

光学坐标变换系统的理论设计

潘 少 华

(中国科学院物理研究所)

1980年7月21日收到

提 要

本文用对于几何光学系统 Wigner 分布函数的一种图解计算方法,从理论上设计了一种二维坐标变换系统,其精度可优于 Bryngdahl 坐标变换系统。

一、引 言

最近 Bastiaas 把量子统计中的 Wigner 分布函数引进光学^[1]。他所定义的系统双重 Wigner 分布函数,虽然比点扩展函数在变量上增加一倍,即除坐标外还有空间频率,但由于在积分时常出现 δ 函数^[4],反而使运算大为简化。本文以此特点为理论依据,提出几何光学信息处理系统的一种图解计算方法,进而设计了精度为方向余弦一次项的二维坐标变换系统,以克服 Bryngdahl 坐标变换系统^[1]的精度较低,与傅里叶变换系统不相匹配的缺点^[2]。

二、光信号的“偏转”和“移位”

系统的双重 Wigner 分布函数,亦称光线响应函数,与点扩展函数 $h(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_i)$ 的关系如下^[3]:

$$K(\mathbf{r}_o, \mathbf{a}_o, \mathbf{r}_i, \mathbf{a}_i) = \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \iint h\left(\mathbf{r}_o + \frac{\mathbf{r}'_o}{2}, \mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{r}'_i}{2}\right) h^*\left(\mathbf{r}_o - \frac{\mathbf{r}'_o}{2}, \mathbf{r}_i - \frac{\mathbf{r}'_i}{2}\right) \\ \times \exp[-ik(\mathbf{a}_o \cdot \mathbf{r}'_o - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}'_i)] d\mathbf{r}'_o d\mathbf{r}'_i, \quad (1)$$

式中自变量的下标“o”和“i”分别表示“输出”和“输入”, λ 是波长。 $\mathbf{a}$ 的分量 (α_x, α_y) 为方向余弦,与文献[3]的空间(圆)频率矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系为 $\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{a}$, k 是波数。

设平面光学元件的振幅透过率

$$m_R(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot \exp[i\phi(\mathbf{r})], \quad (2)$$

则不难求出几何光学近似下^[4]它的双重 Wigner 分布函数为

$$K_R(\mathbf{r}_o, \mathbf{a}_o, \mathbf{r}_i, \mathbf{a}_i) = a^2(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_i) \delta\left(\mathbf{a}_o - \mathbf{a}_i - \frac{1}{k} \frac{d\phi(\mathbf{r}_i)}{d\mathbf{r}_i}\right). \quad (3)$$

上式右端第三个因子显示对光线的偏转作用,就此而言,平面光学元件可称“偏转器”,其“偏转函数”为

$$R(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{k}\right) \frac{d\phi(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}. \quad (4)$$

此关系可作图 1 证明如下 (以一维和 $\alpha_i = 0$ 的特例作图): 平面光学元件上邻近两点 $A(x)$ 和 $B(x+dx)$, 光波相位分别为 $\phi(x) + C$ 和 $\phi(x+dx) + C$, 从 B 点作垂线交 A 点的出射光线于 A' 点, 则 $\phi(A') = \phi(B) = \phi(x+dx) + C$. 另外, 从相位延迟关系有 $\phi(A') - \phi(A) = 2\pi(\overline{AA'}/\lambda) = k\overline{AA'}$, 故得 $\phi(x+dx) - \phi(x) = k\overline{AA'}$, 由图可见 $\overline{AA'} = dx \cdot \cos \angle BAA' = dx \cdot \alpha_0$, 从以上二式即得 $\alpha_0 = \left(\frac{1}{k}\right) \frac{d\phi(x)}{dx}$, 证毕.

