

随机磁场中的双极电场与双极扩散

张承福 吴惟敏

(北京大学物理系)

1979年12月25日收到

提 要

等离子体中存在随机场输运时,必然会导致双极电场. 本文给出了存在电场时,粒子在随机场中的转移几率,由此可计算输运流、双极电场等. 算出的双极电场与碰撞的关系是不灵敏的($\frac{|e|E}{T_e} = -A \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx}$, A 与碰撞有关,但 $A \sim 1$). 并指出,此双极电场可作为判断随机场是否重要的必要条件(但非充分条件). 在随机场双极扩散中,杂质流速大于氢离子流速($v_i/v_e \simeq \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} z_i > 1$),可以解释托卡马克实验中,发生内部破裂时的杂质外流现象. 讨论了碰撞的影响及以上计算适用条件. 在高碰撞情形下,扩散流是更小的量. 导出了存在随机场时的等离子体动力学方程,与文献[3]给出的结果略有不同.

一、引 言

理论研究表明,在环形磁约束等离子体中,由于存在各种微观电磁模,存在着随机性磁场,这种随机磁场可能是导致电子反常热导的重要原因之一^[1,2]. 初步的实验迹象(韧致辐射谱的高能尾巴分析)^[3]也表明随机场可能是重要的.

粒子在稳态随机场中的扩散系数是正比于粒子速度的^[2],即

$$D = D_M |v_{\parallel}|,$$

其中 D_M 是由磁结构决定的常数, $v_{\parallel}$ 是平行于磁力线的速度分量. 由于通常离子速度远小于电子速度, $D_e \gg D_i$, 即扩散必是非双极的. 这将在极短时间内建立起双极电场,以维持准稳态输运. 在准稳态条件下,电子反常热导是主要的 ($\kappa \simeq n D_e$), 而双极扩散则是不重要的 ($D \simeq D_i$), 因此,通常只考虑随机场引起的电子反常热导,扩散问题仅一提而过.

但是,如果随机场电子反常热导是重要的,必然存在相应的双极电场. 考虑到另一种可能的反常扩散机制——静电漂移波扩散——是自动双极的,则只要 D_e (随机场扩散) 大于 D_{NC} (新经典扩散),体系的双极电场就主要由随机磁场所决定了. 因此,虽然随机场下的双极扩散一般并不重要,但测量和计算双极电场却是判别随机场是否重要的一个必要条件. 此外,在某些特殊条件下(例如发生内部破裂时, $q < 1$ 区域内的输运),随机场双极扩散可能是重要的,该区域内离子与杂质的输运可用随机场方法来描述与理解.

二、有电场时粒子在随机场中的转移几率

取坐标如下: 平均磁场方向为 z 轴; 梯度方向为 x 方向, $dn/dx < 0$; x 方向有空间均匀的随机场, 则双极电场也在 x 方向.

无双极电场时, 粒子在随机场中的转移几率已在文献[2]中给出

$$P(x, v; \Delta x, \Delta v, \Delta t) = [4\pi D_M |v| \Delta t]^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(\Delta x)^2 / 4 D_M |v| \Delta t\} \delta(\Delta v). \quad (1)$$

这里 v 指的是 $v_{\parallel} \simeq v_z$. 因子 $\delta(\Delta v)$ 表示转移过程中速度不变.

若在 x 方向存在双极电场 E , 则粒子在转移过程中 v 将改变, 在无碰撞情形下, 由能量守恒及磁矩守恒可知

$$v^2 - \frac{2eE}{m} x = v^2 - 2ax = \text{常数}, \quad (2)$$

其中 $a = eE/m$, e 是粒子电荷(代数值).

由于粒子速度随 x 的变化, 粒子在随机场中的扩散系数 $D = D_M |v|$ 不再是常数, 因此转移几率也不再能用(1)式表示, 需另行推导.

