

关于引力场的能量问题

郑 玉 昆

(北京工业大学应用数学系)

1980 年 3 月 21 日收到

提 要

本文讨论引力场中局部区域的能量问题。这里提出了一个新的引力场总能量-动量赓张量密度,它所表示的引力场局部空间区域中的能量对纯空间坐标变换是不变量,因而引力场的局部区域能量具有确定的物理意义。关于 Schwarzschild 场的能量和动量,新的赓张量给出的结果要比现有广义相对论文献中的其他形式的赓张量所给出的结果较为合理。文中还讨论了在引力理论中质量与能量的关系问题。

设 θ_a^0 表示引力场的总能量-动量赓张量密度, Ω 表示引力场中任意一个局部区域,则在某一坐标系

$$(x_\alpha) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad x_0 = ct \quad (1)$$

中,包含在 Ω 中引力场的总能量 E_Ω 将由表示引力场总能量密度分量 θ_0^0 的下列三维积分给出:

$$E_\Omega = \int_\Omega \theta_0^0 d^3x. \quad (2)$$

现在如果另取一个坐标系 (x'_μ) , $\mu = 0, 1, 2, 3$, 它与坐标系 (1) 式具有如下纯空间坐标变换关系:

$$x'_0 = x_0, \quad x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3) \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

(例如从直角坐标变换到球坐标而时间不变) 则在新坐标系中,包含在同一区域 Ω 中的引力场的总能量 E'_Ω 为

$$E'_\Omega = \int_\Omega \theta_0^0 d^3x'. \quad (4)$$

一个合理的要求是, (2) 式和 (4) 式这两个表示同一个局部区域 Ω 中的能量应该相等,即应该有

$$E'_\Omega = E_\Omega \quad \text{或} \quad \int_\Omega \theta_0^0 d^3x' = \int_\Omega \theta_0^0 d^3x, \quad (5)$$

即对纯空间坐标变换 (3) 式,引力场中任一局部区域中的能量应该是不变量。只有这样,局部区域 Ω 中的能量才算是确定的,否则就是不确定的。由重积分中知道,要 (5) 式中第二式成立其充要条件是当进行 (3) 式的坐标变换时,能量密度 θ_0^0 应具有标量密度的变换性质,即应该有

$$\theta_0^0 = J \theta_0^0 \quad \left(J = \left| \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right| \text{雅可比行列式} \right). \quad (6)$$

Møller 曾经研究过这个问题,他在文献[1]中提出了如下形式的总能量-动量赝张量密度:

$$\mathcal{J}_a^\beta = (T_a^\beta + t_a^\beta) \sqrt{-g} = \frac{1}{K} \{ \sqrt{-g} (g_{\alpha\sigma, \mu} - g_{\alpha\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}. \quad (7)$$

这个赝张量表示能量密度的分量 $\mathcal{J}_a^\beta$ 对坐标变换(3)式具有(6)式的变换性质,但它有个缺点,即它对 Schwarzschild 外域场(以下简称为 S 外域场)给出恒为零的能量密度. 对于这个结果, Møller 认为, S 外域场是个静态场,在物质以外的空间中引力场能量密度应该为零. 但是一般的看法并不是这样. 例如,福克就认为,空时性质的改变说明有引力场及与之相关的能量存在^[2]. (因此,由于 S 外域场的空-时度规偏离了闵可夫斯基度规, S 外域场就应该有能量.) 本文所持的观点是,任何真实的引力场都应该有能量,而且在引力物质以外的点上,物质正是以其引力能的方式来影响该点处空-时的性质(对于 S 外域场,我们在后面将把这个看法用具体的形式表示出来). 因此根据这些看法,我们将着手找出一个新的引力场总能量-动量赝张量密度,使其中表示能量密度的分量对坐标变换(3)式具有如(6)式的变换性质,同时它在 S 外域场中又不恒为零.

按照指标位置的不同,一个具有守恒性质的赝张量密度总是属于下列两种形式之一:

$$\tau^{\alpha\beta} = (T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} \quad (8)$$

或

$$\tau_a^\beta = (T_a^\beta + t_a^\beta) \sqrt{-g}, \quad (9)$$

其中 $T^{\alpha\beta}$ 和 T_a^β 是产生引力场的物质的应力-能量张量,而 $t^{\alpha\beta}$ 和 t_a^β 是待求的由度规张量及其导数构成的量,它们代表纯引力场的能量-动量赝张量. (8) 式和(9)式这两种形式的赝张量密度都有可能是寻求的对象,我们将提出它们所应满足的具体条件,并根据这些条件分别找出它们的具体表达式. 对(8)式中的 $\tau^{\alpha\beta}$,它所应满足的条件为