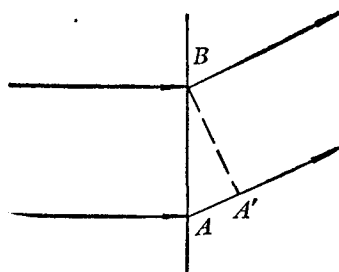


图 1 $\Delta\alpha = \frac{1}{k} \frac{d\phi(x)}{dx}$ 的图解说明

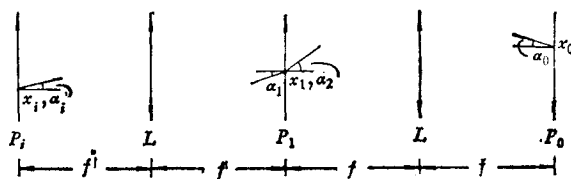


图 2 P_i 和 P_0 分别为输入和输出平面, L 是焦距为 f 的透镜, P_1 是偏转器. P_0 上的坐标和角度要倒方向, 如图所示

焦距等于 f 的透镜所形成的傅里叶变换系统, 其双重 Wigner 分布函数为^[3]

$$K_F(r_o, \alpha_o, r_i, \alpha_i) = \delta(r_o - f\alpha_i) \delta(\alpha_o + r_i/f). \quad (5)$$

表明位置 r_i 被转换成角度 α_o , 同时角度 α_i 被转换成位置 r_o , 由此可以推断: 如图 2 把偏转器 P_1 同正、逆傅里叶变换系统相结合, 会对光信号起“移位”作用. 让 P_1 的振幅透过率为

$$m_s(r) = a_s \left(\frac{r}{f} \right) \exp \left[\left(-\frac{ik}{f} \right) \int S \left(\frac{r}{f} \right) \cdot dr \right]. \quad (6)$$

根据(3)和(5)式, 可写下图 2 中相继三个子系统的双重 Wigner 分布函数:

$$K_F(r_1, \alpha_1, r_i, \alpha_i) = \delta(r_1 - f\alpha_i) \delta \left(\alpha_1 + \frac{r_i}{f} \right),$$

$$K_1(r_2, \alpha_2, r_1, \alpha_1) = a_s' \left(\frac{r_1}{f} \right) \delta(r_2 - r_1) \delta \left[\alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{f} S \left(\frac{r_1}{f} \right) \right],$$

$$K_F(r_o, \alpha_o, r_2, \alpha_2) = \delta(r_o + f\alpha_2) \delta(\alpha_o - r_2/f).$$

串连系统的总双重 Wigner 分布函数为

$$\begin{aligned} K_S(r_o, \alpha_o, r_i, \alpha_i) &= \iiint K_F(r_o, \alpha_o, r_2, \alpha_2) K_1(r_2, \alpha_2, r_1, \alpha_1) K_F(r_1, \alpha_1, r_i, \alpha_i) dr_2 d\alpha_2 dr_1 d\alpha_1 \\ &= a_s'(\alpha_i) \delta(\alpha_o - \alpha_i) \delta[r_o - r_i - S(\alpha_i)]. \end{aligned} \quad (7)$$

这样一种综合系统可称“移位器”, 其“移位函数”为 $S(\alpha)$. 若所需的移位函数为 $z\alpha$, 则图 2 系统可由距离等于 z 的自由空间传播取代, 其双重 Wigner 分布函数为^[3]

$$K_z(r_o, \alpha_o, r_i, \alpha_i) = \delta(\alpha_o - \alpha_i) \delta(r_o - r_i - z\alpha_i). \quad (8)$$

三、几何光学信息处理系统的图解算法

一般的光学信息处理系统可认为是由偏转器和移位器相继连接而构成. 若所研究的

对象是可作几何光学近似的系统^[5], 则可用下述图解计算方法以简化运算, 以傅里叶变换系统和近似实现坐标变换的系统为例说明.

