

可能的空-时流形和运动群

张 历 宁

邹 振 隆

(中国科学院理论物理研究所) (中国科学院北京天文台)

1980年3月18日收到

提 要

对空-时流形、运动群及其李代数作了尽量直观的几何分析与推导. 首先, 对惯性系的分析指出, 利用黎曼几何中的 Beltrami 定理后可知, 存在惯性系的空-时必是伪超球, 因而运动群就是旋转群, 于是不难推算出运动学变换的具体分析表达式及其生成元间的对易关系式. 由此, 具体而直观的推出了流形、群、代数的缩并关系.

一、引 言

惯性参考系是什么? 其存在性对可能的空-时流形和运动群的限制又是什么? 这是一个值得考虑的问题, 已有不少人进行过讨论^[1,2].

近年有人^[3,4]先从运动群的李代数出发进行研究, 得出了 De Sitter 李代数及其缩并. 然后, 再反过来对 De Sitter 李群及其缩并进行了讨论.

我们认为先从流形出发, 用几何方法讨论流形的“缩并”, 不仅有直观性的优点, 而且对较严格的讨论李群及李代数的缩并有启发性. 进之, 由运动群的明显解析形式出发, 讨论其对光速参数 c 和半径参数 R 的极限, 就会不失具体的物理意义.

以下, 我们先从 De Sitter 流形出发直观的虽然从数学上说来是不够严格的, 导出流形“缩并”的结果. 然后再较严格的由 De Sitter 群的解析表达式出发讨论群的“缩并”. 再后, 对 De Sitter 李代数, 我们也由其对易子对参数 c 及 R 的明显表达式直接得出缩并结果.

最后, 我们在附录一中说明了文中所用的符号并罗列了一些常遇见的空-时坐标, 在附录二中给出了常遇见的典型空-时及共形空-时中的运动学变换式.

二、De Sitter 空-时流形

空间与时间有关并共同构成一张流形, 空-时流形与物质有关, 其几何被物质所决定, 比如说通过爱因斯坦万有引力场方程所决定.

当物质分布的密度稀薄, 作为一种真空近似, 直接由关于质点运动变化的一般原理就能确定出空-时流形, 而不必通过求解爱因斯坦方程, 在不同精度的近似下可分别得到

(平直)牛顿时空-时“流形”; 零曲率空-时流形, 即闵可夫斯基空-时流形; 常曲率空-时

流形,即 De Sitter 空-时流形.

每张空-时流形上可以刻画多种数学上的坐标系,即物理上的参考系.观测与实验表明,反映物理的空间与时间测量并使自然规律有最简单的表达式的参考系是众参考系中的特殊一类——总体惯性参考系(global inertial references systems)而且有下述几个基本原理:

1. 惯性运动原理 自由质点作匀速直线运动的这一原理可以扩充为下述三条:

1) 自由质点在空-时流形上的世界线是类时短程线. 2) (在空-时流形上的众参考系中)存在总体惯性参考系;短程线被它表达为线性方程,即存在一种时间定义使得自由质点的运动被表达为满足线性方程的线性运动也就是匀速运动. 3) 诸总体惯性参考系之间的变换构成群.

2. 空-时的几何对称性原理 在总体惯性参考系中,空间表现出各向同性及均匀性,而时间表现出均匀性.

3. 时间方向的不对称性原理,即因果性原理 在固定的空间点看来,时间的早晚顺序有绝对性,即不因对总体惯性参考系的不同选择而异.

4. 极限速度假设 存在着有限的极限速度,而且就是光速.

可能的空-时流形是什么? 根据上述原理,首先是惯性原理,可作如下的分析. 总体惯性参考系的存在性本身,就已对空-时流形的可能类型作了严峻的限制. 由黎曼几何学中的 Beltrami 定理^[5,6]知,黎曼流形上存在总体惯性参考系的充要条件是其为常曲率的,因而空-时流形是对径点贴合后的四维伪超球(见附录一). 至于其号差(signature),则由上述诸基本原理可定出为 $(-+++)$,即常曲率空-时流形是 $(-+++)S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$,常被称为 De Sitter 空-时流形. 其实, $(-+++)S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$ 及其上的总体惯性参考系 $K[x^0, x^1, x^2, x^3]$ 可以分别称为惯性空-时流形及惯性空-时坐标,因为它们是把惯性概念贯彻到底的结果.

