

研究简报

光学系统中振幅和相位的恢复问题

杨国桢 顾本源

(中国科学院物理研究所)

1980年7月11日收到

提 要

在本文中,我们提出了光学系统中振幅和相位恢复问题的普遍描述方法,并经过严格的数学推导,得到了用以决定振幅和相位的方程组。用这组方程和迭代计算方法,能够求解各种类型的振幅和相位的恢复问题。

一、引 言

在物理学的许多领域中,都存在着一个经典问题,即如何由测得的强度分布或微分截面来重新恢复复振幅,这就是熟知的所谓相位恢复问题。例如,在X射线结构分析中,只能够测定结构因子的绝对值大小,相位信息明显地丢失了;在散射问题中,由散射分布(微分截面)只给出散射振幅的绝对值平方,但是其相位信息是确定相互作用所必不可少的资料;在利用光学显微镜或电子显微镜来确定物体的结构时,同样地也会出现类似的问题:直接可观测的物理量是显微镜中像平面或某些其它平面上的强度分布,它们只给出这些平面上光或电子波函数的绝对值平方。然而在许多问题中,需要知道波函数的相位。由此可见,相位恢复问题是很有意义的和十分重要的问题。

在光学设计中经常遇到另一类问题:如果已经知道输入平面的相位分布和输出平面的振幅分布,如何恢复输入平面的振幅和输出平面的相位,或者已经知道输入平面的振幅和输出平面的相位,如何恢复输入平面的相位和输出平面的振幅。这类问题称作混合型振幅和相位恢复问题,简称混合型问题。例如:彭桓武等已经提出一种调相聚焦激光加速器的设计方案^[5]。该方案中的关键问题之一是如何设计无损耗的纯相位调制板,以保证粒子不断获得加速。纯相位调制板的设计问题实质上就是混合型问题。

当然,还可能存在一类问题,即已知输入和输出平面的相位,如何恢复它们的振幅。

本文将普遍地讨论光学系统中振幅和相位恢复问题。从算符-矩阵理论出发讨论一般的成象过程,用严格的数学方法推导出一组用以决定振幅和相位的方程。通过这组方程和迭代计算方法,能够求解各种振幅和相位恢复问题,诸如纯相位型、纯振幅型和混合型恢复问题^[1,2,4]。我们还指出, Gerchberg 等和 Misell^[3] 算法公式是本文给出的方程的两种特例。

二、成象过程的形式理论

一般成象过程的示意图如图 1 所示。图 1 中 P_1 是输入平面, 其光场分布

$$U_1(x_1) = \rho_1(x_1) \cdot e^{i\phi_1(x_1)};$$

P_2 是输出平面, 其光场分布

$$U_2(x_2) = \rho_2(x_2) \cdot e^{i\phi_2(x_2)}.$$

为了简单和明确起见, 本文只限于讨论一维情况, 所有结果不难直接推广到二维情况。

光学系统的作用是把 $U_1(x_1)$ 转换成 $U_2(x_2)$, 这种变换可以用线性算符 $\hat{G}$ 描述, 不同的 $\hat{G}$ 表示不同的光学系统或同一系统不同的过程。于是有

$$U_2(x_2) = \hat{G}U_1(x_1) \quad (1a)$$

和

$$U_1(x_1) = \hat{G}^{-1}U_2(x_2). \quad (1b)$$

对于无损耗的光学系统, $\hat{G}$ 为么正算符, 以下我们将限于讨论这种情况。

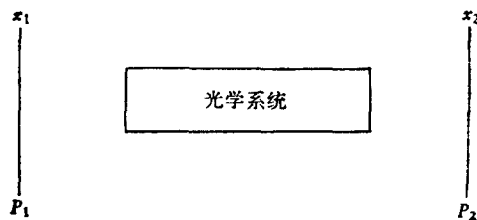


图 1

一般说来, 振幅和相位恢复问题可以分成三类:

