle \langle \alpha' | e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_1} | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} J_{nn'}(X_{\alpha'}, q_x, X_{\alpha}) J_{NN'}(X_{\beta'}, -q_x, X_{\beta}) \\ &\quad \cdot \delta_{k'_y, k_y + q_y} \delta_{k'_z, k_z + q_z} \delta_{K'_y, K_y - q_y} \delta_{K'_z, K_z - q_z}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} J_{n'n}(X_{\alpha'}, q_x, X_{\alpha}) &= \int \varphi_{n'}(x - X_{\alpha'}) e^{iq_x x} \varphi_n(x - X_{\alpha}) dx \\ &= J_{n'n}^*(X_{\alpha'}, -q_x, X_{\alpha}), \end{aligned}$$

故有

$$\langle \alpha' | e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | \alpha \rangle = (\langle \alpha | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | \alpha' \rangle)^+.$$

离子部份的 $J_{N'N}$ 也可以类似地写出。最后, ρ_0 是平衡态的密度矩阵, 和 V_{12} 相应的是 ρ_0^{12} , 如

$$\rho_0^{ei} = \sum_{\alpha\beta} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta})} a_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} b_{\beta},$$

同样可以写出 ρ_0^{ee}, ρ_0^{ii} 。

在上述输运系数表达式中的阵迹事实上相当于一些电子和离子力学量的自关联函数。在具体计算时要注意到每个自关联函数(即阵迹)都应该写成两项, 例如电子力学量的阵迹可以有两项: 一项由电子-电子相互作用的贡献 (L'_{ee}, ρ_0^{ee}), 一项由电子-离子相互作用贡献的 (L'_{ei}, ρ_0^{ei}); 而离子自关联函数则由 (L'_{ii}, ρ_0^{ii}), (L'_{ei}, ρ_0^{ei}) 两项组成。

二、扩散系数

把 D_i 的表达式按上述规定写出, 考虑到碰撞前后的粒子总动量守恒, 即

$$L'_{ee}R_e = L'_{ii}R_i \equiv 0,$$

则同种粒子的相互作用对扩散系数无贡献, 再考虑到

$$X_i = -\frac{1}{Z} X_e$$

及准中性条件 ($n_e = Zn_i$), 就可以得到

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\pi}{n_e \hbar V} \text{Tr}[R_e L'_{ei} \delta(L_0) L'_{ei} R_e \rho^{ei}], \\ &= \frac{\pi}{n_e \hbar V^3} l_e^4 \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^2 q_y^2 \sum_{\substack{\alpha' \alpha \\ \beta' \beta}} F\left(\begin{smallmatrix} \alpha' \alpha \\ \beta' \beta \end{smallmatrix}\right), \\ D_i &= \frac{1}{Z} D_e, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F\left(\begin{smallmatrix} \alpha' \alpha \\ \beta' \beta \end{smallmatrix}\right) &= |J_{n'n}(X_{\alpha'}, q_x, X_{\alpha})|^2 |J_{N'N}(X_{\beta'}, -q_x, X_{\beta})|^2 \delta(\epsilon_{\alpha'} + \epsilon_{\beta'} - \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta}) \\ &\quad \cdot \delta_{k'_y, k_y + q_y} \delta_{k'_x, k_x + q_x} \delta_{K'_y, K_y - q_y} \delta_{K'_x, K_x - q_x} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha'} + \epsilon_{\alpha})}. \end{aligned}$$

然后按下述步骤求和:

1. 利用四个 δ 符号去掉四重求和 $\sum_{k_y} \sum_{K_y} \sum_{k_x} \sum_{K_x}$.