常曲率空-时流形所含参数的意义是: $\epsilon = \pm 1$ 是曲率的正负号, $\sqrt{\epsilon} R$ 是半径,其中 R 是某实数, c 是空-时比例因子取为光速,为了方便起见,经常把 c 取为1.

三、De Sitter 空-时流形的“缩并”

1. 平直极限 $R \rightarrow \infty$

De Sitter 空-时流形 $(-+++)S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$ 的方程,在作了一个 Scaling 变换 $\xi^5 \rightarrow R\xi^5$ 后为

$$(\xi \cdot \xi) + \epsilon R^2(\xi^5 \cdot \xi^5) = \epsilon R^2,$$

因而当 $R \rightarrow \infty$ 时有

$$\xi^5 \cdot \xi^5 = 1,$$

所以可以取 $\xi^5 = +1$ 的四维超平面 $(-+++R)_4$,即闵可夫斯基空-时流形作为 De Sitter 空-时流形的“缩并”^[7,8].

2. 非相对论极限 $c \rightarrow \infty$

某空-时流形,如果有 Robertson-Walker 线元

$$ds^2 = -dt^2 + S(t)^2 d\sigma^2,$$

其中

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{k}{4}(\vec{x} \cdot \vec{x})\right]^2} (d\vec{x} \cdot d\vec{x}),$$

则可以考虑 $c \rightarrow \infty$ 的极限,即看作是线元为 $(-dt^2)$ 的一维时间与线元为 $S(t)^2 d\sigma^2$ 的三维空间流形 $(+++)$ $S_3(R)$ 的直接和,并可称此为空-时流形的“缩并”.

特别是对于正曲率的 $(-+++)$ $S_4(R, c)$, 在 Lanczöš 坐标下,其线元为

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\cosh \frac{c}{R} t\right)^2 (d\vec{x} \cdot d\vec{x}),$$

于此“缩并”为一维时间流形与有指数膨胀因子 $\cosh \frac{c}{R} t$ 的三维空间流形 $(+++)$ $S_3(R, c)$ 的直接和,有人称此为弯曲牛顿空-时“流形” N_+ , 其上的运动群称作牛顿群 $\mathfrak{N}_+$.

对负曲率的 $(-+++)$ $S_4(iR, c)$, 在类似于 Lanczöš 的球极坐标系中,缩并为一维时间流形与有余弦振荡因子 $\cos \frac{c}{R} t$ 的三维空间流形 $(+++)$ $S_3(iR, c)$ 的直接和,有人称此为弯曲牛顿空-时“流形” N_- , 其上的运动群称作牛顿群 $\mathfrak{N}_-$.

3. $R \rightarrow \infty, c \rightarrow \infty$

对流形 $(-+++)$ $S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$ 先取 $R \rightarrow \infty$ 极限得 $(-+++)$ R_4 , 再取 $c \rightarrow \infty$ 极限后,悉知是一维时间 R 与三维平直空间的直接和,即平直牛顿空-时“流形” N .

对流形 $(-+++)$ $S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$, 先取 $c \rightarrow \infty$ 极限得 N_ϵ , 再取 $R \rightarrow \infty$ 且 $R/c \rightarrow \infty$ 的极限后,不难得到亦为一维时间与三维平直空间的直接和,即平直牛顿空-时“流形” N .

悉知,平直牛顿空-时“流形” N 上的运动群是伽利略群 g .

总之,上述空-时流形的“缩并”可以概括为图 1 所示.