1) 守恒性

$$\tau_{, \beta}^{\alpha\beta} = [(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}]_{, \beta} = 0. \quad (10)$$

2) $\tau^{\alpha\beta}$ 中表示引力场能量密度的分量 τ^{00} 对坐标变换(3)式应具有标量密度的变换性质,

$$\tau^{00} = J \tau'^{00}. \quad (11)$$

3) 由于(8)式中 $\tau^{\alpha\beta}$ 与 $t^{\alpha\beta}$ 的选择要与引力场方程

$$G^{\alpha\beta} = -K T^{\alpha\beta} \quad \left(K = \frac{8\pi k}{c^4}, k \text{ 是引力常数} \right) \quad (12)$$

相容,即由(8)式与(12)式应该有

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \tau^{\alpha\beta} - t^{\alpha\beta} = -\frac{1}{K} G^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

我们可以要求 $\tau^{\alpha\beta}$ 中所含的度规张量在代数次数上以及导数阶数上要与 $G^{\alpha\beta}$ 中的相应部分一致,即 $\tau^{\alpha\beta}$ 中包含度规张量的导数阶数最高不超过二阶,并且是由度规张量及其导数在代数次数上不超过四次幂的项组成.

4) 对于 S 外域场,由 $\tau^{\alpha\beta}$ 给出的能量密度应该不恒为零.

5) 对于总质量为 M 的物质的整个引力场, 看作为一个封闭的物理系统, $\tau^{\alpha\beta}$ 要能给出其总能量恰好是 Mc^2 , 即应该有

$$\int \tau^{00} d^3x = Mc^2. \quad (14)$$

根据上述条件对 $\tau^{\alpha\beta}$ 的结构形式进行详细分析的结果, 得出 $\tau^{\alpha\beta}$ 由度规张量表示出来的具体形式只能是(参看附录一)

$$\tau^{\alpha\beta} = \{H^{\alpha\beta\lambda}\}_{,\lambda} = \frac{1}{K} \{\sqrt{-g} g^{\alpha 0} (g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma}\}_{,\lambda}. \quad (15)$$

这个 $\tau^{\alpha\beta}$ 的结构形式满足条件 1) 是由于其中的 $H^{\alpha\beta\lambda}$ 的指标 β 和 λ 具有反对称性; 符合条件 2) 和 3) 可以从附录一的分析过程中看出; 后面的具体计算结果将表明它也符合条件 4) 和 5)。

对于 (9) 式中的 τ_a^β , 我们提出类似的条件并作类似的分析, 可得到其形式只能是

$$\tau_a^\beta = \{H_a^{\beta\lambda}\}_{,\lambda} = \frac{1}{K} \{\sqrt{-g} (g_{a\sigma,\mu} - g_{a\mu,\sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma}\}_{,\lambda}. \quad (16)$$

但这就是 Møller 的总能量-动量张量密度表达式 (7), 它对 S 外域场给出恒为零的能量密度, 不符合我们的要求。符合我们要求的张量密度只有 (15) 式。

因此我们所求的新的引力场总能量-动量张量密度的完整表达式现在为

$$\tau^{\alpha\beta} = (T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} = \frac{1}{K} \{\sqrt{-g} g^{\alpha 0} (g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma}\}_{,\lambda}, \quad (17)$$

其中的 $t^{\alpha\beta}$ 具体表达式可由等式 (13) 式分解爱因斯坦张量 $G^{\alpha\beta}$ 的形式并比较等式两端得到(参看附录二 (A.24) 式)。

现在讨论由 (17) 式所给出的 S 外域场的能量的具体结果如何。设 M 为一个孤立静止的星球的质量, r^* 是它的半径, 其 S 外域场的度规在 S 坐标系(直角坐标)中为

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - 2\varphi) dx_0^2 - \left(\delta_{ij} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{\varphi^3}{1 - 2\varphi} x_i x_j \right) dx_i dx_j \\ \left(\varphi &= \frac{\alpha}{r}, \alpha = \frac{kM}{c^2}, k \text{ 是引力常数}, r^* < r < \infty \right), \\ g &= -1, g^{00} = \frac{1}{1 - 2\varphi}, g^{i0} = g_{i0} = 0, \\ g^{ij} &= -\delta_{ij} + \frac{2}{\alpha^2} \varphi^3 x_i x_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (18)$$

当度规张量具有 $g^{i0} = g_{i0} = 0$ 时, (17) 式中的 τ^{00} 可简化为

$$\tau^{00} = \frac{1}{K} \{\sqrt{-g} g^{00} g^{ij}\}_{,ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (19)$$