2. 把下列求和变成积分:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_y} \sum_{k'_y} &= \frac{1}{2\pi} \int dk'_y, & \frac{1}{L_x} \sum_{k'_x} &= \frac{1}{2\pi} \int dk'_x, \\ \frac{1}{L_y} \sum_{K'_y} &= \frac{1}{2\pi} \int dK'_y, & \frac{1}{L_x} \sum_{K'_x} &= \frac{1}{2\pi} \int dK'_x, \\ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

它们的积分限分别为

$$\begin{aligned} k'_x, K'_x, \mathbf{q}: &(-\infty, \infty), \\ k'_y: &[0, l_e^{-2} L_x], \quad K'_y: [0, l_i^{-2} L_x], \end{aligned}$$

其中 $l_e^2 L_x$ 和 $l_i^2 L_x$ 分别是 Landau 能级在 (n', k'_x) 及 (N', K'_x) 给定时 k'_y 及 K'_y 的简并度.

3. 利用高温近似把对 n', n, N', N 的求和变成积分, 积分限都是从 $0 \rightarrow \infty$. 同时取 $|J_{n'n}|^2$ 和 $|J_{N'N}|^2$ 在 n', n, N', N 及 $\Delta n = n' - n, \Delta N = N' - N$ 同为大数时的渐近表达式^[6,8,9]

$$|J_{n'n}|^2 \simeq \frac{1}{\pi} [(n' + n + 1)\alpha_e^2 - (n' - n)^2 - \alpha_e^2/4]^{-1/2},$$

$$|J_{N'N}|^2 \simeq \frac{1}{\pi} [(N' + N + 1)\alpha_i^2 - (N' - N)^2 - \alpha_i^2/4]^{-1/2},$$

其中 $\alpha_e^2 = l_e^2 q_{\perp}^2$, $\alpha_i^2 = l_i^2 q_{\perp}^2$, $q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2$.

4. 完成上述的各重积分, 利用归一条件

$$N_e = \sum_{n k_y k_z} e^{-\beta \epsilon_n} = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^2} l_e^{-2} (\beta \hbar \omega_e)^{-1} \sqrt{\frac{2\pi m_e}{\beta \hbar^2}},$$

$$N_i = \sum_{N K_y K_z} e^{-\beta \epsilon_N} = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^2} l_i^{-2} (\beta \hbar \omega_i)^{-1} \sqrt{\frac{2\pi m_i}{\beta \hbar^2}},$$

N_e , N_i 是总电子数及总离子数. 最后可得

$$D_e = \frac{\sqrt{2} n_i Z^2 e^4 \beta^{1/2}}{\sqrt{\pi} m_e^{3/2} \omega_e^2} \cdot f,$$

其中

$$f = \int d\mathbf{q} \frac{q_y^2}{q(q^2 + D^{-2})^2} e^{-\frac{\beta \hbar^2}{8m_e} q^2}$$

$$\simeq -\frac{2\pi}{3} (1 + c + \ln \lambda),$$

而

$$\ln \lambda = \ln \left(\frac{\beta \hbar^2}{8m_e} \frac{1}{D^2} \right) = -2 \left(\ln \Lambda + \frac{1}{2} \right),$$

$\ln \Lambda$ 是经过量子力学修正的电子库仑对数, $c = 0.5772$ 是欧拉常数. 故

$$f = \frac{4\pi}{3} \left(\ln \Lambda - \frac{c}{2} \right) \simeq \frac{4\pi}{3} \ln \Lambda \gg 1.$$

所以

$$D_e = \frac{1}{m_e \beta} \frac{\tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2},$$

$$D_i = \frac{1}{Z} \frac{1}{m_e \beta} \frac{\tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2} = \frac{1}{m_i \beta} \frac{\tau_{ie}}{(\omega_i \tau_{ie})^2},$$

其中

$$\tau_e^{-1} = \frac{4\sqrt{2\pi} Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda \beta^{3/2}}{3m_e^{1/2}}, \quad \tau_{ie} = \frac{m_i}{Z m_e} \tau_e,$$

则分别是电子-离子碰撞频率及离子-电子碰撞频率.