(5)式相当于以下线性关系:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ f\mathbf{a}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ f\mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

系数四个(其中两个等于零), f 为参量. 可试用图 3 系统而解之, P_1 和 P_2 平面应有线性偏转函数. 从图 3 可得以下几式:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + (X_1 + X_2 + Z)\mathbf{a}_1 + (X_2 + Z)\Delta\mathbf{a}_1 + Z\Delta\mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 + \Delta\mathbf{a}_1 + \Delta\mathbf{a}_2,$$

$$\Delta\mathbf{a}_1 = C_1(\mathbf{r}_1 + X_1\mathbf{a}_1),$$

$$\Delta\mathbf{a}_2 = C_2[\mathbf{r}_1 + (X_1 + X_2)\mathbf{a}_1 + X_2\Delta\mathbf{a}_1].$$

运算可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 = & [1 + (X_2 + Z)C_1 + ZC_2(1 + X_2C_1)]\mathbf{r}_1 + [X_1 + X_2 + Z \\ & + (X_2 + Z)C_1X_1 + ZC_2(X_1 + X_2 + X_2C_1X_1)]\mathbf{a}_1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_0 = [C_1 + C_2(1 + X_2C_1)]\mathbf{r}_1 + [1 + C_1X_1 + C_2(X_1 + X_2 + X_2C_1X_1)]\mathbf{a}_1.$$

对比以上二式与(9)式的系数, 求得

$$C_1 = -1/f, \quad C_2 = 0, \quad X_1 = Z = f, \quad X_2 = 0. \quad (10)$$

以上答案显然对应于: 焦距等于 f 的透镜从前焦面到后焦面. 这里只用到简单代数运算, 不象文献[6]等方法那样涉及复杂积分.

坐标变换

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{r}_1). \quad (11)$$

相应的双重 Wigner 分布函数为

$$K_g(\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1) = \delta[\mathbf{r}_1 - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}_0)] \delta\left[\mathbf{a}_0 - \frac{d\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}_0)}{d\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{a}_1\right], \quad (12)$$

式中 $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r})$ 是 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ 的逆函数. 对于胶片记录等平方率检测, 上式右端第二个 δ 函数所反映的相位关系可以不满足, 下面只限于要求(12)式右端第一个 δ 函数(即(11)式)成立.

若只要求近似实现(11)式, 可选图 4 所示的简单系统, P_1 平面的振幅透过率应为

$$m_R(\mathbf{r}) = \exp\left[\frac{ik}{f} \int (\mathbf{g}(\mathbf{r}) - \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}\right]. \quad (13)$$

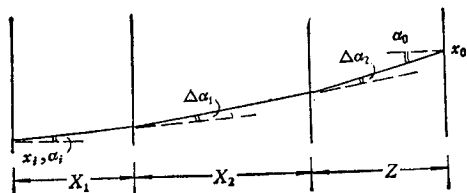


图 3 例题: 试求实现(9)式的系统

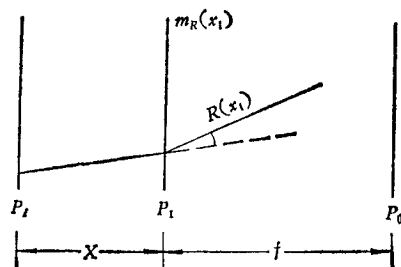


图 4 近似实现光学坐标变换的系统

由图 4 写出几何关系,并用旁轴近似保留至 α_i 一次项,得

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)| = \left| f\mathbf{a}_i + X \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \right) \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) \right|. \quad (14)$$

除线性变换 $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i) = -i\mathbf{r}_i$ 可选 $X = f/i$ 使(14)式右端为零以外,一般 $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i)$ 不能找到固定的 X 值使它为零,但对某些特殊情形有可能采用变 X 的系统使它为零. Bryngdahl 坐标变换系统与本文图 4 系统稍有差异,它实现坐标变换的误差是 $f\mathbf{a}_i$,即相当于图 4 系统当 $X = 0$ 时所具有的精度,因此输入图象的最大空间频率 $\nu_{\max} = \alpha_{i\max}/\lambda$ 必须是相当低的.

