

非圆截面等离子体 MHD 不稳定性的研究

王 中 天

(中国西南物理研究所)

1980 年 8 月 28 日收到

提 要

本文采用阶跃电流模型研究了非圆截面环电流器等离子体的 MHD 不稳定性,使札哈洛夫^[1](Zakharov)的工作推广到非圆截面,得到了新的稳定性判据。它指出了椭圆形变,三角形变,电流梯度以及 q 值(所谓的安全因子)对等离子体的 β 值的影响。为了得到最大的 β 值,本文给出了最佳 q 值公式。

对等离子体的不同参数计算了临界 β 值,并与由局部模判据和气球模的数值计算所得到的结果进行了比较。文中指出,电流梯度的存在是对等离子体 β 值影响的重要因素;非圆截面等离子体比圆截面等离子体可能得到更高的 β 值。

引 言

为了建造在经济上有收益的热核反应堆,在磁约束装置中,必须把 β 值(等离子体的平均压强与磁压强的比)提高到 5% 以上。

梅瑟(Mercier)假设扰动局限于一个有理磁面附近得到了著名的梅瑟判据,或者称为局部模判据。一般地说,它对等离子体磁轴附近的 q 值给出了苛刻的限制;对于趋肤电流分布的等离子体可能有不同的结论。作者认为用局部模判据研究趋肤电流位形的不稳定性是不合适的,因为在这种情况下等离子体的扰动主要集中在边界上,应着重研究自由边界等离子体的表面波。梅瑟判据在判别等离子体的磁流体不稳定性方面一直起着重要作用,但是它对等离子体的 β 值的限制却很小。最近札哈洛夫^[2]指出,对于通常的环电流器(Tokamak)中圆截面等离子体,它几乎不能给出任何 β 值的限制。他在阶跃电流模型下推导了一个不稳定性的必要判据,它指出电流梯度的存在对 β 值有一个严格的限制。最近作者^[3]在内扭曲模的研究中指出了这个判据的充分性。

除了气球模是限制目前 Tokamak 的 β 值提高的重要因素,电流梯度引起的不稳定性也是不可忽略的。本文着重研究了非圆截面对后者的影响。结果指出,等离子体适当的椭圆形变和三角形变起着良好的稳定作用,但是如果位形参数选择不好,电流梯度引起的不稳定性比气球模还严重。本文对位形做了优化处理,特别是指出了 q 的最佳值公式。

阶跃电流是电流分布的一个模型,它是对目前大多数 Tokamak 装置中电流分布的一种逼近,其结论可望用以解释一些实验现象,并为装置设计提供参考。

基 本 理 论

为了把札哈洛夫在圆截面情况研究的等离子体 MHD 不稳定性推广到非圆截面, 我们把等离子体的内部扰动位能写成如下形式^[4]:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \{ Q^2 + 2(\mathbf{j} \cdot \nabla \mu + \dot{P}\xi + \Omega\xi)\xi - \Omega\xi^2 + \gamma P(\nabla \cdot \xi)^2 \} d\tau, \quad (1)$$

其中

$$\xi = \frac{\mu \mathbf{j} - \eta \mathbf{B}}{\dot{P}} + \xi \mathbf{e}_\nu,$$

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{\dot{P}} (\mathbf{j} \cdot \nabla \mu - \mathbf{B} \cdot \nabla \eta) + \xi,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \nabla \times \xi \times \mathbf{B} \\ &= \left[\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - (\dot{\chi}\xi)' \right] \mathbf{e}_\theta - \left[\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + (\phi\xi)' \right] \mathbf{e}_\zeta + \mathbf{B} \cdot \nabla \xi \mathbf{e}_\nu, \end{aligned}$$

$$\dot{P} = i\dot{\phi} - j\dot{\chi}, \quad \Omega = i\ddot{\phi} - j\ddot{\chi}.$$

这里 ν, θ, ζ 是自然坐标系的坐标, “ $\cdot$ ”和“ $\prime$ ”都表示对体积的微分, 其它符号有它们通常的意义.

在(1)式中扰动平行于磁场的分量 η 仅在 $\nabla \cdot \xi$ 中出现, 令

$$S = \mathbf{B} \cdot \nabla \eta. \quad (2)$$

(1) 式对 S 极小化, 考虑到约束条件

$$\oint S \frac{dl}{B} = 0, \quad (3)$$

得到极小值条件为

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{\dot{P}} \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \mu + \dot{P}\xi \rangle. \quad (4)$$

这里角括号对于有理磁面表示沿力线的平均; 而对无理磁面则表示对磁面的平均, 这时

$$\nabla \cdot \xi = \langle \dot{\xi} \rangle. \quad (5)$$

除非轴对称模散度项是重要的, 否则只要磁场位形的剪切不严格为零, 散度项对稳定性的贡献总是可以忽略的.