设以 $\Omega(r, \infty)$ 表示位于 S 外域场中半径为 r 的球面以外的无穷空间区域, 以 $E(r, \infty)$ 表示 $\Omega(r, \infty)$ 中所包含的引力场能量,

$$E(r, \infty) = \int_{\Omega(r, \infty)} \tau^{00} d^3x. \quad (20)$$

由 (18) 式代入 (19) 和 (20) 式, 得到在 S 坐标系中有

$$\tau^{00}(r) = -\frac{Mc^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1-2\varphi)^2} \cdot \frac{\alpha}{r^4} \quad (r^* < r < \infty), \quad (21)$$

$$E(r, \infty) = Mc^2 \left(1 - \frac{1}{1-2\varphi}\right). \quad (22)$$

如果采用下列 Isotropic 坐标系 (I 坐标系中, 用 r_1 表示其中空间点的径向坐标) 度规:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{1-\varphi_1}{1+\varphi_1}\right)^2 dx_0^2 - (1+\varphi_1)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \\ \left(\varphi_1 &= \frac{\alpha}{2r_1}, \alpha = \frac{kM}{c^2}, r_1^* < r_1 < \infty\right) \\ g &= -(1-\varphi_1)^2(1+\varphi_1)^{10}, g^{00} = \left(\frac{1+\varphi_1}{1-\varphi_1}\right)^2, g^{i0} = 0, \\ g^{ij} &= -(1+\varphi_1)^{-4} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (23)$$

那么将 (23) 式代入 (19) 和 (20) 式进行具体计算后, 得到在 I 坐标系中有

$$\tau^{00}(r_1) = -\frac{Mc^2}{2\pi} \cdot \frac{1+\varphi_1}{(1-\varphi_1)^3} \cdot \frac{\alpha}{r_1^4} \quad (r_1^* < r_1 < \infty), \quad (24)$$

$$E(r_1, \infty) = Mc^2 \left\{1 - \left(\frac{1+\varphi_1}{1-\varphi_1}\right)^2\right\}. \quad (25)$$

(21) 和 (24) 式的结果表明, 由 (17) 式给出的 S 外域场的能量密度不是恒为零, 因此 (17) 式符合条件 4)。此外还注意到, (18) 和 (23) 式两种坐标系是具有如 (3) 式那样的纯空间坐标变换关系, 并且有

$$r = r_1(1+\varphi_1)^2, \varphi = \frac{2\varphi_1}{(1+\varphi_1)^2}. \quad (26)$$

如果将 (26) 式代入 (22) 式即得 (25) 式。这表明对于 S 外域场中的同一个局部空间区域 $\mathcal{Q}(r, \infty)$, 在具有纯空间坐标变换关系的两个不同坐标系 (18) 和 (23) 式中, 由 (17) 式给出相同的能量, 即 (17) 式满足 (5) 式。这本是由 (17) 式所具有的变换性质 (11) 式保证了。值得注意的一点是, (22) 和 (25) 式中的能量是由度规张量中的 g^{00} 分量表示出来的, 而对于坐标变换 (3) 式来说, 度规张量中只有 g^{00} 和 g_{00} 两个分量是不变量。另外, 对 S 外域场来说, 要想由其中的度规张量构造出其他形式的对坐标变换 (3) 式具有不变量性质的量似乎是不可能的。因此从这点上看, 我们得到 (17) 式形式的总能量-动量张量密度不会是偶然的。

再就 S 引力场来验证 (17) 式满足条件 5), 为此, 计算 S 星体的内部的能量密度和能量。S 内域场的度规在 S 坐标系中为^[3]

$$\begin{aligned} ds^2 &= (A - Bu)^2 dx_0^2 - \frac{dr^2}{u^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \\ u &= \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}, A = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^*}{R}\right)^2}, B = \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{r^*}{R}\right)^2 &= 2\varphi^* = \frac{2\alpha}{r^*} \quad (0 < r < r^*). \end{aligned} \quad (27)$$

以 $E(0, r)$ 表示位于 S 星体内部半径为 r 的球面以内的区域 $\Omega(0, r)$ 中的能量. 将 (27) 式代入 (19) 式进行具体计算的结果为

$$\tau_{\theta\theta}^{00}(r) = \frac{1}{KR^2} \{r^3(A - Bu)^{-2}\}_{,r} \cdot \sin\theta, \quad (28)$$

$$E(0, r) = \int_{\Omega(0, r)} \tau_{\theta\theta}^{00}(r) dr d\theta d\phi = \frac{4\pi}{K} \frac{r^3}{R^2} (A - Bu)^{-2}, \quad (29)$$