四、旁轴近似坐标变换系统

采用图 5 系统可使坐标变换达到旁轴近似所允许的精度. 图 5 中 P_1 是偏转函数为 $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ 的偏转器,从 P_1 至 P_0 是移位函数为 $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ 的移位器,于是应有

$$\mathbf{r}_i + z\mathbf{a}_i + \mathbf{S}[\mathbf{R}(\mathbf{r}_i + z\mathbf{a}_i) + \mathbf{a}_i] = \mathbf{g}(\mathbf{r}_i).$$

精确至 α_i 一次项有以下二式:

$$\mathbf{S}[\mathbf{R}(\mathbf{r}_i)] = \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i, \quad (15)$$

$$\left\{ z \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_i} \right) \mathbf{R}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{a}_i \right\} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}(\mathbf{r}_i)} \mathbf{S}[\mathbf{R}(\mathbf{r}_i)] = -z\mathbf{a}_i. \quad (16)$$

使(16)式左右两端 α_{ix} 和 α_{iy} 的系数分别相等,将这样所得的方程组与(15)式联立,求得 $\mathbf{R}$ 的两个分量如以下二式:

$$R_x(x_i, y_i) = \frac{-x_i}{z} + \frac{1}{z} \left[\int \frac{\frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial y_i}}{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial y_i} - \frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial x_i}} dx_i \right. \\ \left. - \int \frac{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial y_i}}{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial y_i} - \frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial x_i}} dy_i \right], \quad (17)$$

$$R_y(x_i, y_i) = \frac{-y_i}{z} + \frac{1}{z} \left[\int \frac{\frac{-\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial x_i}}{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial y_i} - \frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial x_i}} dx_i \right. \\ \left. + \int \frac{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial x_i}}{\frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial y_i} - \frac{\partial g_x(x_i, y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g_y(x_i, y_i)}{\partial x_i}} dy_i \right]. \quad (18)$$

从上二式获得 R_x 和 R_y 对 x_i, y_i 的函数关系后,求出逆函数

$$x_i = x_i(R_x, R_y), \quad y_i = y_i(R_x, R_y). \quad (19)$$

将此式代入(15)式得以下两个形式关系:

$$S_x(R_x, R_y) = g_x[x_i(R_x, R_y), y_i(R_x, R_y)] - x_i(R_x, R_y), \quad (20)$$

$$S_y(R_x, R_y) = g_y[x_i(R_x, R_y), y_i(R_x, R_y)] - y_i(R_x, R_y). \quad (21)$$

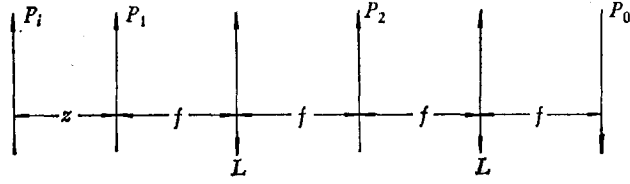


图5 旁轴近似坐标变换系统, P_1 和 P_2 平面光学元件的振幅透过率 $m_1(x, y)$ 和 $m_2(x, y)$ 分别由(22)和(23)式给出

将(17)和(18)式用于(4)式, 求积后代入(2)式并使 $a(\mathbf{r}) = 1$, 得 P_1 平面的振幅透过率 $m_1(x, y)$. 将(20)和(21)式代入(6)式并使 $a_s\left(\frac{\mathbf{r}}{f}\right) = 1$, 得 P_2 平面的振幅透过率 $m_2(x, y)$. 二者分述于下:

$$m_1(x, y) = \exp[i\phi_1(x, y)], \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) = & \frac{k}{z} \left\{ -\frac{(x^2 + y^2)}{2} + \iint \left[\frac{\frac{\partial g_y(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_x(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial x}} dx \right. \right. \\ & - \left. \left[\frac{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_x(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial x}} dy \right] dx \right. \\ & + \left. \left[\frac{-\frac{\partial g_y(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_x(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial x}} dx \right. \right. \\ & + \left. \left[\frac{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial g_x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_x(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_y(x, y)}{\partial x}} dy \right] dy \right\}; \\ m_2(x, y) = & \exp[i\phi_2(x, y)], \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y) = & -\frac{k}{f} \left\{ \left[g_x\left(x_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right), y_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right)\right) - x_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right) \right] dx \right. \\ & + \left. \left[g_y\left(x_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right), y_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right)\right) - y_i\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right) \right] dy \right\}. \end{aligned}$$

上式的 x_i, y_i , 由(19)式将该式 R_x 和 R_y 分别用 x/f 和 y/f 置换而得.

例: 对数变换

$$g_x(x_i, y_i) = -\ln x_i, \quad g_y(x_i, y_i) = -\ln y_i. \quad (24)$$

代入(17)和(18)式得

$$R_x(x_i, y_i) = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(x_i + \frac{x_i^2}{2}\right), \quad R_y(x_i, y_i) = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(y_i + \frac{y_i^2}{2}\right). \quad (25)$$

它们的逆函数为

$$x_i = -1 + \sqrt{1 - 2zR_x}, \quad y_i = -1 + \sqrt{1 - 2zR_y}. \quad (26)$$

将(24)和(26)式关系用于(22)和(23)式得

$$m_1(x, y) = \exp\left\{-\left(\frac{ik}{f}\right)\left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right)\right]\right\}, \quad (27)$$

$$m_2(x, y) = \exp\left\{-\left(\frac{ik}{f}\right)\left[\left[-\ln\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2zx}{f}}\right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{2zx}{f}}\right]dx + \left[-\ln\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2zy}{f}}\right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{2zy}{f}}\right]dy\right]\right\}. \quad (28)$$

五、结 语

本文以 Wigner 分布函数为理论依据, 提出几何光学信息处理系统的图解算法, 进而从理论上设计了实现坐标变换的系统, 这种系统由两个焦距等于 f 的透镜和两个较复杂的平面光学元件组成, 后者可用计算机产生全息图等方法制备, 如同 Bryngdahl 坐标变换系统所用元件那样. 本系统可精确到方向余弦的一次项, 因此其理论精度与旁轴近似的理想薄球透镜傅里叶变换系统的精度一致, 故有可能较好地与后者结合, 以形成较高精度的梅林 (Mellin) 变换和角度坐标傅里叶变换等光学系统, 这对形变不变类型^[7] 空间变光学信息处理, 例如大小和方向可变的特征识别^[8] 和转动模糊图象处理^[9] 等问题的更好解决, 或许将有一定意义.

参 考 文 献

- [1] O. Bryngdahl, *J. Opt. Soc. Amer.*, **64**(1974), 1092.
- [2] 潘少华, *物理*, **9**(1980), 272.
- [3] M. J. Bastiaas, *Optics Comm.*, **25**(1978), 26.
- [4] M. J. Bastiaas, *Optics Comm.*, **30**(1979), 321.
- [5] M. 玻恩和 E. 沃耳夫, *光学原理*, 科学出版社, (1978).
- [6] A. V. Lugt, *Proc. IEEE*, **54**(1966), 1055.
- [7] D. Psaltis and D. Casasent, *Appl. Opt.*, **16**(1977), 2288.
- [8] D. Casasent and D. Psaltis, *Appl. Opt.*, **15**(1976), 1795.
- [9] A. A. Sawchuk, *J. Opt. Soc. Amer.*, **64**(1974), 138.

THEORETICAL DESIGN OF AN OPTICAL COORDINATE TRANSFORM SYSTEM

PAN SHAO-HUA

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Using a diagrammatic computation method of the Wigner distribution function for geometric-optical systems, a 2-dimensional coordinate transform system is designed theoretically. The precision of this system may be better than that of the Bryngdahl coordinate transformer.