当我们把等离子体作为整体看待时, 因为有理磁面的测度与无理磁面测度之比趋于零, 所以有理磁面本身对(1)式的贡献可以忽略.

现在我们限定仅研究 $n \neq 0, m \neq 0$ 的模式, 这样由(5)式可以看到

$$\nabla \cdot \xi = 0. \quad (6)$$

为了方便, 我们令

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} - (\phi\xi)', \quad u = \int \mathbf{B} \cdot \nabla \xi d\theta,$$

于是(1)式变为^[5]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \{ [\nabla F \times \nabla \nu + \nabla u \times \nabla \zeta]^2 + 2\xi \mathbf{j} \cdot \nabla F - 2j u' \xi - \Omega \xi^2 \} d\tau, \quad (7)$$

只要扰动模数 $m \neq 0, n \neq 0$ 方程(7)总是适用的.

为了简化方程(7)的表达, 假设等离子体的体积足够小, 则有^[3,4]

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \xi_m \rightarrow [m\dot{\chi}(v_0) + n\dot{\phi}(v_0)]\xi_m \rightarrow 0. \quad (8)$$

这里 v_0 是一个特定磁面, 不一定是一个有理磁面; ξ_m 是槽形扰动, 非槽形扰动我们认为是一个小量^[3].

引入 $v^{\frac{1}{2}}$ 为小量, 它的量级用 δ 表示. 把扰动按小量展开,

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_m + \delta\xi_1, \quad F = F_0 + \delta F_1, \\ \xi'_m &\sim \delta^2 \xi_m, \quad \xi'_1 \sim \delta^2 \xi_1. \end{aligned} \quad (9)$$

这里 F_0 没有限定只是槽形扰动, 因此它不像 ξ_m 受到(8)式那样的限制.

对于平衡量可以在 v_0 附近作泰勒级数展开. 类似文献[1], 我们引入阶跃电流分布,

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \mathbf{j}_1 & v < v_0; \\ \mathbf{j}_2 & v > v_0. \end{cases} \quad (10)$$

这里 $j_1 > j_2$, 所以在 $v > v_0$ 处, 剪切出现, 由(8)式可得到 $\xi_m = 0$.

度规张量可由附录一给出,

$$g_{vv} \sim \delta^{-2}; \quad g_{\theta\theta} \sim \delta^2; \quad g_{\theta v} \sim \delta^0. \quad (11)$$

考虑上述量级关系, 则有

$$\nabla F_0 \times \nabla v = \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \mathbf{e}_\zeta \approx -\frac{\partial F_0}{\partial \theta} \mathbf{e}_\zeta, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 2 \int \{\mathbf{j} \cdot \nabla F_0 \xi_m\} d\tau &= 2 \int \left\{ \left[i \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + j \frac{\partial F_m}{\partial \zeta} \right] \xi_m \right\} d\tau \\ &= 2 \int \left\{ \frac{\dot{P}}{\phi} \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \xi_m \right\} d\tau \\ &= 2 \int \left\{ \frac{\dot{P}}{\phi} \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \xi_m \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

在 F_0 中只有 m 谐波与 ξ_m 耦合, F_m 是 F_0 中的槽形扰动分量, 满足

$$\mathbf{B} \cdot \nabla F_m \rightarrow [m\dot{\phi}(v_0) + m\dot{\chi}(v_0)]F_m \rightarrow 0. \quad (14)$$

利用(12)式和(13)式, 则有

$$\begin{aligned} &\int \{[\nabla F \times \nabla v + \nabla u \times \nabla \zeta]^2 + 2 \xi \mathbf{j} \cdot \nabla F\} d\tau \\ &= \int \left\{ \left[\nabla u \times \nabla \zeta - \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\zeta \right]^2 + \frac{2\dot{P}\xi_m}{\phi} \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \right\} d\tau \\ &= \int \left\{ |\nabla u \times \nabla \zeta|^2 - \frac{1}{g_{\zeta\zeta}} (\nabla u \times \nabla \zeta \cdot \mathbf{e}_\zeta)^2 \right. \\ &\quad \left. + g_{\zeta\zeta} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \theta} + \frac{\dot{P}\xi_m}{\phi g_{\zeta\zeta}} - \frac{\nabla u \times \nabla \zeta \cdot \mathbf{e}_\zeta}{g_{\zeta\zeta}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\dot{P}\xi_m}{\phi g_{\zeta\zeta}} (\nabla u \times \nabla \zeta \cdot \mathbf{e}_\zeta) - \frac{\dot{P}^2 \xi_m^2}{\phi g_{\zeta\zeta}} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