为便于将(1)式推广到有电场情形, 我们先将随机扩散过程用离散化形式表达. 设每隔 τ 时间, 粒子向 $\pm x$ 方向等几率行走 δ 距离, 即令

$$\Delta x = n\delta, \quad \Delta t = N\tau, \quad D = \delta^2 / 2\tau, \quad (3)$$

其中 n 是整数, N 是正整数. 则原来处于 $n = 0$ 格点上的一群粒子, 经 $N\tau$ 时间后, 在 n 点上发现此粒子的几率为

$$P(n, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{n^2}{2N}}. \quad (4)$$

无双极电场时, $D = \text{常数}$, 即 $\delta = \text{常数}$, 易证(4)与(1)式是等价的. 但(4)式比(1)式具有更广泛的适用范围, 它只要粒子由 n 点到 $n \pm 1$ 点的等几率性(这反映磁场的随机性), 而扩散系数可以不是常数(即格点的间距 δ 可以是不均匀的). (4)式可以推广到有电场的情形. 磁场的随机性保证了每一元过程的左右等几率性(在 δ 尺度内, 电场的影响是可略的. 可证, 若考虑此效应只引起更小的修正); 而在宏观尺度(远大于 δ) 内, 电场使粒子速度逐渐改变, 从而使扩散系数 D 或格点间距 δ 逐渐改变, 这就导致了在宏观尺度内扩散的左右不对称性. 因此, 将(4)式用于有电场情形仅需作两点修改:

1. δ 的不均匀性

由能量守恒(2)式及 $D = D_M |v|$ 可得

$$D(n) = D(o) \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

由(3)及(5)式可得

$$\delta(n) = \delta(o) \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (6)$$

而

$$\Delta x(n) = \sum_{m=1}^n \delta(m) = \sum_{m=1}^n \delta(o) \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(m) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

现在可令 $\tau \rightarrow 0$, 即令格点趋于无限稠密, 则(7)式可化为积分方程

$$\Delta x(n) = \int_0^n dm \delta(o) \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(m) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

对(8)式两边求 d/dn , 使之化为微分方程

$$\frac{d\Delta x(n)}{dn} = \delta(o) \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (9)$$

由(9)式可以解出

$$n = -\frac{2v^2}{3a\delta(o)} \left[1 - \left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right)^{\frac{3}{4}} \right] \quad (10.1)$$

或

$$\Delta x(n) = -\frac{v^2}{2a} \left[1 - \left(1 + \frac{3a}{2v^2} \delta(o)n \right)^{\frac{4}{3}} \right]. \quad (10.2)$$

2. 存在反射点

(10)式给出了格点的不均匀分布. 但由(10.1)式易见, 当

$$\left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right) < 0$$

时该式无意义. 这一点的物理意义是: 当

$$1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) = 0$$

时 (该处 $n = n_c = -\frac{2v^2}{3a\delta(o)}$), 粒子的速度已降为零, 不可能进入

$$\left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right) < 0$$

区域, 在 n_c 点, 由于电场的加速效应, 粒子全部向

$$\left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x(n) \right) > 0$$

区域扩散, 也即这是一个反射点. 存在一个反射点时, (4) 式相应地修改为 (设 $a < 0$, $n_c > 0$)

$$P(n, N) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(e^{-\frac{n^2}{2N}} + e^{-\frac{(2n_c - n)^2}{2N}} \right) & n \leq n_c, \\ 0 & n > n_c. \end{cases} \quad (11)$$

由(10), (11)式即可求得所需转移几率

$$\begin{aligned} P(x, v; \Delta x, \Delta v, \Delta t) &= \frac{1}{\delta(n)} P(n, N) \delta(\Delta v + v - \sqrt{v^2 + 2a\Delta x}) \\ &= [4\pi D_M |v| \Delta t]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right]^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad \cdot \left\{ \exp \left\{ -c^2 \left[1 - \left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right)^{\frac{3}{4}} \right]^2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \exp \left\{ -c^2 \left[1 + \left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \right\} \delta(\Delta v + v - \sqrt{v^2 + 2a\Delta x}). \quad (12)$$

此式适用范围是 $\left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right) \geq 0$, 当 $\left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right) < 0$ 时, 恒有 $P = 0$. (12) 式中因子 $1/\delta(n)$ 代表该处的格点数密度, $\delta(\Delta v + v - \sqrt{v^2 + 2a\Delta x})$ 代表能量守恒要求. 其中

$$c = \frac{v^2}{3a\sqrt{D_M|v|\Delta t}}. \quad (13)$$

易证, 当 $a \rightarrow 0$ 时, 即无电场时(12)式与(1)式一致.