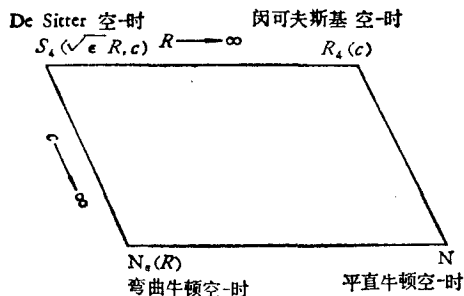


图 1

四、De Sitter 空-时流形上的运动群的分析表达式

我们把运动群理解为空-时流形上的保度量群¹⁾, 于是 De Sitter 空-时流形上的运动群就是保持伪超球⁽⁻⁺⁺⁺⁾ $S_4(\sqrt{\epsilon} R, c)$ 不变的变换群, 即是五维实欧氏空间 R_5 内的旋转群. 对于 $\epsilon = +1$ 情形, 它是 $SO(4, 1)$; 对于 $\epsilon = -1$ 情形, 它是 $SO(3, 2)$, 皆称为 De Sitter 群. 悉知, 它含有 10 个参数. De Sitter 群中的元素 E 称为 De Sitter 变换, 按其物理意义而区分为如下三类:

1. 空-时平移变换的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & \epsilon R^{-1} J' \xi'_{(0)} \\ \xi_{(0)} & \xi^5_{(0)} \\ -\frac{(0)}{\xi^5} D_0 & \frac{(0)}{R} \end{pmatrix};$$

2. 空-时推动 (boost) 变换的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_0 \in SO(3, 1);$$

3. 空间旋转的矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{R} \in SO(3).$$

有时为了符号简便起见, 在不致引起误解时, 我们也用同一符号 $\mathcal{R}$ 代表 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}$.

对五维向量 ξ 的任意旋转为

$$\xi \rightarrow \bar{\xi} = \xi \cdot ABC$$

相应地, 四维向量 $\xi = (\xi^0, \vec{\xi})$ 的变换为

$$\xi \rightarrow \bar{\xi} = \left(\xi - \frac{\xi^5}{\xi^5_{(0)}} \xi \right) (D_0 L_0 \mathcal{R}), \quad (1)$$

其中

$$D_0 = I - \epsilon \left(\frac{1}{R} \right)^2 \frac{R}{R + \xi^5_{(0)}} [J \xi'_{(0)} \xi_{(0)}],$$

$$L_0 = SO(3, 1),$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(3) \end{pmatrix}.$$

这就是郭汉英同志在文献 [2] 中用代数方法已解出过的公式.

对 D_0 的具体表达式还可有直观的几何推导, 只要注意到把给定点 $\xi_{(0)}$ 变到 ‘北极点’

1) 也有人选为更广的保时序群, 即 $ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \rho^2(x) ds^2$, 就是所谓共形群 $O(4, 2)$.

$(0, \vec{0}, R)$ 的最简单变换就是 A 即可。所谓最简单变换是指这样的旋转变换, 其旋转轴与由大圆弧 $\xi_{(0)}$, 北极点, 所定出的超平面垂直。

五、De Sitter 群的缩并

先介绍 De Sitter 群的物理意义和相应的几何解释, 并选定 Lanczós 坐标系 $(t, \vec{x})$, 首先考虑正曲率的 De Sitter 流形上的 De Sitter 群 $SO(4, 1)$ 。

1) De Sitter 空间平移是绕 ξ^0 轴的旋转。如果空间平移参量选作 $\vec{\xi}_{(0)}$, 在 Lanczós 坐标系中看来是

$$\vec{X}_{(0)} = \frac{\vec{\xi}_{(0)}}{\frac{R}{c} \operatorname{ch} \frac{c}{R} t_{(0)}},$$

则此空间平移把点 $(0, \vec{\xi}_{(0)})$ 变到点 $(0, \vec{0})$, 因而对任意点 $(\xi^0, \vec{\xi})$ 有空间平移变换式

$$(\xi^0, \vec{\xi}) \rightarrow (\xi^0, \vec{\xi}) = \left(\xi^0, \vec{\xi} - \frac{\xi^5}{\xi^5_{(0)}} \vec{\xi}_{(0)} \right) D_0(\vec{\xi}_{(0)}).$$

De Sitter 时间平移是绕 $\vec{\xi}$ 轴的旋转, 即在 (ξ^0, ξ^5) 超平面内的旋转, 旋转角是

$$t_{(0)} = \frac{R}{c} \operatorname{arcsch} \frac{\xi^0_{(0)}}{\xi^5_{(0)}}.$$

因此, 对任意点 $(\xi^0, \vec{\xi})$ 有时间平移变换式

$$(\xi^0, \vec{\xi}) \rightarrow (\xi^0, \vec{\xi}) = \left(\frac{R}{c} \operatorname{sh}(t + t_{(0)}), \vec{\xi} \right),$$