其中 $0 < r < r^*$. 由 (27) 式, 当 $r \rightarrow r^*$ 时有

$$\frac{r^3}{R^2} \rightarrow \frac{r^{*3}}{R^2} = 2\alpha = \frac{2kM}{c^2}, \quad (30)$$

$$(A - Bu)^{-2} = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^*}{R}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right)^{-2} \rightarrow \frac{1}{1 - 2\varphi^*}. \quad (31)$$

在 (22) 和 (29) 式中分别令 $r \rightarrow r^*$, 由 (30) 和 (31) 式可得 S 星体的内部场和外部场的总能量分别为

$$E(0, r^*) = 4\pi \cdot \frac{c^4}{8\pi k} \cdot \frac{2kM}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - 2\varphi^*} = \frac{Mc^2}{1 - 2\varphi^*}, \quad (32)$$

$$E(r^*, \infty) = Mc^2 \left(1 - \frac{1}{1 - 2\varphi^*} \right). \quad (33)$$

由 (32) 和 (33) 式得 S 引力场的总能量为

$$E = E(0, r^*) + E(r^*, \infty) = Mc^2. \quad (34)$$

在 I 坐标系中也可得到 (34) 式的结果, 因此 (17) 式满足条件 5).

下面我们将赓张量 (17) 式以及在其他文献中出现的几个赓张量关于 S 外域场的能量-动量所给出的结果列于表 1 中以资比较. 这些赓张量为

胡宁^[4]的(当 $n = 1$ 时是朗道^[5]-福克^[2]的)赓张量

$$\tau^{(n)\alpha\beta} = (T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta})(-g)^n = \frac{1}{2K} \{(-g)^{n-1}(-gg^{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma} + gg^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma})_{,\sigma}\}_{,;\lambda}; \quad (35)$$

爱因斯坦的赓张量^[3]

$$\tau_a^\beta = (T_a^\beta + t_a^\beta) \sqrt{-g} = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\alpha\mu} (-gg^{\mu\beta}g^{\lambda\sigma} + gg^{\mu\lambda}g^{\beta\sigma})_{,\sigma} \right\}_{,;\lambda}. \quad (36)$$

此外, 还有 Møller 的赓张量 (7) 式. 在进行计算 $E(r, \infty)$ 时, (35) 和 (36) 式只能采用 (18) 和 (23) 式这样的直角坐标度规, 如将 (18) 和 (23) 式换成球坐标来计算 (35) 和 (36) 式, 则将得到发散的结果, 但在对 (7) 和 (17) 式进行计算 $E(r, \infty)$ 时, 可不受这种坐标系上的限制.

从表 1 中的结果可看出, 关于能量方面, 与本文所提出的赓张量 (17) 式的结果不同, 胡宁和爱因斯坦的赓张量关于 S 外域场中的局部区域给出的能量是不确定的, 即对纯空间坐标变换 (26) 式不是不变量. 而 Møller 的赓张量除动量流密度外, 关于 S 外域场的其他量全给出零值. 关于 S 外域场的能量流密度和动量密度, 各种赓张量给出的结果都是零, 这是合理的. 因 S 外域场是个静态场. 在这种情况下, S 外域场的动量流密度也应该全为零, 但表 1 中前三个赓张量给出的动量流密度却都不为零, 这点显然是个矛盾. 因此, 相比之下, 本文提出的赓张量 (17) 式关于 S 外域场的能量-动量所给出的结果要比其它

表 1 各种膨胀量密度关于 s 外域场的能量-动量所给出的结果

膨胀量密度	能 量 密 度		局部区域 $Q(r, \infty)$ 中的能量 $E(r, \infty)$		能量流密度	动量密度	动量流密度
	S 坐标系	I 坐标系	S 坐标系	I 坐标系			I 坐标系
胡 宁	$-\frac{Mc^2}{2\pi} \frac{1}{(1-2\varphi)^2} \frac{\alpha}{r^4}$	正值 $\left(n < \frac{1}{8}\right)^{11)}$	$Mc^2 \left\{1 - \frac{1}{1-2\varphi}\right\}$	$Mc^2 \{1 - (-g)^{n-1} \cdot (1 + \varphi_1)^7\}$	0	0	$\neq 0^{12)}$
爱因斯坦	0	$\frac{1}{8\pi} \frac{kM^2}{r_1^4}$	0	$\frac{kM^2}{2r_1}$	0	0	$\neq 0^{13)}$
Møller	0	0	0	0	0	0	$\neq 0^{14)}$
本文的 (17) 式	$-\frac{Mc^2}{2\pi} \frac{1}{(1-2\varphi)^2} \frac{\alpha}{r^4}$	$-\frac{Mc^2}{2\pi} \frac{1 + \varphi_1}{(1 - \varphi_1)^3} \frac{\alpha}{r_1^4}$	$Mc^2 \left\{1 - \frac{1}{1-2\varphi}\right\}$	$Mc^2 \left\{1 - \left(\frac{1 + \varphi_1}{1 - \varphi_1}\right)^2\right\}$	0	0	0