(12)式显得较复杂, 但通过变量变换, 可以使之化为较简单的形式. 例如通常要计算的总是 $\langle \Delta x \rangle^l (l = 0, 1, 2, \dots)$ 的平均值, 在(12)式中对两项指数项分别作变量变换

$$z = c \left[1 \mp \left(1 + \frac{2a}{v^2} \Delta x \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (14)$$

则可证

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^l \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} (\Delta x)^l P(x, v; \Delta x, \Delta v, \Delta t) d\Delta x d\Delta v \\ &= \left(\frac{v^2}{2a} \right)^l \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{c} \right)^{\frac{4}{3}} - 1 \right]^l e^{-z^2} dz. \end{aligned} \quad (15)$$

$\langle (\Delta x)^0 \rangle = 1$ 代表 P 的归一性; 当 $a \neq 0$ 时 $\langle \Delta x \rangle \neq 0$, 反映了电场引起的扩散非对称性.

三、双极电场与输运流

计算单位时间内流经 $x = 0$ 面的粒子数, 即可求出 $x = 0$ 点的扩散流为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{\Delta t} \iint_{-\infty}^{\infty} dv d\Delta v \left[\int_{-\infty}^0 dx \int_{-x}^{\infty} d\Delta x - \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{-x} d\Delta x \right] \\ &\quad \cdot [f(x, v)P(x, v; \Delta x, \Delta v, \Delta t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

由于转移几率与粒子速度 $v (\equiv v_x)$ 有关, 因此计算 Γ 时还需知道 $f(x, v)$. 原则上说, 存在随机场时, 由于高速粒子扩散快, 低速粒子扩散慢, $f(x, v)$ 将逐渐偏离局域麦氏分布, 其变化的特征时间

$$\tau_s \simeq \frac{r_n^2}{D}, \quad r_n = \left| \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right|^{-1},$$

按现有实验参数, $\tau_s > 10^{-3} \text{sec}$. 而实际等离子体中总是存在碰撞的, 碰撞使之趋于麦氏分布, 其特征时间 $\tau_c \sim 10^{-5} \text{sec}$, 即总有 $\tau_c/\tau_s \ll 1$. 因此 $f(x, v)$ 可以很好地用局域麦氏分布近似描述之. 即

$$f(x, v) = \left[n(o) + x \frac{dn(o)}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{mv^2}{2T(o)} \eta \right) \right] f_M(0, v), \quad (17)$$

其中 $\eta = \frac{d \ln T(o)}{d \ln n(o)}$. 对(16)式作如下积分次序变换:

$$\left[\int_{-\infty}^0 dx \int_{-x}^{\infty} d\Delta x - \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{-x} d\Delta x \right] F(x, \Delta x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^{\infty} d\Delta x \int_{-\Delta x}^0 dx - \int_{-\infty}^0 d\Delta x \int_0^{-\Delta x} dx \right] F(x, \Delta x) \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta x \int_0^{-\Delta x} dx F(x, \Delta x).
\end{aligned} \quad (18)$$

并注意到(12)式的 P 与 x 无关, 则(16)–(18)式可得

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} dv f_M(v) \left[n(o) \langle \Delta x \rangle - \frac{1}{2} \frac{dn(o)}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{mv^2}{2T(o)} \eta \right) \langle (\Delta x)^2 \rangle \right], \quad (19)$$

其中 $\langle \Delta x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ 可由(15)式计算之. 对于 $|v| \approx 0$ 的绝大部分粒子, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, (13)式的 $|c| \gg 1$ (其物理意义是: $|c^{-1}| \approx \langle |\Delta v_E| \rangle / |v| \ll 1$, 也即在该时间内, 电场引起速度的改变是小量), 则(15)式可作近似计算, 保留到 Δt 一次项得

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{a}{2v^2} D_M |v| \Delta t, \quad (20.1)$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = 2D_M |v| \Delta t. \quad (20.2)$$

对于 $|v| = 0$ 附近的一个小区域 $|v| \lesssim v_c$, (15)和(20)式都不成立, 关于 v_c 的取值及该区对扩散流的贡献, 我们将在第五节讨论之. 对于 $|v| > v_c$ 的主要区域, 由(19), (20)式可算得

$$\Gamma = - \frac{D_M v_T n}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{eE}{4T} E_i(-v_c^2/v_T^2) + \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \left(1 + \frac{\eta}{2} \right) \right], \quad (21)$$

其中 E_i 是指数函数, 当 $v_c^2/v_T^2 \ll 1$ 时有

$$E_i(-v_c^2/v_T^2) \cong \varepsilon + \ln(v_c^2/v_T^2), \quad (22)$$

$\varepsilon \cong 0.5772 \dots$ 是欧拉常数.