设

$$\begin{aligned}
\nabla_{\zeta} u &= \mathbf{e}_{\zeta} \times (\nabla u \times \nabla \zeta) \\
&= \nabla u - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \nabla \zeta \\
&= \frac{\partial u}{\partial \nu} \nabla \nu + \frac{\partial u}{\partial \theta} \nabla \theta.
\end{aligned} \tag{16}$$

可以看出(15)式最后一步式前两项为 $|\nabla_{\zeta} u|^2$, 而第三项在小体积近似下, 只要扰动模数 $m > 2$, 总可以极小化为零。

现在来看(7)式中的后面两项

$$\begin{aligned}
& - \int \{2Ju'\xi - Q\xi^2\} d\tau \\
& = \int \left\{ Ju\xi - J \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} d\theta + \frac{\dot{\chi}}{\phi} \xi \right) - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} P\xi^2 \right\} d\tau,
\end{aligned} \tag{17}$$

对于槽形扰动, (17)式第二项为零; 而

$$\int \{Ju\xi\} d\tau = \int \{Ju\xi_1\} d\tau, \tag{18}$$

其中

$$u = \int \left(\phi \frac{\partial \xi_1}{\partial \zeta} + \dot{\chi} \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \right) d\theta. \tag{19}$$

于是(7)式变为

$$\begin{aligned}
\delta w &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{g_{\zeta\zeta}} |\nabla_{\zeta} u|^2 - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} g_{\theta\zeta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} g_{\nu\zeta} \right) \frac{\dot{P}\xi_m}{\phi g_{\zeta\zeta}} \right. \\
& \quad \left. + Ju\xi_1 - \frac{\dot{P}^2\xi_m^2}{\phi g_{\zeta\zeta}} - \frac{\dot{P}\ddot{\phi}\xi_m^2}{\phi} \right\} d\tau.
\end{aligned} \tag{20}$$

由附录一可以计算

$$\begin{aligned}
g_{\theta\zeta} &= \frac{4\pi}{\tau} \sqrt{\frac{2R}{\varepsilon}} \cos 2\pi\theta \nu^{\frac{1}{2}}, \\
g_{\nu\zeta} &= \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2R}{\varepsilon}} \sin 2\pi\theta \nu^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

这里 τ 是旋转变换, 是安全因子 q 的倒数, ε 是等离子体磁面长半轴与短半轴的比。(20)式中第二项是与等离子体压强梯度相关的去稳定项, 由(21)式可知, 这项中 u 仅仅有两个谐波与 ξ_m 耦合, 就是 $m+1$ 模和 $m-1$ 模, 下面我们主要考虑它们对不稳定性的作用。

在(20)式中把 $\nabla_{\zeta} u$ 分为力线的主法线和副法线两个正交的方向, 这时

$$\begin{aligned}
\delta w &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{g_{\zeta\zeta}} \left[\frac{\varepsilon R}{2} \left(4\pi\nu^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \nu} - \nu^{-\frac{1}{2}} \sin 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{R}{2\varepsilon} \left(4\pi\nu^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \nu^{-\frac{1}{2}} \cos 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(4\pi\nu^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \nu} - \nu^{-\frac{1}{2}} \sin 2\pi\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{2\dot{P}\xi_m}{\phi\tau g_{\zeta\zeta}} \sqrt{\frac{2R}{\varepsilon}} \right. \\
& \quad \left. + Ju\xi_1 - \frac{\dot{P}^2\xi_m^2}{\phi^2 g_{\zeta\zeta}} - \dot{P}\ddot{\phi} \frac{\xi_m^2}{\phi} \right\} d\tau.
\end{aligned} \tag{22}$$