$$1) \tau^{(n)00} = \frac{Mc^2}{8\pi} \frac{\alpha}{r_1^4} (1 + \varphi_1)^{10n-4} (1 - \varphi_1)^{2n-3} \{(1 - 8\pi) - (5 - 12n)\varphi_1\}^{14)}$$

$$2) \tau^{(n)ij} = \frac{kM^2}{16\pi} \left\{ (-g)^{n-1} \frac{1 - \varphi_1^2}{r_1^4} (\delta_{ij}x_i - \delta_{ij}x_j) \right\}_{,i} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$3) \tau_i^j = \frac{1}{8\pi} \frac{kM^2}{r_1^4} \left(\delta_{ij} - \frac{2}{r_1^2} x_i x_j \right) \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$4) \mathcal{J}_i^j = \frac{1}{4\pi} \frac{Mc^2}{r_1^3} \left\{ (1 - 2\varphi_1)\delta_{ij} + (4\varphi_1 - 3) \frac{x_i x_j}{r_1^2} \right\} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

几个赝张量所给出的结果合理些¹⁾。不过(17)式对S外域场给出的能量恒为负值,关于这点,后面将详细讨论。另外要指出的是,赝张量(17)式由于其中有一个求和指标只取零值,因此它不是个仿射张量,这是它和其它赝张量不同之点。但这个差别并不是本质的,因为我们并没有什么实质性的理由要求一个能量-动量赝张量密度必须是个仿射张量。相反的,如表1中显示的赝张量(17)式关于S外域场的能量-动量给出的结果较其它赝张量合理的原因是与赝张量(17)式的非仿射张量性质密切相关的。

现在把S外域场中的S度规与S外域场中的能量密度联系起来。由(21)式有

$$\tau = \tau^{00} = -\frac{c^4}{2\pi k \alpha^2} \cdot \frac{\varphi^4}{(1-2\varphi)^2}. \quad (37)$$

从(37)式中解出 φ 得

$$\varphi = (h\sqrt{-\tau} - h^2\tau)^{\frac{1}{2}} - h\sqrt{-\tau} = f(\tau), \quad h = \frac{\alpha}{c^2} \sqrt{2\pi k}, \quad (38)$$

再将(18)式中的线元换成球坐标形式表示出来:

$$ds^2 = (1-2\varphi)dx_0^2 - \frac{dr^2}{1-2\varphi} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (39)$$

将(38)式中的 φ 作为 τ 的函数 $f(\tau)$ 代入(39)式得

$$ds^2 = [1-2f(\tau)]dx_0^2 - \frac{dr^2}{1-2f(\tau)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (40)$$

(40)式的形式清楚地显示出S外域场中的能量密度 τ (即 τ^{00})对其中的空-时性质的影响,即表明了物质是以其引力能的方式影响其周围空-时的性质。当 $\tau \rightarrow 0$ 时,由(38)式有 $f(\tau) \rightarrow 0$,这时(40)式就趋向于狭义相对论中(不存在引力场)空-时的线元的球坐标形式

$$ds^2 = dx_0^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (41)$$

因此对于S外域场,如果忽略其中的引力性质,即认为各点的引力场能量密度 τ 近似为零,则其中的空-时几何是欧几里得性质的。

讨论关于负引力能以及引力理论中质量与能量关系问题。

从前面的讨论中曾看到,我们关于赝张量密度对于引力场中任何局部空间区域所给出的能量,对纯空间坐标变换(3)式必须是不变量的要求,导致了S外域场的负引力能(21)和(33)式。关于负引力能,一般对它是有异议的。在此对我们所得到的这种负引力能结果作一些分析。

狭义相对论曾断言,静止质量为 M 的物体含有静止能量为

$$E = Mc^2. \quad (42)$$

1) 关于引力场的总动量

一般认为,如对(23)式中的坐标在 r_1 充分大处作洛伦兹变换时,由一个赝张量密度在这两个坐标系中给出的引力场的四维总动量应该具有狭义相对论中静止质点的四维动量的洛伦兹变换关系^[6]。我们指出,赝张量密度(17)式不具有这个性质。但是我们认为,这个要求未必是合理的。因为大家知道,洛伦兹变换的物理内容只是在平直空-时的两个惯性系之间才有明确的意义,而在存在引力场的弯曲空-时中,虽然我们在形式上也可以作洛伦兹变换,但这时的洛伦兹变换在物理意义上已与狭义相对论中的有所不同。因此对于广义相对论中的物理量,例如引力场中的总能量-动量,当对它们进行洛伦兹变换时,不管其变换结果形式上如何,我们都不能简单地用狭义相对论中的观点来解释它。因此如果一个赝张量密度所给出的S引力场的四维总动量不具有前述洛伦兹变换性质,这一点并不足以说明这个赝张量密度是完全不合理的。