考虑到 $D_e \gg D_i$, 双极电场可由 $\Gamma_e \approx 0$ 条件定出(误差是 $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ 量级, 可略)

$$\frac{|e|E}{T_e} = -A \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \left(1 + \frac{1}{2} \eta_e \right), \quad (23)$$

其中系数 $A = -4(\varepsilon + \ln v_c^2/v_T^2)$ 是接近于 1 的数, 它与 v_c 的关系是很不灵敏的, 如当 v_c/v_T 由 0.01 变到 0.2 时, A 仅由 0.463 变到 1.514. 所以尽管 v_c 值具有某些不确定因素, 但这对双极电场值是影响不大的.

通常 $dn_e/dx < 0$, $\eta_e > 0$, 所以随机场引起的双极电场 $E > 0$, 这是判断随机场电子反常热导是否重要的一个必要条件(但不充分). 也即, 如果托卡马克实验中电子能量损失主要是由随机磁场所致, 则应有 D_e (随机场扩散) 大于 D_{Ne} (新经典扩散), 则必须有大于 0 的双极电场(23)式.

设体系由电子、离子以及电荷数为 Z_i 的杂质离子组成, $T_i \approx T_e$, 则由(21)和(23)式可以算出双极扩散时的离子和杂质扩散流:

$$V_i = \Gamma_i/n_i = - \frac{D_M v_{Ti}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \frac{T_e}{T_i} \left(1 + \frac{\eta_e}{2} \right) + \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dx} \left(1 + \frac{\eta_i}{2} \right) \right], \quad (24.1)$$

$$V_I = \Gamma_I/n_I = - \frac{D_M v_{TI}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{Z_I}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \frac{T_e}{T_i} \left(1 + \frac{\eta_e}{2} \right) + \frac{1}{n_I} \frac{dn_I}{dx} \left(1 + \frac{\eta_I}{2} \right) \right]. \quad (24.2)$$

由于 $v_{Ti} \ll v_{Te}$, 在一般情形下, 这一扩散流是小于新经典扩散值的, 是不重要的. 但在某些特殊条件下, 例如在托卡马克实验中, 发生内部磁面破裂时, 在安全因子 $q < 1$ 的

区域内磁面结构是极为复杂的. 我们认为该区的输运性质可用强随机场近似描述之. 此时 D_M 很大, 强的电子热导首先使 T_e 在该区拉平, 然后, 由于 $D_M v_{Ti}$ 及 $D_M v_{Ti}$ 大于 D_{Ne} , 随机扩散使离子与杂质向外流. 注意到中心区杂质离子都是高度离化的, $Z_I \gg 1$, 则由 (24) 式可以得到

$$V_I/V_i \simeq Z_I \sqrt{\frac{m_i}{m_I}} > 1. \quad (25)$$

即在随机场扩散下, 杂质向外扩散比离子扩散快, 这可以解释发生内部破裂时杂质外流, 中心杂质浓度下降的实验现象^[4].

类似的计算可以给出能流与动量流(粘滞力)的表示式.

能流

$$q = \frac{1}{\Delta t} \int \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) dv \left[n \langle \Delta x \rangle - \frac{1}{2} \frac{dn}{dx} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{2T} \eta \right) \langle (\Delta x)^2 \rangle \right] f_M(v). \quad (26.1)$$

对于 $|v| > v_c$ 的主要区域, 由 (20) 式可算得电子能流

$$q_e = - \frac{D_M v_{Te}}{\sqrt{\pi}} n_e T_e \left\{ \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \left[1 + \frac{1}{E_i(-v_c^2/v_{Te}^2)} \right] + \frac{5}{2} \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[1 + \frac{1}{5E_i(-v_c^2/v_{Te}^2)} \right] \right\}. \quad (26.2)$$

