

等离子体重整化准线性 理论中的渐近传播函数与色散关系

章 扬 忠

(中国西南物理研究所)

1980年4月14日收到

提 要

本文引入了 Кримонтович-Власов 系统中六维相空间的表象理论. 利用这一理论分析了 Misguich-Balescu 所给出的单粒子渐近传播算子和 Dupree 的平均格林函数之间的关系, 发现在平稳 Марков 过程中两者是一致的. 从而解决了 M-B 所给出非线性色散关系中共振函数的发散困难. 指出产生发散困难的原因在于 M-B 在子动力学中引入的涨落产生算子的概念对多重时间尺度的摄动理论是不适用的.

一、引 言

由 Dupree 在 1966 年及 Weinstock 在 1969 年所提出的等离子体强湍流理论^[1,2]在 1975 年得到了一个比较重要的发展. 这就是 Misguich 和 Balescu (以下简称 M-B) 根据子动力学的渐近传播算子理论所给出的一套弱耦合重整化准线性 (RQL) 的近似计算程序^[3-5]. 这套方法具有以下突出的优点. 首先, 它可以把 Марков 过程推广到仅考虑非受扰轨道的非 Марков 过程, 以及非平稳的湍流过程; 而且还给出了一套两粒子格林函数在两粒子准线性近似 (QL2) 下较为可靠的计算方法^[6]. 由于他们直接采用了传播算子的微分形式来代替格林函数的明显表示, 使理论处理得到了较大的简化. 这首先表现在传播算子的表示中包括了 ∂ 和 $\mathcal{L}$ 对 ν 的依赖关系; 同时, 计算多粒子轨道相关时, 由于避免了多粒子平均格林函数的复杂表示, 可使计算本身得到较大的简化. 重要的是, M-B 所给出的这套计算方法较为严谨. 直到目前为止, 是等离子体强湍流的统计理论中最细致最严谨的方法之一.

M-B 的工作中有一个非常重要的结论. 即 M-B 认为他们所给出的平均分布函数的传播量对 Dupree 所给出的平均格林函数有重大的区别, 并因而对 Dupree 阻尼有重大的修正^[3]. 按照他们的看法, 在局限于平稳 Марков 过程时, Dupree 阻尼会变为 Dupree 增长. 即 $-\frac{1}{3} \mathbf{D}r^3: \mathbf{k} \mathbf{k} \rightarrow \frac{2}{3} \mathbf{D}r^3: \mathbf{k} \mathbf{k}$ (文献[3]中 (5.1.5) 式). 这将导致色散关系中的共振函数 $R(\omega, \mathbf{k})$ 在平稳 Марков 过程中成为发散的 (文献[3]中的 (5.3.10) 式) 即

$$R_p(\omega, \mathbf{k})_{M-B} = \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -i\omega\tau + i\tau \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} + \frac{2}{3} \tau^3 \mathbf{D} : \mathbf{k} \mathbf{k} \right\}. \quad (1.1)$$

基于这种明显的矛盾, M-B 进一步认为他们的计算结果中的时序效应不能略去, 也就是说他们的理论将不存在平稳过程的极限^[3]. 最近, Misguich 又提出, 他们给出的共振函数的发散困难是由于重整化弱耦合准线性理论对于大 $|\mathbf{k}|$ 、高频、长时间情况不适用^[7].

然而, M-B 关于他们理论的这两点评价和讨论(即对 Dupree 阻尼的重大修正和出现发散困难的原因)是不正确的. 事实上, 当 M-B 把他们的结果和 Dupree 的结果相比时, 被比较的并不是同一个东西; M-B 文章的本身也没有求出他们所给出的渐近传播算子所对应的格林函数明显表示.

本文的分析将指出, 当利用六维相空间的表象理论把 M-B 所给出的传播量化为明显的格林函数形式时, 在平稳 Марков 过程中它与 Dupree 的结果是一致的. 实际上并不存在对 Dupree 阻尼的重大修正.

既然格林函数是一致的, 那么就不难推断出 M-B 所给出的色散关系中共振函数的发散困难是虚假的. 这种发散困难实际上应属于一种摄动理论的久期困难.

