第 30 卷 第 6 期 物 理 学 报 Vol. 30, No. 6
1981 年 6 月 ACTA PHYSICA SINICA June, 1981

Poincaré 引力规范场和 1/2 自旋粒子的运动

李 光 仪
(江 苏 师 范 学 院)

1980 年 3 月 8 日收到

提 要

本文以 Poinaré 群作为引力规范群，在有挠率和曲率的空间中，讨论了当引力拉氏量包含场强的线性项与二次项时体系的运动方程，指出球对称真空静引力场方程在“宏观”极限下可以得到 Schwarzchild 解. 因此它与目前关于广义相对论的实验验证是一致的. 但在“微观”极限下，方程预示着一种新的短程作用. 讨论了自旋 1/2 的粒子作为检测粒子在这种球对称真空静场中的运动. 指出运动方程只与仿射联络的黎曼部分有关，并和广义相对论的相应方程具有同样的形式.

一、Poincaré 规范群和引力拉氏量

继 Utiyama[1] 以后，关于引力规范的研究已导致多种方案. Kibble[2] 从时空的局域非齐次洛仑兹变换不变性引入 Poincaré 群作为规范群，建立了引力理论. 此时四维时空由 GR 的黎曼时空 V_4 变为有挠的黎曼-卡当时空 U_4. 郭汉英等[3]考虑了规范场的动能项，提出了一种新的引力规范理论；随后吴詠时等[9]指出了新理论与 GR 的三大实验验证的一致性. 近来 Hehl 等人[4]又提出了只包含二次项的拉氏量方案，并指出由此可得到牛顿-爱因斯坦近似和一种短程势. 本文试图探讨引力拉氏量包含规范场强的线性项和二次项形式时体系的运动方程及 1/2 自旋粒子在球对称真空静场中的运动规律.

为了保证局域 Poincaré 不变性，必须引进转动规范势 A_μ^{ij} 和平移规范势 h_k^μ (即标架场)，它们分别与 Poincaré 群的转动自由度和平移自由度相对应. $i=0, 1, 2, 3$ 为局域洛仑兹标架的编号，$\mu=0, 1, 2, 3$ 为坐标分量编号. h_k^μ 决定了时空的度规.

$$g^{\mu\nu}=h_i^\mu h_j^\nu \eta^{ij},\qquad \eta^{ij}=\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1),$$
$$h_i^\nu b_\mu^i=\delta_\mu^\nu,\qquad h_i^\nu b_\nu^j=\delta_i^j,\qquad h\equiv\det|h_k^\mu|\neq 0. \tag{1.1}$$

场量 ϕ 的协变微商为

$$\phi_{|\mu}=\left(\partial_\mu+\frac{1}{2}A_\mu^{ij}S_{ij}\right)\phi,\quad \phi_{|k}=h_k^\mu\phi_{|\mu}, \tag{1.2}$$

其中 S_{ij} 为洛仑兹群的旋量表示，$S_{ij}=\frac{1}{2}[\gamma_i, \gamma_j]$. 与二类规范势相应有二类规范场强

$$F^{ij}_{\cdot\cdot\mu\nu} = A^{ij}{}_{\mu,\nu} - A^{ij}{}_{\nu,\mu} + A^{lj}_{\cdot\cdot\mu}A^{\cdot i}_{l\cdot\nu} - A^{lj}_{\cdot\cdot\nu}A^{\cdot i}_{l\cdot\mu}, \tag{1.3}$$

$$C^{k}_{\cdot\,\mu\nu} = b^{k}_{\mu 1\nu} - b^{k}_{\nu 1\mu}. \tag{1.4}$$

场的总作用量

$$S = S_m + S_g = \int (\mathscr{L}_m + \mathscr{L}_g) h d^4 \chi, \tag{1.5}$$

其中 $\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_m(\psi, \psi_{|k})$ 为物质场的拉氏量；$\mathscr{L}_g$ 为引力场的拉氏量，我们选择它具有下述形式：

$$\mathscr{L}_g = \chi F - \frac{\eta}{4} F^{ij}_{\cdot\cdot\mu\nu} F_{ij}^{\cdot\cdot\mu\nu} - \frac{\eta'}{4}(C^{k}_{\cdot\,\mu\nu} C_{k}^{\cdot\,\mu\nu} - 2C^{\rho}_{\cdot\,\rho k} C_{\lambda}^{\cdot\,\lambda k}). \tag{1.6}$$