设

$$a = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi^2 R}},$$

(22)式对磁面平均后,得到

$$\begin{aligned} \delta w = \frac{1}{2R} & \left\{ \frac{\varepsilon^2 + 1}{2\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial a} \right)^2 + \frac{(m+1)^2}{a^2} u_{m+1}^2 + \left(\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a} \right)^2 + \frac{(m-1)^2}{a^2} u_{m-1}^2 \right] \right. \\ & + \frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial a} + \frac{m+1}{a} u_{m+1} \right) \left(\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a} - \frac{m-1}{a} u_{m-1} \right) \right] \\ & - \frac{2\dot{P}\xi_m}{\dot{\phi}\tau\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial a} + \frac{m+1}{a} u_{m+1} \right) + \left(\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a} - \frac{m-1}{a} u_{m-1} \right) \right] \\ & \left. + \left[\frac{(m+1)R}{\dot{\chi}a} u_{m+1}^2 - \frac{(m-1)R}{\dot{\chi}a} u_{m-1}^2 \right] \frac{\partial J}{\partial a} - \frac{\dot{P}\xi_m^2}{\dot{\phi}^2} - \frac{\dot{P}\ddot{\phi}g_{\xi\xi}\xi_m^2}{\dot{\phi}} \right\} ada, \quad (23) \end{aligned}$$

式中与 $(\varepsilon^2 - 1)$ 相关的项反映了变形截面等离子体中模与模之间的耦合,对圆截面等离子体这项自然消失。

在等离子体电流密度随着径向坐标增加而下降的情况,电流梯度的出现对 $(m-1)$ 模是起稳定作用的,而对 $(m+1)$ 模是起去稳定作用的。

首先 δw 对 u_{m-1} 极小化,得欧拉方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(a \frac{du_{m-1}}{da} \right) - \frac{(m-1)^2}{a} u_{m-1} + \frac{m(m-1)R}{n\dot{\phi}} (j_1 - j_2) \delta(a - a_0) \\ \times u_{m-1} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = - \frac{d}{da} \left(\frac{aD}{2} \right) - \frac{m-1}{2} D, \quad (24) \end{aligned}$$

在阶跃电流情况

$$\frac{dJ}{da} = -(j_1 - j_2) \delta(a - a_0).$$

这里 a_0 是对应 v_0 的特定磁面。方程(24)式的解已经在文献[1]中给出,

$$u_{m-1} = -a^{m-1} \int_0^a \frac{D}{2} a^{-(m-1)} da + a^{m-1} \int_0^{a_0} \frac{D}{2} a^{-(m-1)} da. \quad (25)$$

在这里的 D 与文献[1]不同,

$$\begin{aligned} D &= D_1 + \sigma D_2 \\ &= - \frac{4\dot{P}\xi_m\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\dot{\phi}\tau(1 + \varepsilon^2)} + \varepsilon \left(\frac{du_{m+1}}{da} + \frac{m+1}{a} u_{m+1} \right), \\ \sigma &= \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1}. \quad (26) \end{aligned}$$

这里 σ 为椭圆率。将 u_{m-1} 代入(23)式,然后对 u_{m+1} 极小化,得到欧拉方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(a \frac{du_{m+1}}{da} \right) - \frac{(m+1)^2}{a} u_{m+1} - \frac{m(m+1)R}{n\dot{\phi}} (j_1 - j_2) \\ \times \delta(a - a_0) \frac{4}{4 - \varepsilon^2} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = - \frac{d}{da} \left(\frac{aD_3}{2} \right) + \frac{m+1}{2} D_3. \quad (27) \end{aligned}$$

这里

$$D_3 = \frac{2D_1}{2 + \sigma}.$$

在椭圆截面情况,旋转变换

$$\tau = \frac{j_1 R}{2\dot{\phi}} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad (28)$$

令

$$\tau_2 = \frac{j_2 R}{2\dot{\phi}} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}. \quad (29)$$

下面说明一下方程(27)式的边界条件,在等离子体中心 $u_{m+1} = 0$,在导体壁或 $(m+1)$ 模的共振面上 $u_{m+1} = 0$. 现在估计一下 $(m+1)$ 模共振面的位置,在共振面处,

$$n\dot{\phi} + (m+1)\dot{\chi} = 0. \quad (30)$$

对于阶跃电流 $\dot{\chi}$ 可以粗略地写为

$$\dot{\chi} = j \cdot R/2, \quad (31)$$

其中

$$\bar{j} = \frac{j_1 v_1 + j_2 (v_2 - v_1)}{v_2}. \quad (32)$$

将(31)式代入(30)式,可解出

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{b^2}{a_0^2} = \frac{\frac{n}{m} + \tau_2}{\frac{n}{m+1} + \tau_2}. \quad (33)$$

这里 b 为 $m+1$ 模共振面的位置.