二、Кримонтович-Власов 系统的表象理论

表象理论及其 Dirac 符号系统在量子理论中已得到了充分的发展^[8], 并且在阐明量子理论的结构体系上起了重要的作用. 表象理论的基础在于力学量算子本征函数构成正交完备的函数族. 正因为如此, 任何有关时空的偏微分方程实际上都可以写成态空间(Hilbert 空间)的抽象形式, 并能构造出相应的表象理论. 所不同的仅仅是如何来解释算子所对应量的物理意义.

以 Dirac 符号 $|\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle$ 作为六维相空间表象的正交完备归一的基, 分布函数将记为

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | f(t) \rangle \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t). \quad (2.1)$$

我们称这种表象为 Schrödinger 表象. 对应的 Кримонтович-Власов 方程的抽象形式为

$$\partial_t |f(t)\rangle = L(t) |f(t)\rangle. \quad (2.2)$$

在 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 表象中, (2.2) 式变为

$$\partial_t \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | f(t) \rangle = \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | L(t) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle \cdot \langle \mathbf{r}', \mathbf{v}' | f(t) \rangle. \quad (2.3)$$

这里

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | L(t) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle \\ &= - \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}, \quad \partial \equiv \partial/\partial \mathbf{v}.$$

这时(2.3)式即化为通常的 Власов 方程.

六维空间坐标 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 的共轭动量算子在抽象空间中记为 $\hat{\mathbf{p}}$ 和 $\hat{\mathbf{q}}$. 它们和力学量 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 的对易关系为

$$[\hat{p}_\mu, r_\nu] = \delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{q}_\mu, v_\nu] = \delta_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

在 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 表象中对应的矩阵元为

$$\langle \mathbf{r} | \hat{p}_\mu | \mathbf{r}' \rangle = \nabla_\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \langle \mathbf{v} | \hat{q}_\mu | \mathbf{v}' \rangle = \partial_\mu \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (2.6)$$

$\hat{\mathbf{p}}$ 和 $\hat{\mathbf{q}}$ 的本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ 和 $|\mathbf{q}\rangle$ 也构成正交完备归一的基. 按这里的定义 (2.5) 式, 它们是逆厄密算子. 这可以使得以后的方程中不出现明显的纯虚 i 因子, 同时也表明 $\hat{\mathbf{p}}$ 和 $\hat{\mathbf{q}}$ 所对应物理量的不可观察意义.

这时 (2.4) 式中算子 $L(t)$ 的抽象形式为

$$L(t) = - \left\{ \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{q}} \right\}. \quad (2.7)$$

按照子动力学, 系综平均的态矢量 $|\bar{f}(t)\rangle$ 随时间的变化可以用一个渐近传播算子 $\bar{V}(t, t_0)$ 表示, 即

$$|\bar{f}(t)\rangle = \bar{V}(t, t_0) |\bar{f}(t_0)\rangle. \quad (2.8)$$

在 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 表象中,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{f}(t) \rangle = \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t_0) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle \cdot \langle \mathbf{r}', \mathbf{v}' | \bar{f}(t_0) \rangle. \quad (2.9)$$

于是可以明显地看出, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t_0) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle$ 即为描写 $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ 随时间演化的格林函数.

为了讨论力学量随时间演化的问题, 引入 Heisenberg 表象中力学量 $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ 的本征态 $|\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$. 由于 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 的同时确定性, 可以合理地定义

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(t)). \quad (2.10)$$

把上式两端对时间取导数后再写入表象, 即有

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | L(t) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle \langle \mathbf{r}', \mathbf{v}' | \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | L(t) | \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \partial_t \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t) \rangle. \end{aligned}$$

故得到 $|\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$ 所满足的方程为

$$\partial_t |\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle = L(t) |\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle. \quad (2.11)$$

它说明作为精确的轨道和精确的分布函数 $|\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$ 和 $|\bar{f}(t)\rangle$ 服从相同的方程. 这一点是经典的六维相空间表象理论和量子力学的重要区别, 它仅对于经典的 Кримонтович-Власов 系统才成立.

因为我们仅对 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 的力学量函数 $F[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ 感兴趣, 因此, 可以合理地定义力学量的泛函 $F[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)]$ 为

$$F[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)] = \langle F | \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t) \rangle. \quad (2.12)$$

不难证明, (2.12) 和 (2.10) 式的定义是自洽的.