即

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + t_{(0)} \\ \vec{\xi} &\rightarrow \vec{\xi}. \end{aligned}$$

2) 空-时推动是绕 ξ^5 轴的旋转, 其推动参量是速度 $\vec{v}/c$, 而空-时推动矩阵 B 中的 $L_0(\vec{v}/c) \in SO(3, 1)$ 是熟知的齐次洛伦兹变换矩阵。

为了简明起见, 先考虑 $(-\vec{v})$ 是沿 ξ^1 轴的运动, 于此有推动的变换式

$$\begin{aligned} \xi^0 &\rightarrow \bar{\xi}^0 = \xi^0 \operatorname{ch} x - \xi^1 \operatorname{sh} x, \\ \xi^1 &\rightarrow \bar{\xi}^1 = -\xi^0 \operatorname{sh} x + \xi^1 \operatorname{ch} x, \\ \xi^2 &\rightarrow \bar{\xi}^2 = \xi^2, \\ \xi^3 &\rightarrow \bar{\xi}^3 = \xi^3, \end{aligned}$$

其中角度 $x = \operatorname{arc} \tanh(v/c)$ 。

3) 空间旋转是指子空间 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 内的旋转。当旋转参量是三个欧勒角 α, β, γ 时, 空间旋转变换式为

$$\begin{aligned} \xi^0 &\rightarrow \bar{\xi}^0 = \xi^0, \\ \vec{\xi} &\rightarrow \bar{\vec{\xi}} = \vec{\xi} \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

4) 一般的运动学变换即 De Sitter 变换为

$$\xi \rightarrow \bar{\xi} = \xi C A B = (\bar{\xi}, \xi^5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A B.$$

对负曲率的 De Sitter 流形上的 De Sitter 群 $SO(3, 2)$ 不难作类似的讨论.

以下讨论 De Sitter 群的缩并.

1. 非相对论极限 $c \rightarrow \infty$

先讨论 De Sitter 群 $SO(4, 1)$ 的情形.

1) De Sitter 空间平移 注意到 $c/R \ll 1$, 在保留 c/R 的一阶小量时, 利用近似式 $X^5 \sim X^5_{(0)}$, $D_0 \sim I$, 则有

$$(\xi^0, \vec{\xi}) \rightarrow (\xi^0, \vec{\xi}) \cong \left(\xi^0, \vec{\xi} - \vec{X}_{(0)} \operatorname{ch} \frac{c}{R} t \right),$$

$$t \rightarrow t,$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} - \vec{X}_{(0)} \operatorname{ch} \frac{c}{R} t.$$

2) De Sitter 时间平移 与极限过程无关, 恒为

$$t \rightarrow t + t_{(0)},$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi}.$$

3) De Sitter 空-时推动 首先考虑沿 ξ^1 轴运动的情形, 在保留到 v/c 的一阶小量时, 注意到 $\operatorname{sh} x \sim v/c$, $\operatorname{ch} x \sim 1$, 则得^[9]

$$\xi^0 \rightarrow \bar{\xi}^0 = \xi^0$$

即

$$t \rightarrow \bar{t} = t,$$

$$\xi^1 \rightarrow \bar{\xi}^1 = \xi^0 \frac{v}{c} + \xi^1 = \xi^1 - \frac{v}{c} \frac{R}{c} \left(\operatorname{sh} \frac{c}{R} t \right),$$

$$\xi^2 \rightarrow \bar{\xi}^2 = \xi^2, \quad \xi^3 \rightarrow \bar{\xi}^3 = \xi^3.$$

而对一般的推动则有

$$t \rightarrow t,$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \bar{\vec{\xi}} = \vec{\xi} - \frac{\vec{v}}{c} \frac{R}{c} \left(\operatorname{sh} \frac{c}{R} t \right).$$