动量流(电子粘滞力分量)

$$\Pi_{xx} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} m v dv \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{dn}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \eta + \frac{m(v - u(x))^2}{2T} \eta \right) + \frac{nm(v - u(x))}{2T} \frac{du}{dx} \right] \langle (\Delta x)^2 \rangle - n \langle \Delta x \rangle \right\} f_M(v). \quad (27.1)$$

对于 $|v| > v_c$ 的主要区域, 由 (20) 式可算得

$$\Pi_{xx} = \frac{2mnD_M v_T}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{T} \frac{dT}{dx} \right), \quad (27.2)$$

其中 $u(x) = j(x)/ne$ 是电子在 x 方向的平均流速.

四、随机场下的动力学方程

随机场引起的分布函数扩散项可用类似于福克-普朗克方程的方法推导之.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta x \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta v P(x - \Delta x, v - \Delta v; \Delta x, \Delta v, \Delta t) \cdot f(x - \Delta x, v - \Delta v) - f(x, v) \right]. \quad (28)$$

注意到 (12) 式给出的转移几率中含有反映能量守恒的因子 δ 函数, 在 (28) 式中应先对 $d\Delta v$ 积分, 以下 Δv 都是 v 与 Δx 的函数:

$$\Delta v = v \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2a}{v^2} \Delta x} \right) \simeq \frac{a}{v} \Delta x - \frac{a^2}{2v^3} (\Delta x)^2, \quad (29)$$

则(28)式可化为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta x P(x - \Delta x, v - \Delta v; \Delta x, \Delta v, \Delta t) \cdot \left(1 - \frac{2a}{v^2} \Delta x\right)^{-\frac{1}{2}} f_M(x - \Delta x, v - \Delta v) - f(x, v) \right], \quad (30)$$

其中因子 $\left(1 - \frac{2a}{v^2} \Delta x\right)^{-\frac{1}{2}}$ 反映了转移过程中速度空间体积元的变化。现在可对(28)式 P, f 函数中的 $(x - \Delta x)$ 变量在 x 点作展开(注意 Δv 是 Δx 的函数!), 保留到 $(\Delta x)^2$ 项, 可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{a}{v^2} \langle \Delta x \rangle f + \frac{3}{2} \frac{a^2}{v^4} \langle (\Delta x)^2 \rangle f - \mathcal{L} \langle \Delta x \rangle f - \frac{a}{v^2} \mathcal{L} \langle (\Delta x)^2 \rangle f + \frac{1}{2} \mathcal{L} \mathcal{L} \langle (\Delta x)^2 \rangle f \right], \quad (31)$$

其中算符

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{v} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (32)$$

对于 $|v| > v_c$ 的大多数粒子, $\langle \Delta x \rangle, \langle (\Delta x)^2 \rangle$ 由(20)式给出, 则可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st} = D_M |v| \left[\mathcal{L} \mathcal{L} - \frac{1}{2} \frac{a}{v^2} \mathcal{L} + \frac{a^2}{v^4} \right] f. \quad (33)$$

这就是所求的、随机场引起的 f 在坐标空间和速度空间的扩散项。(33)式与文献[3]给出的结果在 a^2 项, 即 E^2 项上是不同的(由于该文未发表计算步骤, 不便评述差别的原因)。尚需指出的是, (33)式对 $v = 0$ 点是奇异的。实际上, 在 $|v| < v_c$ 的区域内(33)式是不成立的, 这一问题将在下节专门讨论。

五、碰撞对随机扩散的影响

在以上计算中未考虑碰撞的影响。但是, 对于完全无碰撞的体系, 在电场作用下, 粒子能量逐渐增加, 体系的分布函数将不断演变, 是不可能维持稳态的。实际上, 碰撞总是存在的, 而且碰撞引起的速度变化率往往大于在电场中随机扩散引起的速度变化率。例如, 为使粒子速度在随机扩散中有 $\sim v_T$ 的改变, 所需时间 Δt_E 的量级估计为

$$\Delta v_E \simeq v_T \simeq \left| \frac{a}{v_T} \Delta x \right| \simeq \left| \frac{a}{v_T} \sqrt{D_M |v_T| \Delta t_E} \right|,$$