设精确分布函数的时间演化为

$$|\bar{f}(t)\rangle = U(t, t_0) |\bar{f}(t_0)\rangle, \quad (2.13)$$

则由 (2.11) 和 (2.2) 式对比可知, 有

$$|\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle = U(t, t_0) |\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)\rangle. \quad (2.14)$$

如果 $\langle F | \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0) \rangle$ 是一个具有几率为 1 的初始力学量 $F[\mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0]$, 于是对 (2.14) 式的平均仅出现在传播量 $U(t, t_0)$ 上, 且注意到 F 为实函数,

$$\begin{aligned} \langle F[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)] \rangle &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{U}(t, t_0) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle \\ &\cdot F[\mathbf{r}, \mathbf{v}] = \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} \langle \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 | \bar{U}^+(t, t_0) | \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle F[\mathbf{r}, \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15)式表明,由平均传播量 $\bar{U}$ 的共轭算子决定了力学量平均值的时间演化问题.

以下结果不难推广到多粒子的情况,对于 N 个粒子, $|\mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle \rightarrow |\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; \cdots \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N\rangle$. 后者作为单粒子空间的直积.

需要指出的是本文中所引入的 Heisenberg 表象和一般量子力学中的 Heisenberg 表象有所不同. 首先,力学量的平均值不能表示为态矢量二次型内积的形式,因为态矢量本身已经具有几率解释. 所以通常量子理论中所采用的使力学量平均值相等的等价表示方法在这里已不再适用. 其次,我们并不需要建立一般力学量所满足的方程(即量子理论中的 Heisenberg 方程). 在经典理论中所有的观察量都可以作为粒子轨道 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ 的泛函形式存在. 诸如 $\hat{\mathbf{p}}(t)$, $\hat{\mathbf{q}}(t)$ 所满足的运动方程在这里没有意义. 而 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ 的运动方程并不明显地含有 $\hat{\mathbf{p}}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{q}}(t)$. 因此,这里引入 Heisenberg 表象的目的仅仅是为了描述粒子的力学量随时间变化的运动. 也就是说,我们所关心的仅仅是力学量 $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ 的本征态 $|\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\rangle$. 基于这些理由,我们称这里所引入的 Heisenberg 表象为准 Heisenberg 表象或不完全的 Heisenberg 表象.

三、渐近传播算子 $\bar{V}$ 对应的格林函数

按照 M-B 的文献[3],渐近传播算子 $\bar{V}(t, t - \tau)$ 在弱耦合的 RQL 近似下写为

$$\begin{aligned} \bar{V}(t, t - \tau) &= \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ &\cdot \exp(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \cdot \exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \cdot \exp(\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 的定义见文献[3]中的(4.2.29)–(4.2.32)式.

为了和 Dupree 的理论比较,需要计算描写 $\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ 随时间演化的格林函数的明显表达式,由(2.9)式可看出,即为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0, t - \tau) \equiv \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle. \quad (3.2)$$

由于 Dupree 的处理中,在求解格林函数的方程中略去了 $\mathcal{D}(\mathbf{v})$ 对 $\mathbf{v}$ 的依赖关系;那末我们在处理中也应采用同样的假设以便比较结果. 对于实际问题对应了高相速近似.

按照通常的计算程序,在各个指数因子中插入单位算子,分别求出各个指数因子的矩阵元,然后积分就得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle &= \frac{1}{8\pi^{3/2} \sqrt{\text{Det}|\boldsymbol{\alpha}|}} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \cdot \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)\right] \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp\left\{i\mathbf{k} \cdot \left[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})\right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{1}{4}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)\right] - \mathbf{k} \cdot \left[\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{4}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\gamma})\right] \cdot \mathbf{k}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\text{Det}|\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\xi}|}} \exp\left[-\frac{1}{4}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{-1}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)\right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\cdot \exp \left\{ - \left[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{4} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \cdot (\mathbf{a}^{-1} \boldsymbol{\gamma} + \tilde{\mathbf{a}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}) \right] \cdot \boldsymbol{\xi}^{-1} \cdot \left[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{4} (\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{a}^{-1} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \tilde{\mathbf{a}}^{-1}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \right] \right\}. \quad (3.4)$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}^0 + \mathbf{v}^0 \tau - \boldsymbol{\beta}$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, $\tilde{\mathbf{a}}^{-1}$ 代表 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\mathbf{a}^{-1}$ 的转置矩阵, $\mathbf{a}^{-1}$ 为 $\mathbf{a}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{\xi} = 4\delta - (\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{a}^{-1} \boldsymbol{\gamma})$.