只要在 a_0 与 b 之间在零级近似下是椭圆磁面(见附录二),那么方程(27)在全空间的解就可以求出

$$u_{m+1} = -\frac{1}{a^{m+1}} \int_0^a \frac{D_3}{2} a^{m+1} da - \lambda \frac{a^{m+1}}{a_0^{2(m+1)}} \int_0^{a_0} \frac{D_3}{2} a^{m+1} da; \quad a < a_0; \quad (34)$$

$$u_{m-1} = -(1 + \lambda) \frac{1}{a_0^{m+1}} \int_0^{a_0} \frac{D_3}{2} a^{m+1} da \frac{\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}} - \frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}}{\frac{b^{m+1}}{a_0^{m+1}} - \frac{a_0^{m+1}}{b^{m+1}}} \quad a > a_0 \quad (35)$$

这里 λ 由在 $a = a_0$ 处的连接条件来确定,这个连接条件可用越过 a_0 对(27)式做短线积分得到. 这时

$$\lambda = \frac{\left[1 - \left(\frac{a_0}{b}\right)^{2(m+1)}\right] \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau}\right) \frac{4}{4 - \varepsilon^2} - \left(\frac{a_0}{b}\right)^{2(m+1)}}{1 - \left[1 - \left(\frac{a_0}{b}\right)^{2(m+1)}\right] \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau}\right) \frac{4}{4 - \varepsilon^2}}. \quad (36)$$

对于圆截面的情况 $\varepsilon \rightarrow 0$, 这里的 λ 与文献[1]相同.

将 u_{m+1} 和 u_{m-1} 代入(23)式,得到

$$\delta w = \frac{1}{2R} \left\{ -\frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \frac{D_3^2}{4} + \frac{D_1^2}{4} \right] - \frac{\dot{P}^2 \xi_m^2}{\dot{\phi}^2} - \frac{\dot{P} \dot{\phi} g_{\xi\xi}}{\dot{\phi}} \xi_m^2 \right\} a da$$

$$-\frac{1}{2R} 2(m+1) \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \frac{\left[\int_0^{a_0} \frac{D_3}{2} a^{m+1} da\right]^2}{a_0^{2(m+1)}}. \quad (37)$$

令 $\xi_m = a^m$, 可以证明^[4]

$$2(m+1) \left[\frac{1}{a_0^{m+1}} \int_0^{a_0} \frac{D_3}{2} a^{m+1} da \right]^2 = \int_0^{a_0} \frac{D_3^2}{4} a da. \quad (38)$$

则有

$$\delta w = \frac{1}{2R} \left\{ \left[-\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \frac{(1+\lambda)D_3^2}{4} + \frac{D_1^2}{4} \right] - \frac{\dot{P}^2 \xi_m^2}{\dot{\phi}^2} - \frac{\dot{P} \ddot{\phi} g_{\xi\xi}}{\dot{\phi}} \xi_m^2 \right] a da \right\}. \quad (39)$$

于是得到稳定性判据

$$4\pi^2 R^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} + \dot{P} \left\{ 1 + \frac{2[4(1+\varepsilon^2) + (3+\varepsilon^2)\lambda]}{r^2(1+\varepsilon^2)(1+3\varepsilon^2)} \right\} > 0. \quad (40)$$

参考文献[5]

$$\frac{\dot{P}}{\dot{\phi}^2} = -\frac{\varepsilon^2 + 1}{R\varepsilon} \tau^2 \beta_p,$$

$$4\pi^2 R \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = \frac{1}{R\varepsilon} [6 - (1 - \beta_p)(\varepsilon^2 + 1)(\tau^2 + 2) + (\varepsilon^2 - 1)d],$$

$$d = [2C + 2(1 - \beta_p)(1 + \varepsilon^2) - 2]/\varepsilon^2,$$

式中 C 是沙拉维也夫^[6]位形中代表三角形变的位形因子。

于是(40)式化为

$$\tau^2 < \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ 1 - 2\beta_p \left[\frac{4\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) + \lambda\varepsilon^2(3+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon^2)(1+3\varepsilon^2)} - 1 \right] + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} (1 + 2C) \right\}. \quad (41)$$

如果 $\varepsilon = 1$, 则由(41)式可以得到札哈洛夫的判据, 所以(41)式是札哈洛夫判据的推广。

如果把等离子体的边界取为如下形式:

$$\varepsilon x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon} + \delta \frac{x}{R} \frac{y^2}{\varepsilon} = \rho_s^2. \quad (42)$$