在广义相对论中, 设以 $E_{\text{内}}$ 和 $E_{\text{外}}$ 分别表示 S 内域场和 S 外域场的总能量, 那么, 通过与本文前面关于赝张量密度 (17) 式类似的详细计算, 可得到所有的其它类型的总能量-动量赝张量密度都将给出与 (34) 式一致的结果,

$$E_{\text{内}} + E_{\text{外}} = Mc^2. \quad (43)$$

比较 (42) 和 (43) 式, 从总能量方面来看, 广义相对论和狭义相对论的结果是一致的, 只是在广义相对论中由于考虑到物质的引力性质, 对物体所含有的总能量给出了在其体内和体外的具体分布情况. 但对于不同的赝张量密度可能给出不同的分布结果. 按照体外引力能的正负性来区分, 考虑到 (43) 式, 各种赝张量密度给出 S 场的能量分布可能有下列三种不同情况:

$$(a) E_{\text{内}} = Mc^2, E_{\text{外}} = 0; \quad (44)$$

$$(b) E_{\text{内}} < Mc^2, E_{\text{外}} > 0; \quad (45)$$

$$(c) E_{\text{内}} > Mc^2, E_{\text{外}} < 0. \quad (46)$$

现在的问题是, 哪种分布情况是合理的? 如果我们承认 S 外域场应该有能量, 则情况 (a) 是不合理的, 赝张量密度 (7) 式给出了这种情况. 在情况 (b) 和 (c) 中, 对于情况 (b), 我们至今没有见到过有哪个赝张量密度能以确定的形式, 即以对纯空间坐标变换 (3) 式为不变量的形式给出 $E_{\text{内}}$ 和 $E_{\text{外}}$ 的值, 同时给出 $E_{\text{外}} > 0$. 虽然有些赝张量密度, 例如 (35) 和 (36) 式, 在某些特定的坐标系 (如 I 坐标系) 中能给出 $E_{\text{外}} > 0$, 但这只能认为是一种偶然性, 因为在其它的一些与这个特定的坐标系具有纯空间坐标变换关系的坐标系 (如 S 坐标系) 中, 这些赝张量密度就给出 $E_{\text{外}} < 0$ 或 $E_{\text{外}} = 0$ (参看前面关于 S 外域场能量-动量所列的表 1). 对于这种具有偶然性质的、不确定的结果, 不能被认为是合理的. 从我们导出赝张量密度 (17) 式所作的分析看来, 不存在一个赝张量密度能以确定的形式给出情况 (b). 相反的, 这个分析的结果表明, 只有情况 (c) 能由唯一的赝张量密度 (17) 式以 $E_{\text{内}}$ 和 $E_{\text{外}}$ 对纯空间坐标变换 (3) 式均为不变量的形式加以实现, 这就是 (32) 和 (33) 式的结果. 因此, 如果我们承认导出赝张量密度 (17) 式时对它所加的那些条件是合理的, 那么由 (17) 式所得出的结果 (32) 和 (33) 式作为 S 场能量的分布情况也就是合理的, 应该认为它是反映了 S 场的一种客观物理实际.

根据以上的分析, 现在就只能认为, S 外域场的负引力能是不可避免的 (由 (40) 式可知, 正是这个负引力能密度影响着 S 外域场中空-时的性质). 同时还可以认为, 关于 S 星体的质量与能量的关系应该有一个广义相对论的表述形式: 一定的 Schwarzschild 型质量 M , 不仅在其体内含有正的能量 (32) 式, 而且在其体外的引力空间中必然伴随有一定的负能量 (33) 式, 同时在其整个引力场范围内看作为一个封闭的物理系统具有不变的总能量 Mc^2 .

北京师范大学物理系刘辽副教授以及中国科学院理论物理研究所吴泳时同志对本文提出了修改意见, 谨致谢意.