这个拉氏量除包含了场强的线性项外，还包括了规范场的动能项．从规范场观点来看，这样作是很自然的．Kibble 从 χF 项导出了爱因斯坦方程．挠率的平方项为爱因斯坦早期考虑的具有远距平行性空间的引力拉氏量的一个特殊形式，由它亦能导出爱因斯坦引力理论的结果[4,12]．因此我们亦可以选取 $\chi = \eta'$．从量纲分析可见，$F \cdot F$ 项具有 $[L^{-4}]$ 量纲；而 F 与 $C \cdot C$ 项的量纲为 $[L^{-2}]$．若令 $\chi = \eta' = 1/l^2$，l 为普朗克长度，则 $\eta = 1/\mathscr{H}$，$\mathscr{H}$ 为一个无量纲数．从 $r \to 0$ 时的渐近行为来看，$F \cdot F$ 项代表了一种强的短程作用[11]．这样选取耦合常数与吴詠时等[5]由 de Sitter 引力规范理论得出的结果除差一个宇宙项外基本上是一致的．

Dirac 粒子的拉氏量取为[2]：

$$\mathscr{L}_m = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_{|k} i\gamma^k \psi - \bar{\psi} i\gamma^k \psi_{|k}) - m\bar{\psi}\psi, \tag{1.7}$$

并有[6]：

$$\gamma^k = b^k{}_\lambda \gamma^\lambda, \quad \gamma_k = h_k{}^\mu \gamma_\mu, \quad \{\gamma_k, S_{ij}\} = \varepsilon_{kijm}\gamma^m\gamma_5, \tag{1.8}$$

式中 ε_{kijm} 为完全反对称张量．

二、场的运动方程

由最小作用原理 $\delta S = 0$，把 (1.5) 式分别对 ψ，$b^k{}_\mu$ 和 $A^{ij}{}_\mu$ 求变分，可得场的运动方程式为

$$\frac{\partial \mathscr{L}_m}{\partial \psi} - \frac{1}{h}\partial_\mu\left(h\frac{\partial \mathscr{L}_m}{\partial \psi_{,\mu}}\right) = 0, \tag{2.1}$$

$$h^\mu_k \mathscr{L}_g - 2\chi F^\mu_k + \eta F^{ij}_{\cdot\cdot\rho k} F_{ij}^{\cdot\cdot\rho\mu} + \eta'\left[\frac{1}{h}(hT_{k}^{\cdot\,\mu\lambda})_{1\lambda} + C^{\rho}_{\cdot\,k\sigma} T_{\rho}^{\cdot\,\mu\sigma}\right] + \mathfrak{T}_k^{\cdot\,\mu} = 0 \tag{2.2}$$

$$\chi T^{\mu}_{\cdot\,ij} + \eta\frac{1}{h}(hF_{ij}^{\cdot\cdot\mu\nu})_{1\nu} - \frac{1}{2}\eta'(C_{[ij]}^{\cdot\cdot\mu} + C^{\sigma}_{\cdot\,\sigma[j}h^{\mu}_{i]}) + \mathfrak{S}^{\mu}_{\cdot\,ij} = 0, \tag{2.3}$$

其中

$$T^{\mu}_{\cdot\,ij} = h^\mu_k C^{k}_{\cdot\,ij} + C^{k}_{\cdot\,k[i}h^{\mu}_{j]}. \tag{2.4}$$

从 Poincaré 不变性可以得到四个等式

$$\frac{\delta \mathscr{L}_m}{\delta b^k_\mu} = h^\mu_k \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi_{ik} = h \mathfrak{T}_k^{\cdot\mu}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta A^{ij}_\mu} = - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} S_{ij} \psi = h \mathfrak{S}^{\mu}_{\cdot ij}, \tag{2.6}$$

$$(h \Sigma_k^{\cdot\mu})_{|\mu} = h[C^i{}_{k\mu} \mathfrak{T}^\mu_i + F_{k\mu}^{\cdot\cdot ij} \mathfrak{S}^\mu_{\cdot ij}], \tag{2.7}$$

$$(h \mathfrak{S}^\mu_{\cdot ij})_{|\mu} = h \mathfrak{T}_{[ij]}. \tag{2.8}$$

$\mathfrak{T}$ 为物质场的能量-动量张量；$\mathfrak{S}$ 为自旋流密度.