如果进一步引入空间各向同性的假设,把上式写为标量形式后,(3.3)和(3.4)式变为

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle = (4\pi\alpha)^{-3/2} \exp[-(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2/4\alpha] \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} - \left(\tau + \frac{\gamma}{2\alpha} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \right] - \left(\delta - \frac{\gamma^2}{4\alpha} \right) \mathbf{k}^2 \right\} \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} (4\alpha\delta - \gamma^2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2}{4\alpha} \right] \cdot \exp \left\{ \frac{- \left[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} - \left(\tau + \frac{\gamma}{2\alpha} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \right]^2}{4 \left(\delta - \frac{\gamma^2}{4\alpha} \right)} \right\}. \quad (3.6)$$

对于平稳过程, $\alpha = D\tau$, $\beta = -\frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{\partial D}{\partial \mathbf{v}} \right) + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right)$,

$$\gamma = -D\tau^2 + F\tau \quad \delta = \frac{1}{3} D\tau^3 - \frac{1}{2} F\tau^2. \quad (3.7)$$

这里, D 和 F 代表 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 在各向同性对角形式中的标量因子. 把 (3.7) 式代入 (3.5) 和 (3.6) 式后,即得到平稳过程的渐近传播函数

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle = (4\pi D\tau)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2}{4D\tau} \right] \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{F}{D} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \right] - \frac{1}{4D\tau} \left(\frac{1}{3} D^2\tau^4 - F^2\tau^2 \right) \mathbf{k}^2 \right\} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{3} D^2\tau^4 - F^2\tau^2 \right)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2}{4D\tau} \right] \cdot \exp \left\{ \frac{- \left[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{F}{D} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) \right]^2}{\left(\frac{1}{3} D\tau^3 - \frac{F^2}{D} \tau \right)} \right\}. \quad (3.9)$$

在 Марков 近似下, $F \rightarrow 0$, 再使 $\beta \rightarrow 0$ 后,即得到通常采用的单粒子平均格林函数的形式(如文献[9]中的 (6.12) 式).

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle = (4\pi D\tau)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2}{4D\tau} \right] \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) - \frac{1}{2} \tau (\mathbf{v} + \mathbf{v}^0) - \frac{1}{12} D\tau^3 \mathbf{k}^2 \right] \right\}. \quad (3.10)$$

它与直接由 Марков 假设出发所得到的平均格林函数相一致. 利用这个格林函数来计算单粒子轨道及色散关系的共振函数将得到和 Dupree 一致的结果^[4].

从所得到的(3.5)和(3.6)式中可以看出, M-B 在文献[3]中所提出的 γ 对 δ 的非小量修正概念是不适当的. 因为仅仅由 δ 得不到平稳 Марков 过程的 Dupree 阻尼因子, 也就是说, γ 项的效应在 Dupree 的工作中就已经考虑进去了. 事实上, 平稳 Марков 过程中的平均格林函数所满足的方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla - \partial \cdot \mathbf{D} \cdot \partial\right) \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}(t)) \rangle = 0. \quad (3.11)$$

把它写成算子形式后应为

$$\partial_t \bar{U}(t, t_0) = \{-\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{q}}\} \bar{U}(t, t_0). \quad (3.12)$$

在平稳过程中 $\mathbf{D}$ 和时间无关. (3.20)式的解为

$$\bar{U}(t, t_0) = \exp\{[-\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{q}}](t - t_0)\}. \quad (3.13)$$

把(3.13)式按 Zassenhaus 公式展开后^[3], 即得到(3.1)的形式, 对应的

$$\gamma = -\frac{1}{2} \tau^2 \ddot{\mathbf{D}}. \quad (3.14)$$

从另一方面来说, M-B 在文献[3]中给出的渐近传播算子所对应的格林函数(即算子在 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 空间的表示矩阵), 还可以写为 $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ 空间的微分算子对 δ 函数的作用形式, 即

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle &= \exp(-\tau \mathbf{v} \cdot \nabla) \exp(\beta \cdot \nabla) \\ &\cdot \exp(\partial \cdot \gamma \cdot \nabla) \cdot \exp(\nabla \cdot \delta \cdot \nabla) \cdot \exp(\partial \cdot \alpha \cdot \partial) \\ &\cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}^0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

当把(3.1)式代入上式左方, 把指数展开成幂级数后, 可以直接得到(3.15)式的结果. 事实上, M-B 把传播算子作为微分算子也正是在(3.15)式的意义下来使用的. (3.15)形式格林函数的主要优点在于, 当得到该式的表示时, 并不需要假设 γ 和 α 与 $\mathbf{v}$ 无关. 这是以往所引入格林函数明显表示中所不能做到的.