三、离子及电子热导率

按前面表示式离子热导率可以写成

$$\kappa_i = \frac{\pi \beta^2 \hbar}{h V} \{ \text{Tr} [Q_i L'_{ei} \delta(L_0) L'_{ei} Q_i \rho_0^{ii}] + \text{Tr} [Q_i L'_{ii} \delta(L_0) L'_{ii} Q_i \rho_0^{ii}] \}.$$

考虑到电子和离子碰撞对离子热导的贡献只是离子-离子碰撞贡献的 $(m_e/m_i)^{1/2}$, 故可以在热导表达式中略去这一项, 因而

$$\begin{aligned}\kappa_i &= \frac{\pi\beta^2 k}{\hbar V} \text{Tr}[Q_i L'_{ii} \delta(L_0) L'_{ii} Q_i \rho_0^{ii}] \\ &= \frac{\pi\beta^2 k}{\hbar V^3} \sum_q V_q^2 \sum_{\substack{\alpha'\alpha \\ \beta'\beta}} \mathcal{Q}_i^2 F \begin{pmatrix} \alpha'\alpha \\ \beta'\beta \end{pmatrix},\end{aligned}$$

而

$$\mathcal{Q}_i = X_{\beta'} e_{\beta'} + X_{\alpha'} e_{\alpha'} - X_{\beta} e_{\beta} - X_{\alpha} e_{\alpha}.$$

利用 δ 符号及 δ 函数, 再考虑到 $\sum_{k_y}$ 和 $\sum_{K_y}$ 有完全相等的相体积,

$$\sum_{k_y} \sum_{K_y} (K_y - k_y) = \sum_{k_y} \sum_{K_y} (K_y - k_y)^2 = 0,$$

则在进一步求阵迹时等价地有

$$\mathcal{Q}_i = l_i^2 q_y (e_{\beta'} - e_{\alpha'}).$$

重复和计算扩散系数时类似的各步骤, 有

$$\kappa_i = \frac{2n_i k}{m_i} \frac{\beta^{-1} \tau_i}{(\omega_i \tau_i)^2},$$

其中

$$\tau_i^{-1} = \frac{4\sqrt{\pi} n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda_i \beta^{3/2}}{3m_i^{1/2}}$$

是离子-离子碰撞频率, $\ln \Lambda_i$ 是离子的量子力学库仑对数,

$$\ln \Lambda_i = \ln \frac{2m_i u_i D}{\hbar} - \frac{1}{2} \gg 1.$$

电子热导由贡献基本相等的两项组成:

$$\kappa_e^I = \frac{\pi\beta^2 k}{\hbar V} \text{Tr}[Q_e L'_{ee} \delta(L_0) L'_{ee} Q_e \rho_0^{ee}],$$

$$\kappa_e^{II} = \frac{\pi\beta^2 k}{\hbar V} \text{Tr}[Q_e L'_{ei} \delta(L_0) L'_{ei} Q_e \rho_0^{ei}].$$

κ_e^I 的计算完全类似于 κ_i , 只要把其中离子的力学量改成电子的就行了,

$$\kappa_e^I = \frac{1}{\sqrt{2} Z} \frac{2k n_e}{m_e} \frac{\beta^{-1} \tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2},$$

其中因子 $1/(\sqrt{2} Z)$ 是由于 τ_e 和 τ_i 定义上的差别造成的.

$$\kappa_e^{II} = \frac{\pi\beta^2 k}{\hbar V^3} \sum_q V_q^2 \sum_{\substack{\alpha'\alpha \\ \beta'\beta}} (\mathcal{Q}_e^{II})^2 F \begin{pmatrix} \alpha'\alpha \\ \beta'\beta \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathcal{Q}_e^{II} = X_{\alpha'} e_{\alpha'} - X_{\alpha} e_{\alpha} = l_e^2 [k_y (e_{\alpha'} - e_{\alpha}) + q_y e_{\alpha'}].$$

由于电子和离子的质量相差悬殊, 故碰撞前后的能量改变很小而动量改变 q_y 却很大,

$$e_{\alpha'} - e_{\alpha} \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} e_{\alpha'} \ll e_{\alpha'}, \quad q_y \gg k_y,$$

故 $\mathcal{Q}_e^{II} \simeq l_e^2 q_y e_{\alpha'}$.