对于由 Dirac 粒子组成的物质场，利用 (1.2) 式可将 (2.1) 式写成

$$(i\gamma^\mu \psi_{,\mu} - m\psi) + \frac{i}{2}[A^{ij}{}_\mu \{\gamma^\mu, S_{ij}\} + h^\lambda_l b^l_{\lambda,\mu} \gamma^\mu + \gamma^\mu_{,\mu}]\psi = 0, \tag{2.9}$$

从方程组 (2.1) 至 (2.3) 可以看到，由于 $\mathscr{L}_g$ 中除包含场强的线性项，还包含了平移、转动规范场强的二次项——动能项，因此物质场的能量-动量张量 $\mathfrak{T}$ 不仅与曲率有关，还和挠率有关；物质场的自旋流密度 $\mathfrak{S}$ 除了与挠率有关，还和曲率有关. 这反映了"时空的与某种对称性质相联系的几何性质是由物质场与同样对称性相联系的物理性质所决定的"[7].

吴詠时等[9]指出，$\mathscr{L}_g = \chi F - \frac{\eta}{4} F^{\cdot\cdot ij}_{\mu\nu} F_{ij}^{\cdot\cdot\mu\nu}$ 时的真空球对称静场有 Schwarzchild 解. 此外，单从 F 项或 $C \cdot C$ 项在一定条件下可以得到 Schwarzchild 解[2,4]. 因此可以期待由 (1.6) 式所导出的结果与 GR 的四大实验验证并不矛盾，这从下面讨论场方程的真空解时可以得到证实. 但在微观领域或对自旋不为零的粒子，则会偏离 GR 的结果.

在 Kibble-Sciama 理论中，挠率是"冻结"的[8]. 但在现在的方案中可以看到方程中出现了 C 与 F 的微分项，这说明挠率可以传播，距离可以大于 10^{-33} 厘米，当然以宏观观点来看它的传播程还是非常短的.

三、黎曼-卡当空间中场方程的表述

在黎曼-卡当空间中仿射联络为 $\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}$，挠率为

$$C^\rho_{\cdot\lambda\sigma} = \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\rho_{\sigma\lambda},$$

改进的挠率为

$$T^\rho_{\cdot\lambda\sigma} = C^\rho_{\cdot\lambda\sigma} + C^\mu_{\cdot\mu[\lambda} \delta^\rho_{\sigma]}, \tag{3.1}$$

组合挠率为

$$K^\rho_{\cdot\lambda\sigma} = \frac{1}{2}[-C^\rho_{\cdot\lambda\sigma} + C_{\sigma\cdot\lambda}^{\cdot\rho} - C_{\lambda\sigma}^{\cdot\cdot\rho}], \tag{3.2}$$

则有[8]

$$\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} - K^\rho_{\cdot\lambda\sigma}, \tag{3.3}$$

$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\}$ 为第二类克利斯托菲符号. 以"‖"表示相对于 Γ 的协变微商，以";"表示相对于"{ }"的协变微商. 由度规性假定：$g_{\mu\nu\|\lambda} = 0$，

得

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} = h^{\rho}_{i} b^{i}_{\lambda|\sigma} = - b^{i}_{\lambda} h^{\rho}_{i|\sigma}. \tag{3.4}$$