不难证明, 当把(3.15)式作用在任意初始分布函数 $\bar{f}(t - \tau)$ 上所得到的 $\bar{f}(t)$, 与用格林函数的明显形式(3.3)和(3.5)式直接代入后所得的 $\bar{f}(t)$ 是一致的. 也就是说, 我们直接证明了格林函数的两种表示形式(3.3)–(3.6)式与(3.15)式在略去了 $\mathcal{D}(\mathbf{v})$ 和 $\mathcal{F}(\mathbf{v})$ 对 $\mathbf{v}$ 的依赖性后是等价的. 为此, 按照(2.9)式,

$$\bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \int d\mathbf{r}^0 d\mathbf{v}^0 \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t - \tau) | \mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0 \rangle \cdot \bar{f}(\mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0; t - \tau), \quad (3.16)$$

利用傅里叶展开,

$$\bar{f}(\mathbf{r}^0, \mathbf{v}^0; t - \tau) = \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}^0 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}^0] \bar{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t - \tau). \quad (3.17)$$

把(3.15)和(3.17)式代入(3.16)式后, 即得

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) &= \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} \bar{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t - \tau) \exp\{-i\tau \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \\ &+ i\beta \cdot \mathbf{p} - \mathbf{q} \cdot \gamma \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \delta \cdot \mathbf{p} - \mathbf{q} \cdot \alpha \cdot \mathbf{q} + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

这里, 在计算中我们需要略去 γ 和 α 中对 $\mathbf{v}$ 的依赖关系.

另一方面, 当把(3.3)或(3.5)式及(3.17)式代入到(3.16)式后积分也得到(3.18)式的

结果. 这说明通常的格林函数的明显表示和 M-B 给出的格林函数的 δ 函数表示是等价的.

四、非线性色散关系

由于强湍性状态的出现, 一般说来, 并不存在严格的色散关系. 但是作为粗略的描述, 可以假定仅存在一种主要的激发模式. 这时所得到的非线性色散关系将具有近似的意义. 按照子动力学^[10,11]及弱耦合的 RQL 近似, 涨落分布函数随时间的变化可写为

$$|f'(t)\rangle = \int_0^\infty d\tau \bar{V}(t, t-\tau) L'(t-\tau) \bar{V}(t-\tau, t) |\bar{f}(t)\rangle. \quad (4.1)$$

按照 $\bar{V}$ 的意义, 把 (4.1) 式右方中的 $\bar{V}(t-\tau, t) |\bar{f}(t)\rangle$ 写为 $|\bar{f}(t-\tau)\rangle$ (这一步对消除发散困难是有决定意义的), 且注意到 $L'(t-\tau)$ 算子的表示矩阵后, 则有

$$f'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = -\frac{e}{m} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} | \bar{V}(t, t-\tau) | \mathbf{r}', \mathbf{v}' \rangle \mathbf{E}(\mathbf{r}', t-\tau) \cdot \boldsymbol{\theta}' \bar{f}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; t-\tau), \quad (4.2)$$

代入 Poisson 方程后且仅考虑纵波模式, 即得到非线性色散关系为

$$1 - i \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^\infty d\tau d\mathbf{v} d\mathbf{v}' G_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \tau) \exp(i\omega\tau) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}' \bar{f}(\mathbf{v}', t-\tau) = 0, \quad (4.3)$$

其中 $G_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \tau)$ 即为单粒子格林函数的傅里叶表示. 由 (3.5) 式可知

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \tau) = (4\pi\alpha)^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}{4\alpha}\right] \exp\left\{i\mathbf{k} \cdot \left[\boldsymbol{\beta} - \tau\mathbf{v}' - \left(\tau + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\right] - \left(\delta - \frac{\gamma^2}{4\alpha}\right)\mathbf{k}^2\right\}. \quad (4.4)$$