重复前面谈到的求迹步骤, 最后有

$$\kappa_e^{II} = \frac{2kn_e}{m_e} \frac{\beta^{-1}\tau_e}{(\omega_e\tau_e)^2}.$$

所以总的电子热导率为

$$\kappa_e = \kappa_e^I + \kappa_e^{II} = (1 + 0.71Z^{-1}) \frac{2kn_e}{m_e} \frac{\beta^{-1}\tau_e}{(\omega_e\tau_e)^2}.$$

四、离子和电子粘滞系数

离子粘滞系数也主要由离子-离子碰撞贡献:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \frac{\pi\beta}{\hbar V} \text{Tr}[J_i L'_{ii} \delta(L_0) L'_{ii} J_i \rho_0^{ii}] \\ &= \frac{\pi\beta}{\hbar V^3} \sum_q V_q^2 \sum_{\substack{\alpha'\alpha \\ \beta'\beta}} \mathcal{J}_i^2 F \left(\frac{\alpha'\alpha}{\beta'\beta} \right), \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{J}_i = (\hbar l_i^2)(K'_y K'_z + k'_y k'_z - K_y K_z - k_y k_z) = \hbar l_i^2 q_y (2q_x + k_x - K_x),$$

结果为

$$\eta_i = 1.6 \frac{n_i \beta^{-1} \tau_i}{(\omega_i \tau_i)^2}.$$

电子横向粘滞系数也由两项组成:

$$\eta_e^I = \frac{1}{Z} \frac{8}{5\sqrt{2}} \frac{n_e \beta^{-1} \tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2}, \quad \eta_e^{II} = 0.8 \frac{n_e \beta^{-1} \tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2}.$$

所以总的电子粘滞系数为

$$\eta_e = (0.8 + 1.13Z^{-1}) \frac{n_e \beta^{-1} \tau_e}{(\omega_e \tau_e)^2}.$$

五、讨 论

本节将把上面得到的诸输运系数与用 Chapman-Enskog 法解线性 Boltzmann 方程所得结果进行比较. 从解 Boltzmann 方程得到的输运系数其数值随所用 Sonine 多项式的项数 M 而稍有不同. 目前最精确的结果是由 Shobu Kaneko 等人得到的^[4,5], 他们用计算机算出了直到 $M=6$ 的“电导率”、热导率及直到 $M=50$ 的“电导率”. 此外, Braginskii^[3] 给出过 $M=2$ 的热导率及粘滞系数.

应该指出, Shobu Kaneko 等人给出的“电导率”实际上是不确切的, 一般来说等离子体中并不存在一般的欧姆定律, 而应该代之以广义欧姆定律. 他们计算的实际上是电子速度的自关联函数, 和本文所算的电子扩散系数中的电子速度自关联函数相当.

Shobu Kaneko 等人得到的结果相当于

$$D_e^I = e^{I(0)} \frac{\tau_e}{m_e \beta},$$

其中 $e^{I(0)}$ 是一数值因子, 随磁场强度及离子电荷数 Z 而不同. 本文的结果为

$$D_e = \frac{1}{(\omega_e \tau_e)^2} \frac{\tau_e}{m_e \beta}.$$

因此可以进行比较的是两者的数值因子 $e^{I(0)}$ 及 $(\omega_e \tau_e)^{-2}$. 图 1 给出了各种 $x (= \omega_e \tau_e)$ 值下两个因子的变化曲线, 其中 $e^{I(0)}$ 的值给出了 $M = 2$ 和 $M = 50$ 时的两种结果. 可以看到两种结果在 x 的整个取值范围内都有不同程度的偏离. 在 x 很小的低磁场区, 两者的差别主要是本方法的误差造成的, 因为当磁场 $B \rightarrow 0 (x = 0)$ 时, 本文结果将发散而不是无磁场时的数值, 而 Boltzmann 方程的结果却能连续地过渡到无磁场值. 但在磁场 (x 值) 很大的区域, 两者的差别是由 Boltzmann 方程的基本假定不再很好保持而造成的.