4) De Sitter 空间旋转 与极限过程无关, 恒为

$$\xi^0 \rightarrow \bar{\xi}^0 = \xi^0,$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \bar{\vec{\xi}} = \vec{\xi} \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma).$$

5) 一般的 De Sitter 运动学变换

$$\xi \rightarrow \bar{\xi} = \xi C A B = (\bar{\xi}, \xi^5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A B$$

即

$$t \rightarrow \bar{t} = t + t_{(0)}$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} = \vec{\xi} \mathcal{R} - \vec{X}_{(0)} \operatorname{ch} \frac{c}{R} t - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{R}{c} \left(\operatorname{sh} \frac{c}{R} t \right).$$

这就是牛顿变换群 $\mathfrak{N}_+$ 的变换式.

至于 De Sitter 群 $SO(3, 2)$, 用完全类似的方法来考虑, 可得其非相对论极限是牛顿变换群 $\mathfrak{N}_-$ 为

$$t \rightarrow \bar{t} = t + t_{(0)},$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} = \vec{\xi} \mathcal{R} - \vec{X}_{(0)} \left(\cos \frac{c}{R} t \right) - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{R}{c} \left(\sin \frac{c}{R} t \right).$$

这正是 Bacry 等人^[3]由李代数的缩并, 假定空-时等同于李代数的齐性空间, 并用 Baker-Hausdorff 公式所推得之结果.

2. 平直极限 $R \rightarrow \infty$

1) 对 De Sitter 群, 有 $D_0 \sim 1$, $\xi^5/\xi^5 \sim 1$, 故 De Sitter 群的变换式变成

$$\xi \rightarrow \xi = (\xi \mathcal{R} - \xi) L_0,$$

即是非齐次洛伦兹变换.

2) 对牛顿群, 有

$$\operatorname{ch} \frac{c}{R} t \sim 1, \quad \operatorname{sh} \frac{c}{R} t \sim \frac{c}{R} t,$$

故牛顿群的变换式变成

$$t \rightarrow \bar{t} = t + t_{(0)},$$

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} = \vec{\xi} \mathcal{R} - \vec{X}_{(0)} - \left(\frac{\vec{v}}{c} \right) t,$$

即是伽利略变换.

总之, 上述运动群的缩并可以概括为图 2 所示.

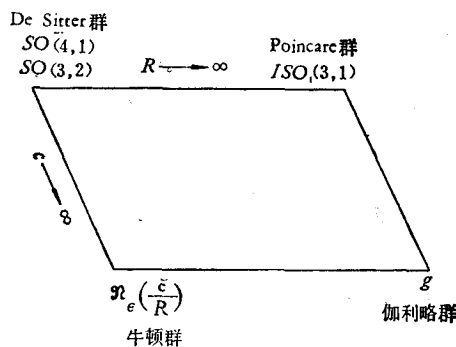


图 2

六、De Sitter 代数的缩并

为了考虑某李群的缩并, 也可以先考虑其李代数的缩并. 对 De Sitter 群, 无论 $SO(4,$

1) 或 $SO(3, 2)$ 其 10 个生成元 $J_{ab} = \xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a}$ 的物理意义如下式:

$$\begin{pmatrix} J_{ij} & J_{4j} & J_{5j} \\ J_{i4} & 0 & J_{54} \\ J_{i5} & J_{45} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_{ij} & cV_i & RP_i \\ cV_i & 0 & \frac{R}{c}T \\ RP_i & \frac{R}{c}T & 0 \end{pmatrix},$$

其中 J_{ij} 是空间旋转的生成元共三个, V_i 是推动的生成元共三个, P_i 是空间平移的生成元共三个, T 是时间平移的生成元为一个.

由 J_{ab} 间的对易关系式

$$[J_{ab}, J_{rs}] = \delta_{ar}J_{bs} + \delta_{bs}J_{ar} - \delta_{as}J_{br} - \delta_{br}J_{as},$$

不难推导出 De Sitter 代数的缩并, 概括为图 3.

