

用振幅-相位型全息透镜实现 光学变换的一般理论

杨 国 桢 顾 本 源

(中国科学院物理研究所)

1980年7月11日收到

提 要

本文将文献[1]和[2]中所讨论的纯相位型的全息透镜系统实现光学变换的理论推广到更普遍情形,提出了用振幅-相位型全息透镜组所构成的光学系统实现给定线性变换的一般理论,推导出诸全息透镜的振幅和相位分布所满足的方程组,应用计算机迭代求解法,不难得到它们的解。

一、引 言

在光学信息处理和光学模拟计算机的发展过程中,所遇到的主要困难问题之一是人们用光学方法所能够实现的变换为数不多,几乎只限于傅里叶变换以及与之直接有关的变换。这种局限性在很大程度上限制了光学信息处理能力的发挥和光学模拟计算机潜在运算功能的提高。傅里叶变换只能处理具有空间平移不变性的脉冲响应函数的问题。然而,经常遇到的实际问题往往要求用光学方法实现更为普遍的变换,这种问题已成为近几年来许多科学工作者所致力于解决的中心课题之一。

我们曾经详细地讨论过用纯相位型的全息透镜所构成的光学系统实现给定变换的普遍理论^[1-3],指出对于任意给定的线性么正变换,均能够用足够多的全息透镜构成的光学系统充分精确地实现它^[1]。我们也给出了为实现给定变换,纯相位型的全息透镜所必须满足的方程组及其形式解,并提出了一种应用计算机的迭代方法求解方程组的计算方案,通过简单的例子,证实了这种算法是可行的^[2]。此外,还讨论了加速收敛速度的优化迭代方案^[3]和一般变换理论用于多目标图象识别的问题^[4]。这些工作已被进一步的理论计算和实验工作所证实^[5-7],初步解决了用全息透镜组实现低维的 Walsh 变换问题。

本文我们将提出用振幅-相位型全息透镜组所构成的光学系统实现给定线性变换的一般理论,并推导得到诸全息透镜的振幅-相位分布所必须满足的方程组,应用计算机迭代求解法不难得到它们的具体解。本文将以前讨论过的问题(作为本文的特例)^[1,2]推广到更为普遍的情形。我们采用振幅-相位型的全息透镜代替原先的纯相位型的全息透镜。由于前者较后者具有更多的自由度和能够携带更多的信息,因此有理由期望,采用本文提出的光学系统,只需要更少数目全息透镜,便能够实现给定的(包括么正变换在内的)一般线性变换。本文所提出的理论将为光学信息处理和光学模拟计算机的进一步发展提供

了可能性。

为节省篇幅起见,我们将不加说明地引用文献[1]和[2]中有关的记号和术语。

二、迭代方法

本节讨论如何用振幅-相位型全息透镜组所构成的光学系统实现一个任意给定的线性变换(不限于么正变换)。

实现一个给定的线性变换的典型的光学系统如图1所示。输入平面为 P_1 ,输出平面为 P_2 。设全息透镜的数目为 n ,它们的振幅相位分布记作

$$H_m(x_m) = \rho_m(x_m) \exp[i\phi_m(x_m)],$$

其中 $m = 1, 2, 3, \dots, n$; 它们彼此之间的距离依次地记作

$$l_m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

根据文献[1]和[2],图1所示的光学系统实现的线性变换是

$$\tilde{G} = G_0(l_n) \cdot H_n \cdots H_2 \cdot G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0), \quad (1)$$

其中 $G_0(l)$ 表示光波在自由传播过程中(距离为 l)所实现的变换,它的传递函数由菲涅耳-基尔霍夫公式给出^[1,2]。

我们现在要回答的问题是: 如果要求 $\tilde{G}$ 最佳地逼近给定的一般线性变换 G ,那末,我们将如何设计全息透镜 H_m 呢?