利用这些关系式，可以将前节的一些式子用黎曼-卡当空间的几何量表述出来．在底空间为黎曼流形时得到

$$\delta^{\mu}_{\nu}\mathscr{L}_{g} - 2\chi F^{\mu}_{\nu} + \eta F^{\rho\sigma}_{\cdot\cdot\,\eta\nu} F_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\,\eta\mu} + \eta'\{T_{\nu}^{\cdot\mu\sigma}{}_{;\sigma} + (K^{\rho}_{\cdot\nu\lambda} + C^{\rho}_{\cdot\nu\lambda}) T_{\rho}^{\cdot\mu\lambda}\} + \mathfrak{T}^{\mu}_{\cdot\nu} = 0, \tag{3.5}$$

$$\chi T^{\mu}_{\cdot\rho\lambda} + \eta(F_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\,\mu\nu}{}_{;\nu} + F_{[\rho|\sigma}{}^{\mu\nu} K^{\sigma}_{\cdot\lambda]\nu}) - \frac{\eta'}{2}(C_{[\rho\lambda]}^{\cdot\cdot\,\mu} + \delta^{\mu}_{[\rho} C^{\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\sigma|\lambda]}) + \mathfrak{S}^{\mu}_{\cdot\rho\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

在底空间为黎曼-卡当流形时有

$$\begin{aligned} &\delta^{\mu}_{\nu}\mathscr{L}_{g} - 2\chi F^{\mu}_{\nu} + \eta F^{\rho\sigma}_{\cdot\cdot\,\eta\nu} F_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\,\eta\mu} + \eta'\Big\{T_{\nu}^{\cdot\mu\sigma}{}_{\|\sigma} - \delta^{\mu}_{\nu} C^{\sigma}_{\cdot\sigma\rho} C_{\lambda}^{\cdot\lambda\rho} \\ &\quad + C^{\lambda}_{\cdot(\nu|\rho} C_{\lambda)}^{\cdot\,\mu\rho} - \frac{1}{2} C^{\mu}_{\cdot\rho\lambda} C_{\nu}^{\cdot\rho\lambda}\Big\} + \mathscr{F}^{\mu}_{\nu} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &\chi T^{\mu}_{\cdot\rho\lambda} + \eta\left(F_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\,\mu\nu}{}_{\|\nu} + C^{\nu}_{\cdot\nu\sigma} F_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\,\mu\sigma} - \frac{1}{2} C^{\mu}_{\cdot\sigma\nu} F_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\,\sigma\nu}\right) \\ &\quad - \frac{\eta'}{2}(C_{[\rho\lambda]}^{\cdot\cdot\,\mu} + \delta^{\mu}_{[\rho} C^{\sigma}_{\cdot\sigma|\lambda]}) + \mathfrak{S}^{\mu}_{\cdot\rho\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

四、球对称真空静场解

对球对称静场可以采用如下形式的度规：

$$x^0 = ct, \quad x' = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi;$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

非零的挠率分量为[9]

$$\begin{aligned} &C^{0}_{\cdot 01} = R_1(r), \qquad C^{2}_{\cdot 21} = C^{3}_{\cdot 31} = R_2(r); \\ &K^{0}_{\cdot 10} = R_1, \qquad K^{2}_{\cdot 12} = K^{3}_{\cdot 13} = R_2, \\ &K^{1}_{\cdot 00} = R_1 e^{\nu-\lambda}, \qquad K^{1}_{\cdot 22} = -R_2 r^2 e^{-\lambda}, \\ &K^{1}_{\cdot 33} = -R_2 r^2 \sin^2\theta e^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

非零的联络分量为

$$\Gamma^{0}_{10} = \frac{\nu'}{2} - R_1, \qquad \Gamma^{0}_{01} = \frac{\nu'}{2},$$

$$\Gamma^{1}_{00} = \left(\frac{\nu'}{2} - R_1\right) e^{\nu-\lambda}, \qquad \Gamma^{1}_{11} = \frac{\lambda'}{2},$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{3}_{13} = \frac{1}{r} - R_2, \qquad \Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^1_{22} = -r^2 e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r} - R_2\right), \qquad \Gamma^1_{33} = -r^2 \sin^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r} - R_2\right),$$
$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{4.3}$$