附 录

一、关于总能量-动量质张量密度(15)式的推导

我们将在具有纯空间坐标变换关系(3)式的两个坐标系中分析(8)式的 $\tau^{\alpha\beta}$ 的结构形式。因为对(3)式说来, J 与 x'_0 无关,据此并由(10)和(11)式有

$$\frac{\partial \tau^{0k}}{\partial x'_k} = -\frac{\partial \tau^{00}}{\partial x'_0} = -J \frac{\partial \tau^{00}}{\partial x^0} = J \frac{\partial \tau^{0i}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(J \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \tau^{0i} \right). \quad (\text{A.1})$$

上式最后一等式利用了坐标变换(3)式的下列性质:

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} \left(J \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \right) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{A.2})$$

将(11)式对 x'_0 求导数再与(A.1)式合在一起,移项后得

$$\frac{\partial}{\partial x'_\rho} \left(\tau^{0\rho} - J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \tau^{0\beta} \right) = 0 \quad (\rho = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{A.3})$$

由守恒条件(10)式知, $\tau^{\alpha\beta}$ 应具有下列形式^[1]:

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} H^{\alpha\beta\lambda}, \quad H^{\alpha\beta\lambda} = -H^{\alpha\lambda\beta}. \quad (\text{A.4})$$

将(A.4)式代入(A.3)式,同时利用(A.2)式及(A.4)式的反对称性质得

$$\frac{\partial^2}{\partial x'_\rho \partial x'_\nu} \left(H^{0\rho\nu} - J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} H^{0\beta\lambda} \right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

我们总可以将 $H^{0\beta\lambda}$ 写成下列形式:

$$H^{0\beta\lambda} = \sqrt{-g} g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} F^0_{\mu\sigma}, \quad (\text{A.6})$$

这样我们就将待求的 $H^{0\beta\lambda}$ 加以简化而转求另一个含有度规张量次数较低的具有反对称性质的量 $F^0_{\mu\sigma}$ 。现在将(A.6)式代入(A.4)式得

$$\tau^{\alpha\beta} = \{H^{0\beta\lambda}\}_{,\lambda} = \{\sqrt{-g} g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} F^0_{\mu\sigma}\}_{,\lambda}. \quad (\text{A.7})$$

根据正文中对 $\tau^{\alpha\beta}$ 要求的条件3)可知(A.7)式中的 $F^0_{\mu\sigma}$ 只能由度规张量的二次幂的项组成。同时由于 $F^0_{\mu\sigma}$ 是含三个指标的量,它不可能单由度规张量本身构成,而必须含有度规张量的导数,再由条件3)即知 $F^0_{\mu\sigma}$ 中只能含度规张量的一阶导数。根据这些分析可知, $F^0_{\mu\sigma}$ 的形式可能为

$$P g^{0\rho} (g_{\rho\sigma,\mu} - g_{\rho\mu,\sigma}) \quad (P \text{ 是某个常数}). \quad (\text{A.8})$$

(A.8)式关于其指标 μ 和 σ 具有反对称性,但如将它代入(A.7)式,所得的 τ^{00} 还不符合正文中(11)式的要求,为了符合这一点,必须将 $F^0_{\mu\sigma}$ 取为下式:

$$F^0_{\mu\sigma} = P g^{00} (g_{0\sigma,\mu} - g_{0\mu,\sigma}). \quad (\text{A.9})$$

这时如进行(3)式的坐标变换, $F^0_{\mu\sigma}$ 像二阶反对称协变张量一样变换,而由(A.6)式知 $H^{0\beta\lambda}$ 像二阶反对称逆变张量密度一样变换,即对坐标变换(3)式有

$$H^{0\rho\nu} = J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} H^{0\beta\lambda}. \quad (\text{A.10})$$

(A.10)式表明,将(A.6)式中的 $F^0_{\mu\sigma}$ 取为(A.9)式,(A.5)式成立,同时由(A.7),(A.10)和(A.2)式及 $H^{0\beta\lambda}$ 的反对称性还有

$$\tau^{0\rho} = \frac{\partial}{\partial x'_\nu} H^{0\rho\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \left\{ J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} H^{0\beta\lambda} \right\} = J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\lambda} H^{0\beta\lambda} = J \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\beta} \tau^{0\beta}. \quad (\text{A.11})$$

即对坐标变换(3)式, $\tau^{0\beta}$ 如四维矢量密度一样变换。在(A.11)式中令 $\rho = 0$ 即得正文中的(11)式,因此将 $F^0_{\mu\sigma}$ 取

成 (A.9) 式能符合我们的要求. 现将 (A.9) 式代入 (A.7) 式得

$$\tau^{\alpha\beta} = P \{ \sqrt{-g} g^{00} (g_{0\sigma, \mu} - g_{0\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}. \quad (\text{A.12})$$

将 (A.12) 式中对应于 $\tau^{\alpha\beta}$ 上的指标 0 改为 α 并取 $P = 1/K$, 即得正文中的 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式 (15) 式, 常数 P 的取法是为了满足 (14) 式.