即

$$\Delta t_E \simeq 4 \left[\left(\frac{eE}{T} \right)^2 D_M v_T \right]^{-1}.$$

由(23)式知, $\left(\frac{eE}{T} \right)^2 \simeq \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^2$, 所以 Δt_E 在物理上就代表随机场相应的电子能量寿命。

对于托卡马克实验, 这至少是大于毫秒的值。而碰撞使粒子速度有 $\sim v_T$ 改变的时间是 $\tau_c = 1/\nu_c$, 一般实验条件下, $\tau_c \simeq 10^{-4} - 10^{-6}$ 秒, 即有 $\Delta t_E \gg \tau_c$ 。这就证明了上述结论。正因为如此, 才可以认为体系的稳态分布是近于局域麦氏分布的。

需要回答的问题是: 既然如此, 那么前面忽略碰撞的计算结论是否还成立? 或在什么条件下成立? 下面来讨论此问题.

由第三、四节知, 对于我们有实际兴趣的扩散流, 能流, 双极电场以及 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st}$ 项, 重要的不是转移几率本身, 而是量 $\langle \Delta x \rangle / \Delta t$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle / \Delta t$. 为计算这两个量, 可以将 Δt 取得足够小, 使得对于 $|v| \approx 0$ 的大多数粒子有

$$\begin{aligned} |\Delta v_c / v| &= \frac{v_T}{|v|} \sqrt{\frac{\Delta t}{\tau_c}} \ll 1, \\ |\Delta v_E / v| &= \left| \frac{a}{v^2} \Delta x \right| \simeq \left| \frac{a}{v^2} \sqrt{D_M |v| \Delta t} \right| \ll 1. \end{aligned} \quad (34)$$

即在此时间内, 碰撞和电场都只是引起速度的小改变, 不会使 v 变符号. 注意到随机场中粒子的转移几率是 $|v|$ 的函数 $P = P(|v|)$, (若 $|v|$ 不变, 则 $P = P_0$ 由(1)式给出), 碰撞或电场都是通过改变 $|v|$ 而改变 P 的. 下面将用一简化模型说明电场项和碰撞项的不同作用.

设粒子的初速度 v , 终速 $v + \Delta v_c + \Delta v_E$, 其平均速度为 $v + \frac{\Delta v_c}{2} + \frac{\Delta v_E}{2}$, 则此过程近似地可用 $P_0 \left(\left| v + \frac{\Delta v_c}{2} + \frac{\Delta v_E}{2} \right| \right)$ 描述之. 满足条件(34)式时可对

$$P_0 \left(\left| v + \frac{\Delta v_c}{2} + \frac{\Delta v_E}{2} \right| \right)$$

作展开:

$$\begin{aligned} P_0 \left(\left| v + \frac{\Delta v_c}{2} + \frac{\Delta v_E}{2} \right| \right) &\simeq P_0(|v|) + \left(\frac{\Delta v_c}{2} + \frac{\Delta v_E}{2} \right) \frac{\partial P_0(|v|)}{\partial v} + \dots \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} (\Delta v_c + \Delta v_E) \left(-\frac{1}{2v} + \frac{1}{v} \frac{(\Delta x)^2}{4D_M |v| \Delta t} + \dots \right) \right] P_0(|v|). \end{aligned} \quad (35)$$

注意到

$$\Delta v_E = \frac{a}{v} \Delta x - \frac{a^2}{2v^3} (\Delta x)^2,$$

由(35)式计算 $\langle \Delta x \rangle$ 可得

$$\langle \Delta x \rangle = -\frac{1}{4v} \langle \Delta v_c \Delta x \rangle_0 + \frac{1}{2v} \frac{1}{4D_M |v| \Delta t} \langle \Delta v_c \Delta x^3 \rangle_0 + \frac{a}{|v|} D_M \Delta t. \quad (36)$$