在 (4.3) 式中把格林函数的傅里叶表示 $G_{\mathbf{k}}$ 对 $d\mathbf{v}$ 求积分再使 $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}$, 即得

$$e = 1 - i \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_0^\infty d\tau d\mathbf{v} \exp\{i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\tau + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta} - (\delta + \alpha\tau^2 + \gamma\tau)\mathbf{k}^2\} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \bar{f}(\mathbf{v}, t-\tau) = 0. \quad (4.5)$$

由于 $\bar{f}$ 随时间的变化比湍性扰动随时间变化慢得多, 这时 $\bar{f}(t-\tau)$ 将不应参与对 τ 的傅里叶变换, 即把 $\bar{f}(t)$ 作为绝热不变量来处理. 这时的色散关系为

$$1 - i \frac{\omega_p^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{v}; t)}{\partial \mathbf{v}} R_{\mathbf{v}}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (4.6)$$

式中 $R_{\mathbf{v}}(\omega, \mathbf{k})$ 即为通常所谓的共振函数.

$$R_{\mathbf{v}}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty d\tau \exp\left\{i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\tau + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta} - \left(\frac{1}{3} D\tau^3 + \frac{1}{2} F\tau^2\right)\mathbf{k}^2\right\}. \quad (4.7)$$

对于平稳 Марков 过程, $F \rightarrow 0$, 且使 $\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0$ 后, 即为通常 Dupree 的共振函数^[12]

$$R_{\mathbf{v}}(\omega, \mathbf{k})_{\text{Dupree}} = \int_0^\infty d\tau \exp\left\{i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\tau - \frac{1}{3} D\tau^3 \mathbf{k}^2\right\}. \quad (4.8)$$

由以上的处理方法和 M-B 的处理方法比较之后就不难看出, M-B 在讨论非线性色散关系时, 共振函数存在发散困难的原因就在于出现了多重时间尺度的摄动理论中的久期困难. 按照 M-B 的处理方法, (4.1) 式右方的 $\bar{V}(t-\tau, t)|\bar{f}(t)\rangle$ 并没有合并为 $|\bar{f}(t-\tau)\rangle$. 这时 $\bar{V}(t-\tau, t)$ 在进入了时间的傅里叶变换后将贡献一个 $\exp(\alpha\tau^2 k^2)$ 的因子, 它和 (4.1) 式右方前一个 $\bar{V}(t, t-\tau)$ 中的 $\exp(-\alpha\tau^2 k^2)$ 因子相消而导致了久期困难. 通常, 摄动理论中出现久期困难的原因往往在于单纯的形式处理而忘记了被处理的量的物理意义. 所以为了找出共振函数发散的原因, 我们还必须回到 (4.1) 式的原始形式.

按照 Weinstock 的原始讨论, 涨落分布函数随时间的演化应表示为

$$|f'(t)\rangle = \Lambda(t, t_0)|f'(t_0)\rangle + \int_{t_0}^t dt' \Lambda(t, t') L'(t') |\bar{f}(t')\rangle. \quad (4.9)$$

(见文献[11]的(2.11)式). 按照子动力学的观点, 由于 $|f'(t_0)\rangle$ 对 $|f'(t)\rangle$ 的贡献随 $t-t_0 \rightarrow \infty$ 而衰减, 因而在 $t-t_0 \rightarrow \infty$ 的渐近形式下可以把它略去, 再考虑到 RQL 近似下 $\Lambda(t, t') \rightarrow \bar{V}(t, t')$, 且做了变换之后 $t' \equiv t-\tau$:

$$|f'(t)\rangle = \int_0^{t-t_0 \rightarrow \infty} d\tau \bar{V}(t, t-\tau) L'(t-\tau) |\bar{f}(t-\tau)\rangle. \quad (4.10)$$

和 (4.1) 式比较后可以看出, 对于子动力学给出的 (4.1) 式的原始形式应为 (4.10) 式, 即理论中是 $|\bar{f}(t-\tau)\rangle$ 而不是 $\bar{V}(t-\tau, t)|\bar{f}(t)\rangle$. 这个区别对于 $|f'(t)\rangle$ 和 $|\bar{f}(t)\rangle$ 具有不同的时间尺度时是很重要的.