曲率 $F^{\mu}_{\cdot\nu\rho\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$ 的非零分量为

$$F^{01}{}_{01} = e^{-\lambda}\left[\left(R_1 - \frac{\nu'}{2}\right)' + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\left(R_1 - \frac{\nu'}{2}\right)\right] = A(r),$$
$$F^{02}{}_{02} = F^{03}{}_{03} = e^{-\lambda}\left[\left(\frac{1}{r} - R_2\right)\left(R_1 - \frac{\nu'}{2}\right)\right] = B(r),$$
$$F^{12}{}_{12} = F^{13}{}_{13} = \frac{1}{r}\, e^{-\lambda}\left[(rR_2)' - \frac{\lambda'}{2}(rR_2 - 1)\right] = C(r),$$
$$F^{23}{}_{23} = \frac{1}{r^2}\left[1 - (rR_2 - 1)^2 e^{-\lambda}\right] = D(r). \tag{4.4}$$

非零的 $F_{\rho\lambda}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu}$ 为

$$F_{01}{}^{0\nu}{}_{\|\nu} = -F^{0\nu}{}_{10\|\nu} = A' + 2\left(\frac{1}{r} - R_2\right)(A - B),$$
$$F_{12}{}^{2\nu}{}_{\|\nu} = -F_{21}{}^{2\nu}{}_{\|\nu} = F_{13}{}^{3\nu}{}_{\|\nu} = -F_{31}{}^{3\nu}{}_{\|\nu}$$
$$= \left(\frac{\nu'}{2} - R_1\right)(B - C) + \left(\frac{1}{r} - R_2\right)(D - C) - C',$$
$$F_{01}{}^{0\nu}{}_{;\nu} = A' + \frac{2}{r}(A - B),$$
$$F_{12}{}^{2\nu}{}_{;\nu} = F_{13}{}^{3\nu}{}_{;\nu} = -C' + \frac{2}{r}(D - C) + \frac{\nu'}{2}(B - C). \tag{4.5}$$

非零的 $C_{\rho}^{\cdot\mu\nu}{}_{\|\nu}$ 为

$$C_0^{\cdot 0\nu}{}_{\|\nu} = (-R_1 e^{-\lambda})' + \left[\frac{\lambda'}{2} + 2\left(\frac{1}{r} - R_2\right)\right](-R_1 e^{-\lambda}),$$
$$C_1^{\cdot 1\nu}{}_{\|\nu} = (-e^{-\lambda})\left[\left(\frac{\nu'}{2} - R_1\right)R_1 + 2\left(\frac{1}{r} - R_2\right)R_2\right],$$
$$C_2^{\cdot 2\nu}{}_{\|\nu} = C_3^{\cdot 3\nu}{}_{\|\nu} = (-R_2 e^{-\lambda})'$$
$$+ \left[\frac{\nu' + \lambda'}{2} + \frac{1}{r} - (R_1 + R_2)\right](-R_2 e^{-\lambda});$$
$$C_0^{\cdot 0\nu}{}_{;\nu} = (-e^{-\lambda})\left[R_1' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\lambda'}{2}\right)R_1\right],$$
$$C_1^{\cdot 1\nu}{}_{;\nu} = (-e^{-\lambda})\left[\frac{\nu'}{2}R_1 + \frac{2}{r}R_2\right],$$
$$C_2^{\cdot 2\nu}{}_{;\nu} = C_3^{\cdot 3\nu}{}_{;\nu} = (-e^{-\lambda})\left[R_2' + \left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{1}{r}\right)R_2\right]. \tag{4.6}$$

将上述各量代入 (3.5), (3.6), (3.7) 和 (3.8) 式，计算结果表明在球对称真空静场条件下，黎曼底流形上与黎曼-卡当底流形上的场方程相同，它由 5 个方程联立组成:

$$2\chi(2C + D) = -\eta(A^2 + 2B^2 - 2C^2 - D^2)$$
$$+ \eta'(-e^{-\lambda})\left[2R_1' - R_2^2 + \left(\frac{2}{r} - \frac{\lambda'}{2}\right)2R_2\right], \tag{4.7}$$

$$2\chi(2B+D)=-\eta(A^2-2B^2+2C^2-D^2)$$
$$+\eta'(-e^{-\lambda})\left[\frac{2}{r}(R_1+R_2)+\nu' R_2-R_2(R_2+2R_1)\right], \tag{4.8}$$