(36) 式右端前两项代表碰撞对随机扩散的贡献, $\langle \rangle_0$ 表示对 $P_0(|v|)$ 的平均. 由于 Δv_c 的主项 $\propto \sqrt{\Delta t}$ 而与 Δx 无关, 故 $\langle \Delta v_c \Delta x \rangle_0 = \langle \Delta v_c \Delta x^3 \rangle_0 = 0$; 若考虑碰撞频率随空间的变化, 则 Δv_c 的修正项必正比于 $\sqrt{\Delta t} \Delta x$, 它们对 $\langle \Delta x \rangle$ 的贡献虽不为零, 但是 $(\Delta t)^{3/2}$ 级小量, 是可以忽略的. 总之, 尽管有 $|\Delta v_c| > |\Delta v_E|$, 但碰撞对 $\langle \Delta x \rangle$ 的贡献是可以忽略的, 其物理原因是: 其主项对 $\pm \Delta x$ 是空间对称的. (36) 式右端第三项是电场项的贡献, 虽由于模型过于简单 (对变化的速度取其线性平均值), 因而数字系数与(20.1)式有所不同, 但却足以说明电场项与碰撞项不同, 它对 $\pm \Delta x$ 是空间不对称的, 是不会抵消的. (电场项的正确处理应按第二节的方法进行).

对于 $\langle(\Delta x)^2\rangle$ 项, 类似的计算可得

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = 2D_M|\nu|\Delta t + o(\Delta t^{3/2}), \quad (37)$$

即电场与碰撞的修正都是高级小量, 可略。此结果与(20.2)式是一致的。

以上证明了, 对 $\nu \approx 0$ 的大多数粒子, 只要 Δt 取得足够小, 使(34)式成立, 则碰撞的影响是可略的。但对于 $\nu \cong 0$ 的粒子, 条件(34)式不可能满足。实际上, 用转移几率描述随机扩散是一种统计描述, Δt 必须是一个“宏观量”, 即 Δt 必须大于“微观时间” Δt_μ , Δt_μ 是粒子飞跃磁力线关联长度 L_s 的时间,

$$\Delta t_\mu = \begin{cases} \frac{L_s}{|\nu|} & |\nu| \text{ 较大时,} \\ \frac{L_s}{|\Delta\nu_c|} = \frac{L_s}{v_T} \sqrt{\frac{\tau_c}{\Delta t_\mu}} & |\nu| \cong 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (38)$$

速度越小, Δt_μ 越大。对 $|\nu| \cong 0$ 的粒子, (38)式可定出

$$\Delta t_{\mu 0} = \left(\frac{L_s}{l}\right)^{2/3} \tau_c \quad (39)$$

$$|\Delta\nu_{c0}| = v_T \left(\frac{L_s}{l}\right)^{1/3}, \quad (40)$$

其中 $l = v_T \tau_c$ 是粒子自由程。

作为量级估计, 我们近似地将 $\Delta t_{\mu 0}$ 看成 Δt 的下限, 则对于 $|\nu| \lesssim |\Delta\nu_{c0}|$ 的粒子, 条件(34)式不再成立。对这些粒子的严格处理是困难的, 考虑到它们的速度在碰撞的作用下随机地改变大小和方向, 电场引起的不对称性被大大地抵消了, 又考虑到当 $\left|\frac{\Delta\nu_{c0}}{v_T}\right| \ll 1$

这些粒子数目很少, 预期它们对扩散流的贡献是小的。因此, 第三节中的截断速度 ν_c 可用 $\Delta\nu_{c0}$ 来估计, 即

$$\frac{\nu_c}{v_T} \simeq \left(\frac{L_s}{l}\right)^{1/3},$$

也即对于 $(L_s/l)^{1/3} \ll 1$ 的“低碰撞极限”, 有 $\nu_c/v_T \ll 1$, 以上计算适用。多数托卡马克实际条件是处于这一范围的。(按文献[1], $L_s \lesssim qR \sim 10^2$ cm, 而 $l \sim 10^3-10^5$ cm)。

由上可见, 出于种种原因, ν_c/v_T 的估计是不准确的。但正如第三节所指出的, 只要 ν_c/v_T 是小量, 其影响是很不灵敏的对数函数, 这一不准确性并不影响主要结果。