1. 纯相位型: 已知 $\rho_1(x_1)$ 和 $\rho_2(x_2)$, 求 $\phi_1(x_1)$ 和 $\phi_2(x_2)$;
2. 混合型: 已知 $\phi_1(x_1)$ 和 $\rho_2(x_2)$, 求 $\rho_1(x_1)$ 和 $\phi_2(x_2)$, 或已知 $\rho_1(x_1)$ 和 $\phi_2(x_2)$, 求 $\phi_1(x_1)$ 和 $\rho_2(x_2)$;
3. 纯振幅型: 已知 $\phi_1(x_1)$ 和 $\phi_2(x_2)$, 求 $\rho_1(x_1)$ 和 $\rho_2(x_2)$ 。

三、基本方程

就实际的物理问题而言, 我们可以假定波函数 $U_1(x_1)$ 和 $U_2(x_2)$ 是带限的。根据取样定理, 能够用有限数目取样点上的数值来描述波函数。如果设取样点的数目为 N , 那末, $U_1(x_1)$ 和 $U_2(x_2)$ 均可表示成 N 的单列矩阵, 么正算符 $\hat{G}$ 可以用 $N \times N$ 的矩阵 G 表示。具体地说 U_1 , U_2 和 G 的矩阵元可表示成

$$U_{1l} = \rho_{1l} e^{i\phi_{1l}},$$

$$U_{2m} = \rho_{2m} e^{i\phi_{2m}}$$

以及

$$U_{2m} = \sum_{l=1}^N G_{ml} U_{1l} \quad l, m = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2)$$

所谓振幅和相位恢复问题就是从 U_{1l} 和 U_{2m} 中的已知的部分信息恢复其未知的部分信息, 条件是 U_1 和 U_2 必须满足 (2) 式。为了描述两个矩阵 U_1 和 GU_2 的逼近程度, 我们引进一个量——“距离” D , 其定义为^[6]

$$D^2 = \|U_1 - GU_2\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |U_{1l} - (GU_2)_l|^2$$

$$= \frac{1}{N} \text{Tr} \{U_1 U_1^\dagger + U_2 U_2^\dagger - 2 \text{Re} (U_2^\dagger G U_1)\}, \quad (3)$$

其中 Tr 表示矩阵的阵迹, Re 表示复数取实部, $U_1^\dagger$ 和 $U_2^\dagger$ 分别表示 U_1 和 U_2 的共轭矩阵. 如果 $D = 0$, 意味着矩阵 U_1 与 $G U_2$ 之间相应的矩阵元全部相等; 如果 $D = d_0 \neq 0$, 那末它们相应的矩阵元之间平均偏差等于 d_0 .

于是, 振幅和相位恢复问题可以归结为求解下列变分方程:

$$\text{对于纯相位型} \quad \delta_{\phi_1, \phi_2} D^2 = 0; \quad (4a)$$

$$\text{对于混合型} \quad \delta_{\rho_1, \phi_2} D^2 = 0 \text{ 或 } \delta_{\phi_1, \rho_2} D^2 = 0; \quad (4b)$$

$$\text{对于纯振幅型} \quad \delta_{\rho_1, \rho_2} D^2 = 0. \quad (4c)$$

上式中 $\delta_{a,b} D^2$ 表示对距离 D^2 取微分. 在离散情况下, 通过分别变动 ρ_1 , ρ_2 , ϕ_1 和 ϕ_2 使得 D^2 取极小值的条件, 我们得到它们必须满足的方程组为

$$\rho_{1k} = \text{Re} \sum_l (e^{i\phi_{1k}} G_{lk} \rho_{2l} e^{-i\phi_{2l}}), \quad (5a)$$

$$\rho_{2k} = \text{Re} \sum_l (e^{-i\phi_{2k}} G_{kl} \rho_{1l} e^{i\phi_{1l}}), \quad (5b)$$

$$e^{i\phi_{1k}} = \sum_l G_{lk}^* \rho_{2l} e^{i\phi_{2l}} / \left| \sum_l G_{lk}^* \rho_{2l} e^{i\phi_{2l}} \right|, \quad (5c)$$

$$e^{i\phi_{2k}} = \sum_l G_{kl} \rho_{1l} e^{i\phi_{1l}} / \left| \sum_l G_{kl} \rho_{1l} e^{i\phi_{1l}} \right|, \quad (5d)$$

式中 $k, l = 1, 2, 3, \dots, N$, N 为取样点数. (5) 式就是振幅和相位恢复问题的基本方程组.