这里 δ 是边界三角形变相关的因子, ρ_s 是等离子体的横向特征长度, 于是可以计算

$$C = \frac{1}{3\varepsilon^2 + 1} \left[\beta_p (1 + \varepsilon^2) + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{2} \delta \right], \quad (43)$$

$$\tau^2 < \frac{2}{1 + \varepsilon^2} \left\{ 1 - \lambda\beta_p \frac{3 + \varepsilon^2}{3\varepsilon^2 + 1} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right) \right\}. \quad (44)$$

由(44)式可以得到临界 β_p 值

$$\beta_p = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right) - \frac{\tau^2}{1 - \varepsilon}}{\lambda \frac{2 - \varepsilon}{2 + \varepsilon}}. \quad (45)$$

我们知道

$$\beta = \left(\frac{a}{R} \right)^2 \frac{\tau^2}{1 - \varepsilon} \beta_p. \quad (46)$$

把(45)式的 β_p 代入(46)式,发现改变 τ^2 可以得到 β 的最大值,这要求

$$\tau^2 = \frac{1-\epsilon}{2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right] \right\}. \quad (47)$$

这时

$$\beta = \frac{a^2}{R^2} \frac{\left[1 + \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right) \right]^2}{4\lambda \frac{2-\epsilon}{2+\epsilon}}. \quad (48)$$

为了得到最大的 β 值,希望适当地选取 δ 值,但是如果 δ 的绝对值太大,磁面破坏了.对(42)式曲线族的分析,可以得到

$$\delta^2 < \left(\frac{R}{a} \right)^2, \quad a^2 = \frac{\rho_z^2}{\epsilon}. \quad (49)$$

对于目前运行的 Tokamak 装置,它的电流分布大部分在中心表现比较平坦,而在边缘电流密度降得比较快.这里,我们重点研究在边缘电流梯度比较大的情况.令 $j_z = 0$,这时由(36)式得到

$$\lambda = \frac{\left(\frac{m+1}{m} \right)^{m+1} - \left(2 - \frac{\epsilon^2}{4} \right)}{1 - \frac{\epsilon^2}{4} \left(\frac{m+1}{m} \right)^{m+1}}. \quad (50)$$

取 $m = 5$,由(48)式得到

$$\beta = \left(\frac{a}{R} \right)^2 \frac{(4-3\epsilon^2)(2+\epsilon)}{4(4+\epsilon^2)(2-\epsilon)} \left[1 + \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right) \right]^2. \quad (51)$$

从(51)式可以看到 $\epsilon > 0$ 时, $\delta > 0$ 是有利的;而在 $\epsilon < 0$ 时, $\delta < 0$ 是有利的.前者磁面呈 D 形;而后者呈反 D 形.

与局部模和气球模的比较

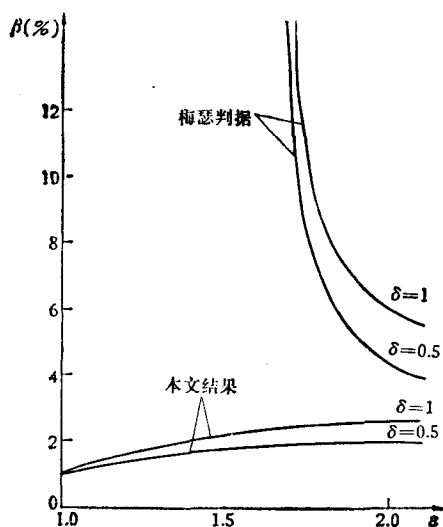
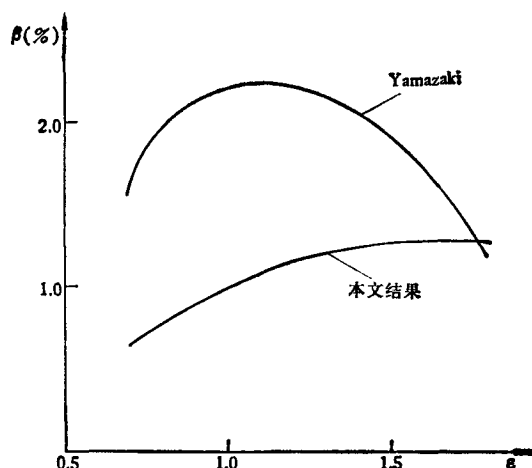
梅瑟判据^[2]在近轴附近给出的临界 β_p 值为

$$\beta_p = \frac{\epsilon(\epsilon+1)(3\epsilon^2+1)}{2(\epsilon^2+1)(\epsilon-1)^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \delta \right) - \frac{\tau^2}{1-\epsilon} \right]. \quad (52)$$

如果 τ^2 取(47)式的形式,对梅瑟判据也可以得到 β 的最大值.