Braginskii^[3] 给出的离子热导率为

$$\kappa_i^B = \frac{x^2 + 1.3225}{x^4 + 2.7x^2 + 0.677} \frac{2n_i k \tau_i}{m_i \beta},$$

其中 $x = \omega_i \tau_i$, 而本文结果为

$$\kappa_i = \frac{1}{x^2} \frac{2n_i k \tau_i}{m_i \beta},$$

两者非常接近, 特别是 $x \rightarrow \infty$ 的极强磁场情况,

$$\kappa_i^B \simeq \frac{2n_i k \tau_i}{x^2 m_i \beta} = \kappa_i.$$

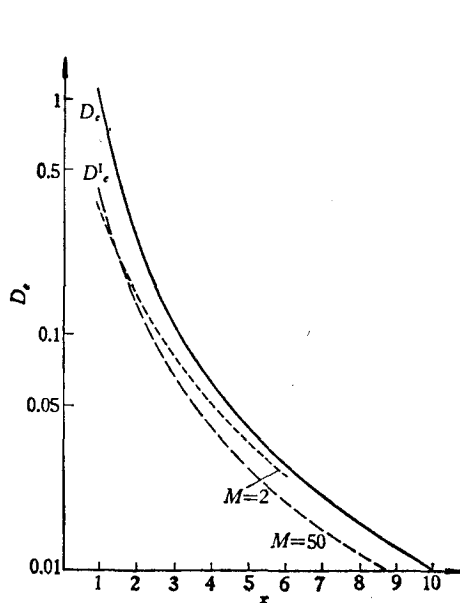


图 1

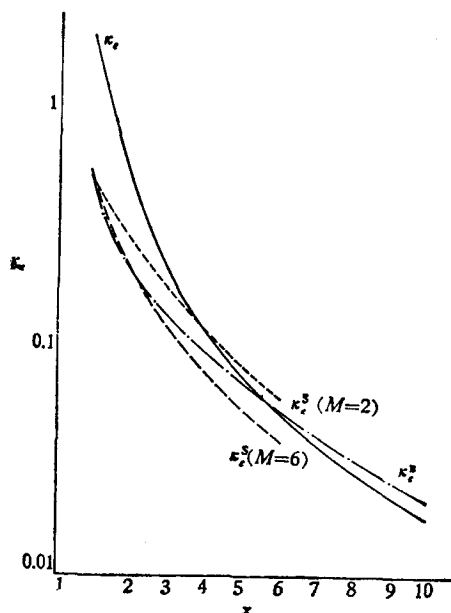


图 2

电子热导的经典结果有两个, 一个是计算机结果^[4], 一个是 Braginskii 结果,

$$\kappa_e^S = \frac{25}{8} b^{(-1)} \frac{2n_e k \tau_e}{m_e \beta},$$

$$\kappa_e^B = \frac{1}{2} \frac{\gamma'_1 x^2 + \gamma'_0}{x^4 + \delta_1 x^2 + \delta_0} \frac{2n_e k \tau_e}{m_e \beta},$$

其中 $b^{(-1)}$ 随 $x = \omega_e \tau_e$ 而不同, $\gamma'_1, \gamma'_0, \delta_1, \delta_0$ 则随 z 而不同。本文结果为

$$\kappa_e = \frac{(1 + 0.71 z^{-1})}{x^2} \frac{2n_e k \tau_e}{m_e \beta}.$$

图 2 是三者 $z = 1$ 时各数值因子间的比较 (对 κ_e^S 给出了 $M = 2.6$ 时的两组曲线)。

图 3 给出了不同 z 时 κ_e 和 κ_e^B 数值因子间的比较 (取 $x = 10$, 并对 $z = 1$ 的取值归一), 可以看到本文结果随 z 下降得要更快一些。