可以用迭代计算方法求解方程(5). 对于纯相位恢复问题, 只需用方程(5c)和(5d). 迭代计算方法的大致步骤为: 已知 ρ_1 和取初值 $\phi_1^{(1)}$, 代入(5d)式求得 $\phi_2^{(1)}$; 然后, 已知 ρ_2 和 $\phi_2^{(1)}$, 代入(5c)式求得 $\phi_1^{(2)}$; 如此反复迭代, 直到 D 值小于给定的误差为止; 从而求得 $\phi_1^{(m)}$ 和 $\phi_2^{(m)}$ (设迭代次数为 m).

四、讨 论

1. 用方程(5a)至(5d)和迭代计算方法, 可以统一地求解三种类型的恢复问题, 即纯相位型恢复问题、混合型恢复问题和纯振幅型恢复问题. 这三种类型的恢复问题在光学设计和光学信息处理中是重要的和经常遇到的.

2. 1972年 Gerchberg 和 Saxton^[1,2,4] 曾提示, 在光学和电子显微镜中, 由测定像平面和衍射平面(或称出射光瞳)上强度分布 $U_i(x_1)$ 和 $P(\xi)$ 来确定其相位的迭代计算方法. 如果令 $U_1 = P(\xi)$, $U_2 = U_i(x_1)$ 和 $\hat{G} = \hat{F}$ (傅里叶变换), 则(5c)和(5d)式正是 Gerchberg-Saxton 算法公式^[7]. 1973年 Misell 依照 Gerchberg-Saxton 算法, 提出由已知两个不同离焦值的离焦像平面上强度分布 $U_i(x_1)$ 和 $U'_i(x_2)$ 去恢复波函数相位的 Misell 算法. 如果令 $U_1 = U_i(x_1)$, $U_2 = U'_i(x_2)$ 和 $\hat{G} = \hat{F} \{ \exp(i\pi \Delta f \xi^2 / \lambda_0) \hat{F}^{-1} \}$, 则(5c)和(5d)式相应于 Misell 算法公式^[7]. 这里 λ_0 表示光波波长, Δf 为离焦量, ξ 为衍射平面的座标. 由此可见, Gerchberg-Saxton 算法公式和 Misell 算法公式是普遍方程(5)的两个特例.

3. 调相聚焦激光加速器的调相板的设计问题^[5], 用本文的符号, 即已知 ρ_1 和 ϕ_2 , 求 ϕ_1 和 ρ_2 , 这是一种混合型问题, 可用 (5b) 和 (5c) 式求解. 对于另一类混合型恢复问题可用 (5a) 和 (5d) 式求解. 同样, 纯振幅型问题可用 (5a) 和 (5b) 式求解.

4. 众所周知, 在用迭代计算方法处理振幅和相位的恢复问题中, 有一个重要问题: 这样的迭代方法求得的解是否是唯一的? 与初值条件是否有关? 在什么条件下能够收敛到真正的解? 许多作者已经详细地讨论过上述问题^[8], 本文中我们就不准备涉及了.

参 考 文 献

- [1] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, *Optik*, **35**(1972), 237.
- [2] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, *J. Phys. D*, **6**(1973), L31.
- [3] D. L. Misell, *J. Phys. D*, **6**(1973), L6; 2200; 2217.
- [4] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, *Image Processing and Computer-aided Design in Electron Optics*, p. 66, edited by B. W. Hawkes (1973).
- [5] 彭桓武、庄杰佳, 中国科学, 1979, 6, 954 页.
- [6] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **24**(1975), 438; **25**(1976), 31.
- [7] 顾本源、杨国桢, 光学学报, 待发表.
- [8] H. A. Ferwerda, *Topics in Current Physics 9, Inverse Source Problems in Optics*, p. 13, edited by H. P. Baltes (1978).

ON THE AMPLITUDE-PHASE RETRIEVAL PROBLEM IN OPTICAL SYSTEMS

YANG GUO-ZHEN GU BEN-YUAN
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper we propose a general description of the amplitude-phase retrieval problem. A set of equations for the determination of amplitude-phase based on rigorous mathematical derivation is established. Using these equations and the iteration computing method, a variety of reconstruction problems can be solved.