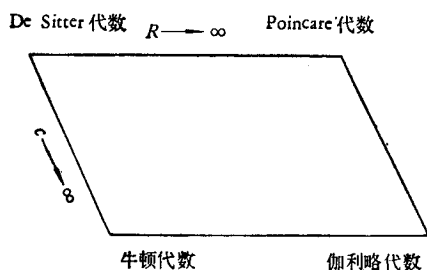


图 3

附 录 一

De Sitter 空-时流形上的坐标系

De Sitter 空-时流形 $(+++)$ $S_4(\sqrt{g}R, c)$ 上可以刻画多种坐标系, 供作空-时坐标系的选择. 常见的几种列举如下:

为了方便起见, 首先, 我们先集中介绍一些符号约定.

" $\rightarrow$ " 表示三维向量, 例如 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, 而其标积是 $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = x^i \delta_{ij} x^j$.

黑体表示四维向量, 例如, $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, 而其标积是 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x J x'$, x 表示矩阵 (x^0, x^1, x^2, x^3) , x' 表示其转置矩阵,

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

希腊文脚标 μ, ν 等取 0, 1, 2, 3 (或 1, 2, 3, 4); 英文脚标 i, j 等取 1, 2, 3; 英文脚标 a, b 等取 0, 1, 2, 3, 5 或 1, 2, 3, 4, 5.

1. 零曲率的闵可夫斯基空-时流形 $(+++)$ $S_4(\infty)$ 上的坐标系

我们常采用的是洛伦兹坐标系, 即(总体)惯性坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) .

2. 非零曲率的 De Sitter 空-时流形 $(+++)$ $S_4(\sqrt{g}R)$ 上的坐标系

1) 五维实、包容欧氏空间 R_5 内的笛卡尔坐标系 $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$.

$(+++)$ $S_4(\sqrt{g}R, c)$ 的方程为

$$-\xi^0\xi^0 + \xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 + \xi^3\xi^3 + c\xi^4\xi^4 \equiv \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} + c\xi^4\xi^4 = c\left(\frac{R}{c}\right)^2,$$

其中

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{对正曲率的伪超球}^{(-+++)}S_4(R), \\ -1 & \text{对负曲率的伪超球}^{(-+++)}S_4(iR). \end{cases}$$

为了方便起见,我们经常把参数 c 取作单位一.

流形 $^{(-+++)}S_4(\sqrt{\varepsilon}R)$ 的线元为

$$ds^2 = (d\xi d\xi) + \frac{(\xi d\xi)^2}{\varepsilon R^2 - (\xi \cdot \xi)}.$$

2) 共形坐标系 (u^0, u^1, u^2, u^3) .

共形坐标系 u 由如下的从南极点射到(通过北极点的)切面 T_N 的球极投影公式所定义:

$$(\xi, \xi') = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \varepsilon \frac{1}{R^2} (u \cdot u)} \left(u, R \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon \frac{1}{R^2} (u \cdot u) \right] \right),$$

在这一坐标系中,流形 $^{(-+++)}S_4(\sqrt{\varepsilon}R)$ 的线元为

$$ds^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon \frac{1}{R^2} (u \cdot u) \right]^2} (du \cdot du).$$

3) Beltrami 坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) .

Beltrami 坐标系由如下的球心投影公式所定义:

$$\begin{aligned} (\xi, \xi') &= \sigma(x, x)(x, R), \\ \sigma(x, x) &\equiv 1 + \frac{1}{R^2} (x \cdot x). \end{aligned}$$

在 Beltrami 坐标系中, $^{(-+++)}S_4(\sqrt{\varepsilon}R)$ 的线元为

$$ds^2 = \frac{1}{\left[1 + \varepsilon \frac{1}{R^2} (x \cdot x) \right]^2} \left\{ \left[1 + \varepsilon \frac{1}{R^2} (x \cdot x) \right] (dx \cdot dx) - \varepsilon \frac{1}{R^2} (x \cdot dx)^2 \right\}.$$

3. 正曲率的 De Sitter 空-时流形 $^{(-+++)}S_4(R)$ 上的坐标系

具有 Robertson-Walker 线元

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + s(t)^2 d\sigma^2, \\ d\sigma^2 &= \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{4} k(\vec{x} \cdot \vec{x}) \right]^2} (d\vec{x} \cdot d\vec{x}) \end{aligned}$$

的 Robertson-Walker 空-时流形,种类很多,(显然 $^{(-+++)}S_4(R)$ 是其特例,)而且在它上面存在着能分别使其三维子空间的曲率 $k = 0, -1, +1$ 的如下三种坐标系.