二、关于赝张量密度 (17) 式中 $\tau^{\alpha\beta}$ 的具体形式

爱因斯坦张量

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta} &= R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right) R^{\lambda}_{\lambda\rho\sigma} \\ &= \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right) \left(\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda, \rho} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho, \lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

可以分解成下列形式的两式之和:

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} \}_{, \lambda} + K \tau^{\alpha\beta}_{(0)}, \quad (\text{A.14})$$

$$h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} = \frac{1}{(-g)} (-g g^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} + g g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma})_{, \sigma}, \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} K \tau^{\alpha\beta}_{(0)} &= \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda}_{, \rho} g^{\beta\rho}_{, \lambda} - g^{\alpha\lambda}_{, \lambda} g^{\beta\rho}_{, \rho}) \\ &\quad + \left(g^{\mu\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right)_{, \lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} \left(g^{\mu\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right)_{, \rho} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma} \\ &\quad + \left(g^{\mu\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right) (\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

将 (A.14) 式代入正文中的 (12) 式并经移项后得

$$T^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}_{(0)} = \frac{1}{2K} \{ h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} \}_{, \lambda}. \quad (\text{A.17})$$

由 (A.17) 式出发可导出各种形式的赝张量密度和 (7), (35), (36) 式等. 现在将 (A.17) 式乘上 $\sqrt{-g}$, 再在两端同时加上 $\frac{1}{2K} (\sqrt{-g})_{, \lambda} h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee}$, 得到

$$\left(T^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}_{(0)} + \frac{1}{2K} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} \right) \sqrt{-g} = \frac{1}{2K} \{ \sqrt{-g} h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} \}_{, \lambda}. \quad (\text{A.18})$$

引进用下列符号表示的各量:

$$U^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} [g^{\alpha\beta} (-g g^{\lambda\sigma})_{, \sigma} - g^{\alpha\lambda} (-g g^{\beta\sigma})_{, \sigma}] \right\}_{, \lambda}, \quad (\text{A.19})$$

$$V^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} = \frac{1}{2K} \{ \sqrt{-g} g^{\mu\rho} (g_{\rho\sigma, \mu} - g_{\rho\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}, \quad (\text{A.20})$$

$$W^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} = \frac{1}{K} \{ \sqrt{-g} g^{\alpha i} (g_{i\sigma, \mu} - g_{i\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}, \quad (\text{A.21})$$

$$S^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} = -U^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} + V^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} - W^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda}. \quad (\text{A.22})$$

在 (A.18) 式两端同时加上 (A.22) 式右端的量, 得到

$$\begin{aligned} &\left(T^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}_{(0)} + \frac{1}{2K} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} + \frac{1}{\sqrt{-g}} S^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda} \right) \sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{K} \{ \sqrt{-g} g^{\alpha\sigma} (g_{0\sigma, \mu} - g_{0\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

现在将正文中的 (17) 式与 (A.23) 式比较, 即得 (17) 式中的 $\tau^{\alpha\beta}$ 的具体形式为

$$\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}_{(0)} + \frac{1}{2K} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} h^{\alpha\beta\lambda}_{\vee} + \frac{1}{\sqrt{-g}} S^{\alpha\beta\lambda}_{, \lambda}. \quad (\text{A.24})$$

参 考 文 献

- [1] C. Møller, *Ann. Phys.*, **4** (1958), 347.

- [2] 福克, 空间、时间和引力的理论, pp. 437; 440, (1965).
- [3] C. Møller, *The Theory of Relativity*, p. 330, (1955).
- [4] 胡宁, 中国科学, 1977, 3.
- [5] 朗道-栗弗席兹, 场论, p. 351.
- [6] C. Møller, *Ann. Phys.*, **12** (1961), 118.

ON THE PROBLEM OF THE ENERGY OF GRAVITATIONAL FIELD

ZHENG YU-KUN

(*Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University*)

ABSTRACT

In this paper, we discuss the problem of the local energy content in gravitational fields. A new total energy-momentum density pseudo-tensor of gravitational field is given in this paper. The energy content in any part of a gravitational field given by the new pseudo-tensor is an invariant under arbitrary purely spatial transformation, hence the local energy content in the gravitational field has a well-defined physical meaning. For the energy and momentum of a Schwarzschild gravitational field, the results given by the new pseudo-tensor are more reasonable than those given by other pseudo-tensors proposed in the literatures of the general theory of relativity.

The relation between mass and energy in the theory of gravitation is also discussed.