在 Braginskii 给出的横向粘滞系数中, 和本文相对应的为

$$\eta_i^B = \frac{1.2x^2 + 2.23}{x^4 + 4.03x^2 + 2.33} \frac{n_i \tau_i}{\beta} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \eta_i,$$

$$\eta_e^B = \frac{2.05x^2 + 8.5}{x^4 + 13.8x^2 + 11.6} \frac{n_e \tau_e}{\beta} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.06 \eta_e,$$

其中 η_i 和 η_e 为本文结果。

最后需要指出的是, 在解 Boltzmann 方程得到的输运系数中, 库仑对数取的是经典值 $\ln A_c$; 而本文结果中的库仑对数 $\ln A$ 是量子修正值。两者并不完全相同, 例如就电子库仑对数而言,

$$\ln A = \ln A_c - \ln \frac{u}{2\alpha c} - \frac{1}{2},$$

其中 $\alpha = |e_1 e_2 / \hbar c|$, 两者之差和温度有关,

$$T \sim 10^4 \text{K}, \quad \ln \frac{u}{2\alpha c} \sim -2.4;$$

$$\sim 10^6 \text{K}, \quad \sim 0;$$

$$\sim 10^8 \text{K}, \quad \sim 2.2.$$

故在温度的一个很大的取值范围内, $\ln A$ 和 $\ln A_c$ 之差不超过 2, 考虑到这时它们的绝对值一般都在 10 以上, 故由于库仑对数取法不同而引起的输运系数的不确定性一般不超过 15%。经典库仑对数是通过库仑作用的长程部份引人为截断而得到的, 这种截断有一定的任意性, 因而不如作为屏蔽库仑势自然产物的量子库仑对数严格。

参 考 文 献

- [1] K. D. Schotte, *Phys. Report. Phys. Lett. (c)* 46(3) (1978), 95.
- [2] Yu-Ping Huo et al., To be published in *Physics Review*.
- [3] S. I. Braginskii, "Review of Plasma Physics", Vol. 1, p. 205.

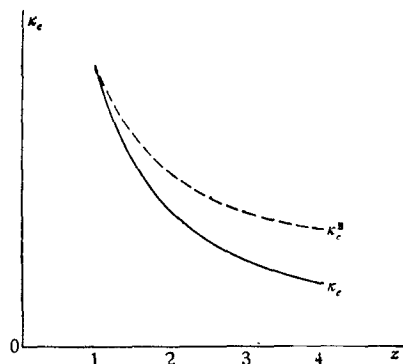


图 3

- [4] Shobu Kaneko, *Joun. Phys. Soc. Japan.*, 15(1960), 1685.
- [5] Shobu Kaneko *et al.*, *Joun. Phys. Soc. Japan.*, 45(1978), 1380.
- [6] R. Kubo *et al.*, "Solid State Physics", Vol. 17. p. 269.
- [7] R. Balescu, "Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics", p. 659.
- [8] Titeicas, *Ann. d. Phys.*, 22(1935), 128.
- [9] E. Adams *et al.*, *Joun. Phys. Chem. Solids.*, 10(1959), 254.
- [10] Yu-Ping Huo *et al.*, To be published in *Physics Review*.

TRAVERSE TRANSPORT COEFFICIENTS OF PLASMA IN HOMOGENEOUS STRONG MAGNETIC FIELD

HU XI-WEI HUO YU-PING CHEN ZHENG-XONG ZHANG CHENG

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The traverse transport coefficients of plasma in strong magnetic field have been calculated by Kubo formulas and Landau representation. They are diffusivity, thermal-conductivity and viscosity. The method used in this paper is better than the general one of solving Boltzmann equation. 1) The system, which is in strong magnetic field and subjects to multibody interaction, can be calculated without difficulty in principle. 2) It's physical model is simple and clear. 3) The analytic expressions of traverse transport coefficients can be obtained by calculating the matrix trace. Finally, we give a comparison between our results and general results obtained from Chapman-Enskog method.