1) 极限球 (Horosphere) 坐标系即 Lemaître-Robertson 坐标系 $(t^{(0)}, X^1, X^2, X^3)$.

极限球坐标系与五维笛卡尔坐标系的关系如下:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= R \operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{R} e^{\frac{1}{R} t^{(0)}} \rho^2, \\ \vec{\xi} &= e^{\frac{1}{R} t^{(0)}} \vec{X}, \\ \xi^3 &= R \operatorname{ch} \frac{1}{R} t^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{1}{R} e^{\frac{1}{R} t^{(0)}} \rho^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} X^1 &= \rho \sin \theta \cos \psi, \\ X^2 &= \rho \sin \theta \sin \psi, \\ X^3 &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

在极限球坐标系中,流形 $^{(-+++)}S_4(R)$ 的线元为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt^{(0)})^2 + (e^{\frac{1}{R} t^{(0)}})^2 d\sigma^2, \\ d\sigma^2 &= d\vec{X} \cdot d\vec{X} = d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2). \end{aligned}$$

2) 短程 (geodesic) 费密坐标之一 $(t^{(-)}, X^1, X^2, X^3)$, 它与五维笛卡尔坐标系 ξ 的关系为

$$\begin{aligned} \xi^0 &= R \operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(-)} \operatorname{ch} \rho, \\ \vec{\xi} &= \operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(-)} \vec{X}, \end{aligned}$$

$$\xi^3 = R \operatorname{ch} \frac{1}{R} t^{(-)},$$

其中 $X^1 = R \operatorname{sh} \rho \sin \theta \cos \phi$, $X^2 = R \operatorname{sh} \rho \sin \theta \sin \phi$, $X^3 = R \operatorname{sh} \rho \cos \theta$.
于是流形⁽⁻⁺⁺⁺⁾ $S_4(R)$ 的线元是

$$ds^2 = -(dt^{(-)})^2 + \left(\operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(-)}\right)^2 d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = (d\vec{X} \cdot d\vec{X}) + \frac{(\vec{X} \cdot d\vec{X})^2}{-R^2 - (\vec{X} \cdot \vec{X})} = d\rho^2 + (\operatorname{sh} \rho)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2].$$

3) Lanczöš 坐标系 $(t^{(+)}, X^1, X^2, X^3)$.

Lanczöš 坐标系是一种球极坐标系,它与五维笛卡尔坐标系的关系如下:

$$\xi^0 = R \left(\operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(+)}\right), \quad \vec{\xi} = \left(\operatorname{sh} \frac{1}{R} t^{(+)}\right) \vec{X}, \quad \xi^3 = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{R} t^{(+)}\right) X^3,$$

其中

$$X^1 = R \sin \rho \sin \theta \cos \phi, \quad X^2 = R \sin \rho \sin \theta \sin \phi, \quad X^3 = R \sin \rho \cos \theta, \quad X^4 = R \cos \rho.$$

在 Lanczöš 坐标系中,流形⁽⁻⁺⁺⁺⁾ $S_4(R)$ 的线元为

$$ds^2 = -(dt^{(+)})^2 + \left(\operatorname{ch} \frac{1}{R} t^{(+)}\right)^2 d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = (d\vec{X} \cdot d\vec{X}) + \frac{(\vec{X} \cdot d\vec{X})^2}{R^2 - (\vec{X} \cdot \vec{X})} = d\rho^2 + (\sin \rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

4. 负曲率的 De Sitter 空-时流形⁽⁻⁺⁺⁺⁾ $S_4(iR)$ 上的坐标系

一种与 Lanczöš 坐标系类似的球极坐标系 $(t, \vec{X})$,它与五维笛卡尔坐标系 ξ 的关系为

$$\xi^0 = \left(\sin \frac{1}{R} t\right) R,$$

$$\vec{\xi} = \left(\cos \frac{1}{R} t\right) \vec{X},$$

$$\xi^3 = \left(\cos \frac{1}{R} t\right) X^3 = \left(\cos \frac{1}{R} t\right) [R^2 + (\vec{X} \cdot \vec{X})]^{1/2},$$