在研究等离子体湍流的问题时, 特别是涉及到非线性色散关系, 密度涨落等物理问题时需要区分两种不同的时间尺度. 一种是平均分布函数 $|\bar{f}(t)\rangle$ 随时间变化的尺度; 另一种是涨落分布函数及涨落电场随时间变化的尺度. 通常, 在讨论涨落电场随时间变化的问题中, 需要假设平均分布函数是不变的. 这在物理上意味着涨落的动力学仅在平均分布函数近似不变的时间尺度内才有意义. 在数学处理上就反映为在涉及到对 $f'(t)$ 及 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的时间傅里叶变换时与之相联系的 $\bar{f}(t')$ 将不参与傅里叶变换, 只能作为绝热不变量来看待. 按照这种观点, 把 $f'(t)$ 和 $\bar{f}(t)$ 用一个涨落产生算子 $B\mathcal{C}(z)A$ 相联系, 即时间上为定域的 Марков 型仅仅是一种形式上的写法. 这种写法对于 $f'(t)$ 和 $\bar{f}(t)$ 的时间尺度相差较大时是不适用的. 如果出现这种情况, 形式上的时间定域 Марков 型就违反了问题的物理背景, 因而会出现多重时间尺度摄动理论中的久期困难. 换句话说, 这种困难并不是如 Misguich 所认为那样是 RQL 理论的局限性^[7], 而是子动力学形式体系所带来的困难. 也就是说, 涨落产生算子在多重时间尺度的情况下是没有物理意义的.

最后, 利用 (4.7) 式来讨论一下非 Марков 效应的影响, 这因为它直接联系了对重整化介电函数 ϵ 的修正. 由 F 和 D 的定义可知, $F \sim D\tau_c$, 这里 τ_c 是湍性随机场的自相关时间. 因此, 非 Марков 效应相当于对 (4.7) 式中的 Dupree 阻尼因子又增加了一个附加因子 $\exp\left(-\frac{1}{2} D\tau_c \tau^2 k^2\right)$, 它使得 Dupree 阻尼因子又进一步地得到增强. 但是, 对于实际的湍流来说, 由于自相关时间一般都不大于系统扩散的特征时间 τ_D , 故而非 Марков 的修正效应是不大的. 基于同样的理由, 它对系统扩散时间的修正也是一个余项, 在一级近似下可以写为

$$\tau_D \sim \tau_D^0 [1 - (\tau_c/6\tau_D^0)], \quad (4.11)$$

其中 τ_D^0 是仅仅考虑 Марков 过程时系统的扩散时间。由此可知, 仅当系统的自相关时间与系统的扩散特征时间能够相比时, 才会对 Марков 过程有较为重要的影响。

对赵凯华同志和邱孝明同志的有益讨论表示感谢。特别是在分析 M-B 的共振函数出现久期困难的原因上, 赵凯华同志提供了很多有意义的思想。

参 考 文 献

- [1] T. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **9**(1966), 1773.
- [2] J. Weinstock, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 1045.
- [3] J. Misguich, R. Balescu, *J. Plas. Phys.*, **13**(1975), 385.
- [4] J. Misguich, R. Balescu, *J. Plas. Phys.*, **13**(1975), 419.
- [5] J. Misguich, R. Balescu, *J. Plas. Phys.*, **13**(1975), 429.
- [6] J. Misguich, R. Balescu, *J. Plas. Phys.*, **19**(1977), 611.
- [7] J. Misguich, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 1589.
- [8] P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics" 4th ed. Oxford University Press. London (1958).
- [9] W. Horton Jr, Duk-In Choi, *Phys. Rept.*, **49**(1975), 275.
- [10] J. Misguich, R. Balescu, *Physica*, **79C**(1975), 373.
- [11] J. Misguich, R. Balescu, *J. Plas. Phys.*, **19**(1978), 147.

THE ASYMPTOTIC PROPAGATION FUNCTION AND THE DISPERSION RELATION IN RQL THEORY OF PLASMA

ZHANG YANG-ZHUNG

(Southwestern Institute of Physics, China)

ABSTRACT

In this paper, a representation theory in 6-dimensional phase space for Klimontovich-Vlasov system is introduced. By using this theory, the relation between the Misguich-Balescu's one-particle asymptotic propagator and the Dupree's average Green function is analyzed. It is found that they coincide in the stationary Markovian process, by using them the divergence difficulty of resonance function in the MB's non-linear dispersion relation is resolved. It is pointed out that the divergence difficulty arises from the failure of the concept of fluctuation production operator introduced by MB in their sub-dynamics for the multiple-time-scale perturbation theory.