图1表示局部模对 β 值的限制与本文结果的比较,我们取 $R/a = 5$, τ^2 由(47)式确定.看来局部模对 β 值的限制是不重要的,电流梯度引起的不稳定作用严格地限制了 β 值的提高.

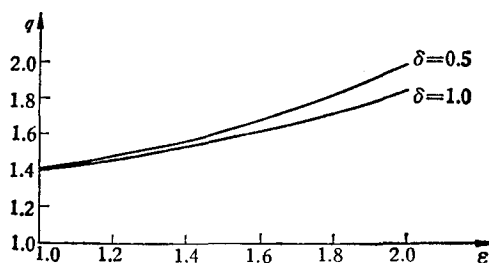
图2表示气球模的计算^[7]和本文结果的比较.我们取等离子体的边界是一纯椭圆,即 $\delta = 0$ 的情况,取 $R/a = 5$.对于中等形变的情况,电流梯度引起的不稳定性对 β 值的限制比气球模还严格.对于大变形的等离子体,气球模对 β 值限制提出了更严格的要求.这一点是可以想像的,气球模的扰动可以局限在曲率最差的方位上,大变形给它的发展提供了条件.所以等离子体的适当形变有助于稳定性的提高.

图1 本文结果与梅瑟判据得到的临界 β 值的比较图2 本文结果与 Yamazaki 用气球模得到的临界 β 值的比较

此外,我们估计了我所“非圆截面环流器”可能得到的 β 值。假如等离子体外部边界有适当的变形,比如说 $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 1.3$,那么 β 值可以达到1.6%;若 $\varepsilon = 2.0$,那么 β 可达到2%,比同样环径比 R/a 的圆截等离子体的 β 值提高了一倍。当然,过大的拉长要受到竖直位移稳定性的限制^[8,9]。

图3给出了最佳 q 值的曲线,它由(47)式确定。曲线上的每一点对应着相应参数的最大 β 值,这些曲线对梅瑟判据^[2]和洛兹推导的充分判据^[5]也是适用的。

电流梯度引起的不稳定性对 β 值的限制与气球模比较是同样重要的。如果我们能控制等离子体边界电流分布,比如用加热的办法,同时进行适当的位形优化,这会有助于 β 值的提高。

图3 最佳 q 值与 ε 和 δ 的关系

附 录 一

自然坐标系的度规张量

自然坐标系与平衡位形有密切关系,在平衡位形给定之后,可以确定自然坐标系与我们通常使用的坐标系之间的关系。下面求解自然坐标系的度规张量。

首先解磁微分方程

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \theta = \chi, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \xi = \phi, \quad (\text{A.1})$$

设 ρ, ω, φ 是准柱坐标系的坐标,它们与柱坐标的关系为

$$r - R = -\rho \cos \omega, \quad z = \rho \sin \omega. \quad (\text{A.2})$$

类似洛兹^[5]我们把沙拉维也夫位形写作如下形式:

$$\psi = \psi_0 \left\{ e(r-R)^2 + \frac{z^2}{\varepsilon} + 2 \left(\Delta - \frac{s}{\varepsilon} \right) \frac{r-R}{R} z^2 - \frac{2\varepsilon s}{R} (r-R)^3 \right\}. \quad (\text{A.3})$$

这里 ψ_0 为常数因子; Δ 相当于磁面的三角形变参量; s 相当于磁面的椭圆中心相对磁轴的位移。解磁微分方程

(A.1) 得到

$$\zeta = \varphi + \frac{I}{4\pi^2 \Psi_0 R^2 \varepsilon} \rho \sin \omega, \quad (\text{A.4})$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \omega}{\varepsilon} \right) - \frac{\rho \sin \omega}{2\pi \varepsilon R} \left[1 + 3\varepsilon - \frac{\Delta \sin^2 \omega}{\varepsilon \cos^2 \omega + \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \omega} \right], \quad (\text{A.5})$$

$$\nu = \frac{2\pi^2 R \Psi}{\Psi_0}. \quad (\text{A.6})$$

用下面关系:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \theta_2}} \cos 2\pi \theta, \\ \sin \omega &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_2}} \sin 2\pi \theta, \\ \rho &= \left(\frac{\nu}{2\pi^2 R} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cos^2 2\pi \theta + \varepsilon \sin^2 2\pi \theta \right)^{1/2} = \left(\frac{\theta_2 \nu}{2\pi^2 R} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