$$2\chi(A+B+C)=-\eta(D^2-A^2)$$
$$+\eta'(-e^{-\lambda})\left[(R_1+R_2)'+\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}+\frac{1}{r}\right)(R_1+R_2)-R_1\cdot R_2\right], \tag{4.9}$$

$$2\chi R_2-\eta\left[A'+\frac{2}{r}(A-B)+2BR_2\right]+\eta' R_2=0, \tag{4.10}$$

$$\chi(R_1+R_2)-\eta\left[C'+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{1}{r}\right)C-\left(\frac{\nu'}{2}-R_1\right)B\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{r}-R_2\right)D\right]+\frac{\eta'}{2}(R_1+R_2)=0. \tag{4.11}$$

这是一个非齐次常微分方程组，难以严格求解. 我们在下述几种特殊情况下来考察它的解，以有助于了解方程组可能的解的一些性质.

1）直接验算可以证明 Schwarzchild 解为方程组的一个解，因此在宏观情况下这个方案并不与 GR 的四大实验验证相矛盾.

2）若无量纲耦合常数 $\eta=0$，即拉氏量只含 F 和 $C\cdot C$ 项时，方程组成为

$$\left(1+\frac{\eta'}{2\chi}\right)\left[(R_1+2R_2)'+\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)(R_1+2R_2)-R_2(2R_1+R_2)\right]$$
$$=\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)-\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}(1-e^{\lambda}), \tag{4.12}$$

$$\left(1+\frac{\eta'}{2\chi}\right)\left[(R_1+R_2)'+\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}+\frac{1}{r}\right)(R_1+R_2)-R_1\cdot R_2\right]$$
$$=\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{2}\left(\frac{1}{r}+\nu'\right), \tag{4.13}$$

$$\left(1+\frac{\eta'}{2\chi}\right)\left[R_2'+R_1R_2-\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}-\frac{1}{r}\right)R_2-\frac{R_1}{r}\right]=\frac{\nu'+\lambda'}{2r}, \tag{4.14}$$

$$\left(1+\frac{\eta'}{2\chi}\right)R_2=0, \tag{4.15}$$

$$\left(1+\frac{\eta'}{2\chi}\right)(R_1+R_2)=0. \tag{4.16}$$

如果附加上 ∞ 处为闵氏空间这一边界条件，并有 $\eta'\neq-2\chi$，则从 (4.15)，(4.16) 式有 $R_1=0$，$R_2=0$. 此时 (4.12—4.14) 式变成 GR 的球对称静场方程，它有 Schwarzchild 解.

3）若量纲为 $[L^{-2}]$ 的耦合常数 χ，$\eta'=0$；则拉氏量仅包含 $F\cdot F$ 项，文献 [4] 指出此项代表一种短程作用. 方程组成为

$$A^2-D^2=0, \tag{4.17}$$
$$C^2-B^2=0, \tag{4.18}$$
$$A'+\frac{2}{r}(A-B)+2R_2B=0, \tag{4.19}$$

$$C' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) C + \left(R_1 - \frac{\nu'}{2}\right) B + \left(R_2 - \frac{1}{r}\right) D = 0. \tag{4.20}$$

把(4.4)式代入(4.17)—(4.20)式，可得到下述几个方程组：

I) $A = D$, $B = C$.

(Ia) $x = 0$, $\quad y^2 - \dfrac{e^\lambda}{r^2} = 0$.

(Ib) $y' + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\lambda'}{2} + x\right) y = 0$, $\quad x' + ux + y^2 - \dfrac{e^\lambda}{r^2} = 0$.

II) $A = -D$, $B = -C$.

(IIa) 同(Ia)；

(IIb) $y' + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\lambda'}{2} - x\right) y = 0$, $\quad x' + ux - y^2 + \dfrac{e^\lambda}{r^2} = 0$.

III) $A = -D$, $B = C$

(IIIa) 同(Ia)；

(IIIb) $y = 0$, $\quad x' + ux + \dfrac{e^\lambda}{r^2} = 0$.

IV) $A = D$, $B = -C$.