一般地说,我们可以假定所涉及的变换函数是带限的。根据取样定理,能够用有限数目取样点上的数值来描述原始函数。如果设取样点的数目为 N ,那么,上述所有符号 G , $\tilde{G}$, G_0 和 H 均可表示成 $N \times N$ 的矩阵。由于我们只限于考虑平面型的全息透镜,所以 H 的振幅-相位分布应表示成 $N \times N$ 的对角矩阵。

为了描述两个变换 $\tilde{G}$ 与 G 之间接近的程度,我们引进一个量——所谓“距离 D ”,其定义为^[2]

$$D^2 = \|G - \tilde{G}\| = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N |G_{ij} - \tilde{G}_{ij}|^2. \quad (2)$$

如果 $D = 0$,意味着矩阵 G 与 $\tilde{G}$ 之间相应的矩阵元全相等;如果 $D = d_0 \neq 0$,那么它们相对应的矩阵元之间平均偏差等于 $d_0/\sqrt{N}$ 。

我们将采用光学系统中逐步增加全息透镜数目的办法,使 $\tilde{G}$ 逼近给定的线性变换 G 。首先,设光学系统只包含单个全息透镜 $H_1(x_1) = \rho_1(x_1) \exp[i\phi_1(x_1)]$,此时 $\tilde{G} = G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0)$,最佳的逼近条件要求

$$D^2 = \|G - G_0(l_1) \cdot H_1 \cdot G_0(l_0)\|^2 \quad (3)$$

取极小值。由此条件可得到全息透镜的具体解 $H_1^{(1)}$ (其具体形式将在下一节中给出)。有的作者已经指出全息透镜彼此之间的空间距离参数 l_m 在多平面光学系统中起着非本质作用^[7],可以不把它们看作变量(仅需记住 $l_m = 0$ 时, $G_0(0)$ 为单位矩阵)。因此,下面将

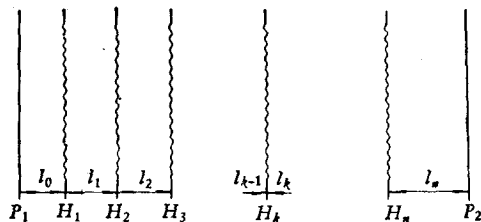


图 1

略去与它们相关的标记。如果采用单个全息透镜实现 G 时, 所得到的 D 还相当大, 不小于给定的误差值, 于是, 我们将引进第二个全息透镜 H_2 , 使得

$$D^2 = \|G - G_0 \cdot H_2 \cdot G_0 \cdot H_1^{(1)} \cdot G_0\| \quad (4)$$

取极小值, 由此求得 $H_2^{(1)}$ 。如果 D 还达不到要求, 则尚需再引进第三个全息透镜。这样逐次地逼近下去, 单线地扩展, 以求得最佳的逼近结果。显然, 这种逼近方式不见得是最好的。为了尽可能不增加全息透镜的数目, 采用反馈式迭代法是更可取的。例如, 在含有两个全息透镜的光学系统中, 应当将 H_1 和 H_2 都看作可变量, 从而求下式所示的距离 D 极小:

$$D^2 = \|G - G_0 \cdot H_2 \cdot G_0 \cdot H_1 \cdot G_0\|^2. \quad (5)$$

首先, 令 H_1 等于由 (3) 式取极小值条件所得到 $H_1^{(1)}$, 求距离 D 的极小值, 从而得到 $H_2^{(1)}$ 。然后, 固定 $H_2 = H_2^{(1)}$, 把 H_1 看作可变量, 同样地求 (5) 式极小值, 得到 $H_1^{(2)}$, 如此反复迭代下去, 直到 D 值不再变动为止, 由此得到 $H_1^{(m)}$ 和 $H_2^{(m)}$ (设迭代次数为 m)。如果 D 还不够小, 则尚须添加第三个、第四个、... 全息透镜, 直到 D 达到给定的误差范围为止。这样一来, 我们便可得到所有全息透镜的振幅-相位分布, 利用这些透镜实现任意给定的一般线性变换。

三、基本方程

现在我们讨论距离 D 取极小值的条件。考虑由 n 个全息透镜构成的光学系统。正如前一节所叙述的, 在运算的每一个步骤中, 实际上只有一个全息透镜是真正的变量。例如, 设在运算的某一个步骤上, 全息透镜 H_k 是“自变量”, 其余的全息透镜 $H_m (m \neq k)$ 皆是已知的。通过讨论变动第 k 个全息透镜 H_k 使得距离 D 取极小值的条件, 我们得到 H_k 必须满足的方程组为