于是可以求出自然坐标系度规张量的全分量。下面仅写出 ν, θ, ζ 的梯度:

$$\begin{aligned} \nabla \nu &= 4\pi \left(\frac{R}{2} \right)^{1/2} [\varepsilon^{1/2} \cos 2\pi \theta \nu + \varepsilon^{-1/2} \sin 2\pi \theta \beta] \nu^{1/2}, \\ \nabla \theta &= \left(\frac{R}{2} \right)^{1/2} [-\varepsilon^{1/2} \sin 2\pi \theta \nu + \varepsilon^{-1/2} \cos 2\pi \theta \beta] \nu^{-1/2}, \\ \nabla \zeta &= \frac{1}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{\pi R \varepsilon \theta} \beta. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

这里 ν, β 是磁轴的主法线方向和副法线方向的单位矢量。对于基矢 $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_\nu$ 容易用 $\nabla \theta, \nabla \zeta, \nabla \nu$ 求出。

附 录 二

阶跃电流的磁场位形

对于直线阶跃电流椭圆截面等离子体, 我们可以写出它的磁场位形

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{a^2}{4} \Psi_1 \left[\frac{\operatorname{ch}^2 \mu \cos^2 \theta}{A^2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \mu \sin^2 \theta}{B^2} \right] + (\Psi_1 - \Psi_2) \\ &\quad + 2(\Psi_1 - \Psi_2)(1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \left[(\mu - \mu_0) - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sh} 2(\mu - \mu_0) \cos 2\theta \right] \quad \mu > \mu_0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

这里 μ, θ 是椭圆坐标; μ_0 是电流密度的跳跃处; a 是椭圆的焦距; A, B 分别是椭圆 μ_0 的长半轴和短半轴;

$$\Psi_1 = \frac{ABj_1}{4} (1 - \varepsilon^2)^{1/2}, \quad \Psi_2 = \frac{ABj_2}{4} (1 - \varepsilon^2)^{1/2},$$

j_1 和 j_2 分别是内、外两区的电流密度。当电流密度梯度比较大的情况, 在 μ_0 附近剪切很大, 由 m 模的共振面到 $m+1$ 模共振面的距离就很近, 于是 $\mu_0 \gg \mu - \mu_0$, 由 (A.9) 式得到

$$\Psi = \frac{a^2}{4} \Psi_1 [1 + 2(\mu - \mu_0)(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}(1 - \varepsilon \cos 2\theta)]. \quad (\text{A.10})$$

共在振面 μ_0 外面 $j = j_2$ 的区域, 它的磁面结构与 $j = j_1$ 区域一样都是椭圆类型的。

参 考 文 献

- [1] L. E. Zakharov, *Nuclear Fusion*, 18(1978), 335.
- [2] C. Mercier, *Nuclear Fusion*, 1(1960), 47.
- [3] 王中天, 物理学报, 28(1979), 733.
- [4] D. Lortz, *Nuclear Fusion*, 13(1973), 817.
- [5] D. Lortz, *Nuclear Fusion*, 13(1973), 821.
- [6] Л. С. Соловьев, ЖЭТФ, 53 (1967), 626.
- [7] K. Yamazaki, IPPJ-413, Aug., (1979).
- [8] E. Rebhan, *Nuclear Fusion*, 15(1975), 277.
- [9] 王中天, 物理学报, 28(1979), 593.

INVESTIGATION OF MHD INSTABILITY OF NONCIRCULAR TOKAMAK PLASMA

WANG ZHONG-TIAN

(Southwestern Institute of Physics, China)

ABSTRACT

MHD instability of the noncircular cross-section plasma is investigated by using a step current profile model. A new criterion for the instability is obtained. It is a generalization of Zakharov's criterion for circular cross-section plasma. The effects of elliptical and triangular distortion, current gradient and the value of safety factor q on β value are indicated. The optimistic value of q for achieving the largest β value is also given.

The critical β value for various plasma parameters is calculated and compared with the numerical results from the local instability and ballooning modes criteria. It is noted here that the current gradient affects the β value seriously. The noncircular cross-section plasma has advantage for obtaining higher β value.