(IVa) 同(Ia)；

(IVb) $y = 0$, $\quad x' + ux - \dfrac{e^\lambda}{r^2} = 0$.

这里 $x = R_1 - \nu'/2$, $y = R_2 - 1/r$, $u = (\nu' - \lambda')/2$. 因为上述任一组中方程的个数均小于未知数的个数，所以利用上述方程组不能完全确定 R_1, R_2, ν 和 λ. 考虑到方程组(4.7)—(4.11)在宏观情况下有 Schwarzchild 解，可以将由此所确定的 ν 和 λ 代入方程(4.17)—(4.20)，解之得 R_1 和 R_2. 结果如下：

对(Ia)有 $R_1 = \dfrac{\nu'}{2}$; $\quad R_2 = \dfrac{1}{r}(1 \pm e^{\lambda/2})$; $\quad A = B = C = D = 0$.

对(IIIb)有 $R_1 = -e^{-\frac{\nu-\lambda}{2}} \displaystyle\int_\infty^r \frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}}{t^2} dt + \frac{\nu'}{2}$,

$$R_2 = \frac{1}{r}; \quad A = -D = -\frac{1}{r^2}; \quad B = C = 0,$$

边界条件：$r \to \infty$ 为闵氏时空.

对(IVb)有 $R_1 = e^{-\frac{\nu-\lambda}{2}} \displaystyle\int_\infty^r \frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}}{t^2} dt + \frac{\nu'}{2}$; $\quad R_2 = \dfrac{1}{r}$.

$$A = D = \frac{1}{r^2}; \quad B = C = 0.$$

方程组(Ib)和(IIb)的情况比较复杂，但可以验证(IVb)的解和 Schwarzchild 解亦适合(Ib)；同样(IIIb)的解亦适合(IIb). 此外，在 $\int x dr$ 很小时，(Ib)和(IIb)有形如 r^{-d} 的解和振荡的解.

综上所述，方程组 (4.17)—(4.20) 可能有三类解：挠率为零的 Schwarzchild 解；曲率为零的 Weitzenböck 解；和挠率、曲率都不为零的 U_4 空间解．这一类解所代表的引力场，在慢速运动近似下，引力势具有 $\ln\gamma+\frac{C'}{\gamma}$ 的形式．

五、引力规范场中的 Dirac 粒子

粒子的拉氏量 $\mathscr{L}_m$ 可以分成黎曼部分与非黎曼部分[8]：

$$\mathscr{L}_m=\mathscr{L}_m(\{\})+K_{\mu\rho\lambda}\mathfrak{S}^{\mu\rho\lambda},\tag{5.1}$$

其中

$$\mathfrak{S}^{\mu\rho\lambda}=\mathfrak{S}^{[\mu\rho\lambda]}=\frac{\hbar C}{4}\,\epsilon^{\mu\rho\lambda\sigma}\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma^5\psi.$$

$K\cdot\mathfrak{S}$ 部分为物质场的自旋与引力场的挠率相互作用项，此项的存在有可能使旋量粒子在引力场中的运动偏离 GR 的轨道．由 (2.1) 式得到 Dirac 粒子必须满足的方程

$$(i\gamma^\mu\overset{\{\}}{\nabla}_\mu\psi-m\psi)+\frac{1}{4}K_{\mu\rho\lambda}\cdot h_i^\mu h_j^\rho h_k^\lambda\epsilon^{ijkm}\gamma_m\gamma^5\psi=0.\tag{5.2}$$

它不同于 GR 中得出的方程

$$i\gamma^\mu\overset{\{\}}{\nabla}_\mu\psi-m\psi=0.\tag{5.3}$$

在 Kibble-Sciama 理论中，由于 $K_{\mu\rho\lambda}=\mathfrak{S}_{\mu\rho\lambda}$，故 $K\cdot\mathfrak{S}$ 项代表一种力程很短的 ($\sim10^{-33}$ 厘米)“自旋-自旋接触作用”项[8]．对中微子场，此项为零[10]．因此中微子将与光子一样循短程线运动．