六、高碰撞极限下的双极电场与双极扩散

以上计算适用于 $L_s/l \ll 1$ 的低碰撞极限。当 $L_s/l \sim 1$ 时, 大部分粒子都不满足条件(34)式, 由于碰撞的随机性与磁力线的随机性交织在一起, 其数学处理是很困难的。而对于 $L_s/l \gg 1$ 的高碰撞极限则又较易处理了。 $L_s/l \gg 1$ 表示在 L_s 距离内粒子经多次碰撞, 必为局域平衡分布。就双极电场而言, 磁力线的随机性是不重要的, 即与通常纵向输运情形相同, 双极电场应为(无温度梯度时)

$$\frac{|e|E}{T_e} = -\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx}. \quad (41)$$

这与低碰撞极限的(23)式仅在数字系数上有所差别,表明碰撞对双极电场的影响是不灵敏的。

至于高碰撞极限下的双极扩散,则与纵向输运情形是很不相同的。对于完全电离的等离子体,存在纵向密度梯度时将不是扩散过程而是动力学加速过程,这可如此看出:将电子、离子当作整体来看,这是中性流体,电场不起作用,而摩擦力是内力,也不影响整体运动。因此,在压力梯度 $-\nabla P$ 的作用下,此流体必将不断加速,直至 $\nabla P = 0$ 为止¹⁾。而在随机磁场中,由于磁力线方向的随机性改变,确是扩散过程,其扩散系数可用下法算出: $D = (\Delta x)^2/2\tau$, $\Delta x = L_s\alpha$, 这里 α 是磁力线对于 z 轴的平均偏角。 τ 是流体元流过 L_s 距离的平均时间, $\tau = \sqrt{\frac{2L_s}{|A_s|}}$, 其中 A_s 是流体元的加速度,

$$A_s = |\nabla P \alpha / n(m_i + m_e)| = |v_{Ti}^2 \alpha / 2r_n|, \quad r_n = \left| \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \right|^{-1},$$

由此可算出

$$D = \frac{D_M v_{Ti}}{2} \sqrt{\frac{L_s}{r_n}} \alpha. \quad (42)$$

($D_M = L_s \alpha^2/2$), 与低碰撞情形相比(见(21)式), 相差因子 $\frac{1}{2} \sqrt{L_s \alpha / r_n}$, 通常实验中 $L_s/r_n \sim 10^4$, $\alpha \sim 10^{-4} - 10^{-6}$ ^[3], 所以这是一个很小的数。即在高碰撞情形下, 双极扩散流是更小的量。

参 考 文 献

- [1] A. B. Rechester and M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 38.
- [2] T. H. Stix, *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 353.
- [3] Kim Molvig *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 1240.
- [4] V. A. Vershkov and S. V. Mirnov, *Nucl. Fusion*, **14**(1974), 383.
- [5] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson, “等离子体动力学”(Chap. 10).

1) 某些教科书(如文献[5])用 τ 近似算出双极扩散系数 $D_s \approx 2D_i$ 。实际上这只适用于弱电离气体, 对于完全电离等离子体是不正确的。其原因在于 τ 近似不满足动量守恒要求。

THE AMBIPOLAR ELECTRIC FIELD AND THE AMBIPOLAR DIFFUSION IN A STOCHASTIC MAGNETIC FIELD

ZHANG CHENG-FU, WU WEI-MIN

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

It is shown that the transport of the plasma immersed in a stochastic magnetic field (s.m.f.) must lead to the producing of an ambipolar electric field. In this paper, the transition probability of charged particles in the s.m.f. was derived in the case of existing a transverse electric field. The transport fluxes and the ambipolar electric field were then calculated. The result shows that the ambipolar electric field is insensitive to the collision between particles. ($\frac{|e|E}{T_e} = -A \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx}$, A is a coefficient of about 1, which depends on collision insensitively.) This ambipolar electric field may be used as a necessary (but not sufficient) criterion of ascertaining whether the effect of s.m.f. on the plasma transport is important. In the transport process induced by s.m.f. the impure ions transport more rapidly than hydrogen ions ($V_I/V_i = [m_i/m_I]^{1/2} Z_i > 1$), this result can be used to explain the phenomenon in Tokamak experiment, i.e., when there appears interior disruption, the impurities will be extracted from centre region instead of being cumulated. We discussed also the effect of collision and the condition under which the above treatment is applicable. In the case of high collision, the diffusion flux is a much smaller quantity. The corresponding dynamic equation of plasma in a s.m.f. has been derived, it is somewhat different from that obtained by K. Molvig et al. in [3].