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} B_{ij} H_{ij} = C_{ij} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (6)$$

这里 A_{ij} , B_{ij} 和 C_{ij} 为矩阵 A , B , 和 C 相应的矩阵元。矩阵 A , B 和 C 由下式给出:

$$A = G_0^+ H_{k+1}^+ G_0^+ \cdots G_0^+ H_n^+ G_0^+ G_0 H_n G_0 \cdots G_0 H_{k+1} G_0, \quad (6a)$$

$$B = G_0 H_{k-1} G_0 \cdots G_0 H_1 G_0 G_0^+ H_1^+ G_0^+ \cdots G_0^+ H_{k-1}^+ G_0^+, \quad (6b)$$

$$C = G_0^+ H_{k+1}^+ G_0^+ \cdots G_0^+ H_n^+ G_0^+ G G_0^+ H_1^+ G_0^+ \cdots G_0^+ H_{k-1}^+ G_0^+, \quad (6c)$$

从 A 和 B 的表达式不难看出它们是厄密矩阵。

按照上节中所述的计算步骤, 借助于方程 (6), 便可得到用 n 个全息透镜构成的光学系统实现给定的一般线性变换时, 所有全息透镜的振幅-相位分布的具体形式。

四、讨 论

1. 作为两个特例, 现在我们讨论纯相位型的全息透镜系统和纯振幅型的全息透镜系统实现给定的线性变换的理论公式。

对于纯相位型的全息透镜系统, 有

$$\rho_{il} = 1, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N; A = B = I, \quad I \text{ 为单位矩阵.} \quad (7)$$

全息透镜相位满足的方程为

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \{ A_{ji} B_{ij} e^{i(\phi_{ji} - \phi_{ii})} \} = \operatorname{Im} \{ C_{jj} e^{i\phi_{jj}} \} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

从(7)和(8)式不难得到

$$H_{kk} = C_{kk} / |C_{kk}|. \quad (9)$$

(9)式与文献[2]中的结果完全相同.

对于由纯振幅型的全息透镜构成的光学系统, 我们有 $e^{-i\phi_{ll}} = 1, l = 1, 2, 3, \dots, N$. 代入(6)式, 则求得

$$\sum_{l=1}^N \rho_{ll} \cdot \operatorname{Re}(A_{kl} B_{lk}) = \operatorname{Re}(C_{kk}) \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (10)$$

(10)式就是纯振幅型全息透镜必须满足的方程组.

2. 对于由一个或两个全息透镜组成的光学系统, (6)式退化到很简单的情形, 无须求解线性方程组(6)就可以得到 H 的明显的表达式.

3. 对于同时变动多个全息透镜的情形, 可以得到与(6)式类似的全息透镜的振幅-相位分布必须满足的方程组, 作为设计全息透镜系统以实现任意给定线性变换的依据.

4. 解是存在的, 迭代过程是收敛的.

参 考 文 献

- [1] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **24** (1975), 438.
- [2] 霍裕平、杨国桢、顾本源, 物理学报, **25** (1976), 31.
- [3] 霍裕平, 物理学报, **27** (1978), 487.
- [4] 霍裕平, 物理学报, **29** (1980) 153.
- [5] 杨国桢、潘少华, 物理学报, **29** (1980), 1301.
- [6] 陈岩松、王玉堂、李秀英, 物理学报, **29** (1980), 1307.
- [7] 詹达三, 物理学报, **28** (1979), 358.

GENERAL THEORY ON PERFORMING OPTICAL TRANSFORMATION USING AMPLITUDE-PHASE MASKS

YANG GUO-ZHEN GU BEN-YUAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper the previous theory on performing a given linear transform using the pure phase mask system^[1,2] has been generalized to the more general case in which an optical system is composed of amplitude-phase masks. A set of equations which is necessarily satisfied by the amplitude and phase distributions of the masks is given. It is easy to solve them by means of the iteration computing method.