在现在的方案中 K 与 $\mathfrak{S}$ 之间必须满足 (2.3) 式，这样引力规范场与物质的自旋的附加作用项除包含“接触”作用外，还有曲率的微商与自旋的耦合项，它们都可能引起粒子的运动偏离 GR 的结果．原则上可以通过解方程 (2.1)—(2.3) 来确定 Dirac 粒子在引力场中的运动．作为一种符合实际情况的近似，我们把 Dirac 粒子作为一个检测粒子，假定它本身所产生的引力场与外场相比可以忽略，讨论它在球对称真空静引力场中的运动．当考虑单个 Dirac 粒子在星体外部空间中运动时，上述假定是合理的．

从前节 (4.1)—(4.6) 式可见在球对称静场条件下，h_k^μ 和 b_μ^k 只有当 k 与 μ 取同一数码时才不为零．$F^{\rho\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu}$, $C^\rho_{\cdot\mu\nu}$, $F_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\mu\nu}{}_{||\nu}$ 和 $C_\rho^{\cdot\mu\nu}{}_{||\nu}$ 等量只在至少有两个足标相等的情况下才不为零．注意到 (5.2) 式中 ϵ^{mijk} 的完全反对称性，即有 $K\cdot\mathfrak{S}=0$．这样 Dirac 粒子的运动方程变成 (5.3) 式的形式．因此在球对称真空静引力规范场中，单个 Dirac 粒子的运动方程与 GR 中的方程形式相同并只取决于仿射联络的黎曼部分．

如果球对称静场中分布着物质，就必须考虑 Dirac 粒子间的引力作用，此时自旋的接触作用项对场方程有贡献，Dirac 粒子束流的运动会偏离 GR 的结果，并且物质流密度越大，偏离就越显著．如果在天体物理中能观察到这种偏离，将会加深我们对引力理论的认识．

对于二分量中微子文献 [10] 已指出自旋接触作用项为零，因此中微子束流在球对称静引力场中的运动仍符合 GR 的结果．

本文是在周孝谦教授的指导下完成的，并得到吴泳时同志的热情帮助，作者衷心感谢。

参 考 文 献

[1] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**(1956), 1597.
[2] J. W. B. Kibble, *Jour. Math. Phys.*, **2**(1961), 212.
[3] 郭汉英、吴詠时、张元仲，科学通报，**18**(1973)，72.
[4] F. W. Hehl, J. Nitsch & P. Von der Heyde, Gravitation and Poincare' Gauge Field Theory with Quadratic Lagragian (preprint).
[5] 吴詠时、李根道、郭汉英，科学通报，**19**(1974)，509.
[6] D. Brill & J. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**(1957), 465.
[7] 邹振隆等，中国科学，1979，**4**，366.
[8] F. W. Hehl, P. Von der Heyde, G. D. Kerlick & J. M. Nester, *Re v. Mod. Phys.*, 48(1976), 393.
[9] 吴詠时、邹振隆、陈时，科学通报，**18** (1973),119.
[10] B. Kuchowicz, *Phys. Lett.*, **A50**(1974), 267.
[11] F. W. Hehl, Y. Néeman, J. Nitsch and P. Von der Heyde, *Phys. Lett.*, **78B**(1978), 102.
[12] H. Rumpf, *Z. Naturforsch*, **33a**(1978), 1224.

POINCARÉ GAUGE FIELD OF GRAVITATION AND THE MOTION OF SPIN 1/2 PARTICLE

Li Guang-yi

(*Soochow University*)

Abstract

The Poincaré group is adapted as the gravitational gauge group. The equation of gravitational field in the Reimann-Cartan space-time with a Lagrangian containing linear and quadratic terms of strengths is investigated. For static and spherically symmetric field the vacuum solution in the macroscopic limit is shown to correspond to Schwarzchild solution. Therefore this is in agreement with the experiments for general relativity. But in the microscopic limit, the field equation may predict a new type of short-range interaction.

The spin ½ particle, Dirac particle, is taken as a probing particle. Its motion in the vacuum static and spherically symmetric gravitation field is explored. As a result, it is shown that the equation of motion of the Dirac particle only depends upon the Reimannian part of affine connection and has the same form as the corresponding equation of general relativity.