其中

$$X^1 = R \operatorname{sh} \rho \sin \theta \cos \phi,$$

$$X^2 = R \operatorname{sh} \rho \sin \theta \sin \phi,$$

$$X^3 = R \operatorname{sh} \rho \cos \theta,$$

$$X^4 = R \operatorname{ch} \rho.$$

在这坐标系中,流形⁽⁻⁺⁺⁺⁾ $S_4(iR)$ 的线元为

$$ds^2 = -(dt)^2 + \left(\cos \frac{1}{R} t\right)^2 d\sigma^2,$$

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

附 录 二

典型空-时和共形空-时的运动学变换式

1. 典型空-时的运动学变换式

De Sitter 空-时流形上的 Beltrami 坐标系 $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, 亦称为典型空-时坐标系或简称为典型空-时^[1,10]. 典型空-时的运动学变换式是把 Beltrami 坐标 x 代入第四节的(1)式而得为

$$x \rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}_{(0)(0)}(x, x)}{1 + \sigma \frac{1}{R^2} (x/x)_{(0)}} (x - x)_{(0)} D_0 L_0.$$

2. 共形空-时的运动学变换式

De Sitter 空-时流形上的共形坐标系 $u \equiv (u^0, u^1, u^2, u^3)$, 可称为共形空-时. 运动学变换式是把共形坐标 u 代入第四节之(1)式而得, 它为

$$u \rightarrow \bar{u} = \left(u - \frac{1 - \frac{1}{4} \varepsilon \frac{1}{R^2} (u \cdot u)}{1 - \frac{1}{4} \varepsilon \frac{1}{R^2} \frac{(u \cdot u)}{(0)}} u \right) D_0 L_0,$$

当 R 充分大时, 注意到 $D_0 \sim I$ 等近似式, 不难得

$$u \rightarrow u - \frac{(u \cdot u)}{(0)} + O(R^{-2}).$$

即 Gürsey^[11] 推出之平移公式, 他由于不知道上述共形空-时的运动学变换的具体解析表达式, 用了颇复杂的 r 矩阵等技巧来推导上述平移公式。

对郭汉英同志的有益讨论表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 陆启铿、邹振隆、郭汉英, 物理学报, **23**(1974), 225.
- [2] 郭汉英, 科学通报, 1977 年, 22 卷, 11 期, 487.
- [3] H. Baerly, J.-M. Levy-Leblond, *Journal of Mathematical Physics*, **9**(1968), 1605.
- [4] F. J. Dyson, *Bulletin of the American Math. Soc.*, **78**(1972), 635.
- [5] В. Ф. Каган, основания геометрия, Том II, (1956); Beltrami, 1865 年论文, 转引自 Каган 的书.
- [6] Б. А. Розонфельд, Неевклидовы геометрии, (1955).
- [7] S. A. Fulling, Scalar Quantum Field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature, Dissertation, Princeton University, (1972).
- [8] R. Gillmore, Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications, (1974), Ch. X.
- [9] J. L. Synge, *Relativity, The Special Theory*, (1965) ChIV, §13.
- [10] 华罗庚、陆启铿, *Scientia Sinica*, **8**, (1959), 1031.
- [11] F. Gürsey, *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, (1964). *Relativity, Groups and Topology*, (1964), Edited by Dewitt.

POSSIBLE SPACE-TIME MANIFOLDS AND KINEMATICS

ZHANG LI-NING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ZHOU ZHEN-LONG

(Beijing Observatory, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this work, analysis of the space-time manifold, their kinematic groups and Lie algebras are made intuitive as far as possible. First of all, from the analysis of the inertial frames it is shown that according to the Beltrami theorem in Riemann Geometry, the space-time manifold, in which there exists global inertial frame, should be a pseudo-sphere. So that the kinematic group must be a rotation group, thus the explicit analytical expressions of such kinematical transformations and the commutative relations among the corresponding generators can be formulated easily. Consequently, the contractions of such manifolds, kinematic groups and Lie algebras can be deduced concretely and intuitively.