第30卷 第6期　　物 理 学 报　　Vol. 30, No. 6
1981年6月　　ACTA PHYSICA SINICA　　June, 1981

关于规范群中含有 Abel 子群和有 Higgs 场的情况下重正化前后规范群的同构

汪　容
（中国科学技术大学研究生院）

1980年10月24日收到

提　　要

在规范群含有 Abel 子群和有 Higgs 场的情况下，对重正化前后的规范群的同构性质作了一个严格的证明.

一

规范群含有 Abel 子群的情况（W-S 模型就是这种情况中的一个特例），比没有 Abel 子群的情况要复杂一些. 't Hooft 和 Veltman[1], Lee 和 Zinn-Justin[2] 早期的关于重正化的证明都没有讨论这种比较复杂的情况. Ross 和 Taylor[3] 讨论过 W-S 模型的重正化和重正化后的规范不变性，但他们的讨论是不严格的，只准确到两级微扰. Julve 和 Tonin[4] 利用 Slavnov 恒等式曾讨论，即使规范群中含有 Abel 子群，重正化前后的规范群也具有同构性质. 他们采用的方法类似于 Zinn-Justin 对于没有 Abel 子群的情况的讨论[5]. 但正如 Zinn-Justin[5] 和 Taylor[6] 所指出，这个方法要求定义 S_n^0，使得对于每一级（即每个 n，n 代表 n 圈），$\tilde{S}_n^0 * \tilde{S}_n^0 = 0$ 都严格成立. 为此，重正化到 n 圈的 $\tilde{S}_n^0$ 和重正化到 $n+1$ 圈的 $\tilde{S}_{n+1}^0$ 之间要有如下关系：

$$\tilde{S}_{n+1}^0 = \tilde{S}_n^0 - \tilde{\Gamma} \underset{(n+1)}{\mathrm{div}} (S_n^0) + o(\eta^{n+2}).$$

这里用 $\left(\frac{1}{\eta} S + J_i A_i + \bar{\xi}_a u_a + \bar{u}_a \xi_a\right)$ 代替 $(S + J_i A_i + \bar{\xi}_a u_a + \bar{u}_a \xi_a)$ 来计算 Γ，n 圈的图有系数 η^n，η 叫做圈数参数. $o(\eta^{n+2})$ 代表 $(n+2)$ 以上的高级修正. 然而，怎样定义各级 n 的 $\tilde{S}_n^0$，怎样确定 $o(\eta^{n+2})$ 所代表的高级修正，在这个方法里并不清楚. 从而 Julve 和 Tonin 的证明也并不十分清楚. Lee[7] 改进了 Zinn-Justin 的证明，给出了 $\tilde{S}_{n+1}^0$ 和 $\tilde{S}_n^0$ 之间的具体关系，可以明显地看到各级的 $\tilde{S}_n^0$ 都严格满足

$$\tilde{S}_n^0 * \tilde{S}_n^0 = 0.$$

本文将说明，把 Lee 的方法作一定补充后，可严格而直截了当地证明，在含有 Abel 子群的情况下，重正化前后的规范群也具有同构性质，各级的 $\tilde{S}_n^0$ 严格满足 $\tilde{S}_n^0 * \tilde{S}_n^0 = 0$.

二

现在写出有 Abel 子群和 Higgs 场时的 Slavnov 恒等式. 取规范群为

$$G = A \otimes B, \tag{1}$$

A 是非 Abel 子群, B 是 Abel 子群. 先不加入费密场,规范不变拉氏量为

$$\mathscr{L}'_{\rm inv}[A_i, B_\mu, S_a] = \mathscr{L}_{\rm inv}[A_i] + \mathscr{L}_{\rm inv}[B_\mu] - \frac{1}{2}|Ds_a|^2 - \Lambda V(s^+s),$$

$$\mathscr{L}_{\rm inv}[A_i] = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2,$$

$$\mathscr{L}_{\rm inv}[B_\mu] = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2,$$

$$(Ds_a)^2 = \left|\left(\partial_\alpha - \frac{i}{2}g\tilde{\tau}^a \cdot A_\alpha^a - \frac{i}{2}g' B_\alpha\right)s\right|^2. \tag{2}$$

A_i 为非 Abel 规范场, B_μ 为 Abel 规范场, s_a 与 s_a^+ 为 Higgs 场(复的). 又可取

$$V(s^+s) = (s_a^+ s_a)^2. \tag{3}$$

以 $W-S$ 模型为例:

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + i\varphi_1), \qquad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 - i\varphi_3),$$

$$s_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - i\varphi_1), \qquad s_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 + i\varphi_3),$$

$\tilde{\tau}^1, \tilde{\tau}^2, \tilde{\tau}^3$ 取 Pauli 矩阵.

R_ξ 规范的规范确定项为

$$-\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2 - \frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2, \tag{4}$$

其中

$$C^{Aa} = \partial_\mu A_\mu^a + \frac{1}{\xi_A}\frac{gv}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(\delta_{2j}\tilde{\tau}_{jk}^a s_k - s_k^+\tilde{\tau}_{kj}^a\delta_{j2}) \qquad (a = 1, 2, 3)$$

$$C^B = \partial_\mu B_\mu - \frac{1}{\xi_B}\frac{g'v}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(\delta_{2j}\tilde{\tau}_{jk}^3 s_k - s_k^+\tilde{\tau}_{kj}^3\delta_{j2}).$$

扩充到一般的一次规范(包括 R_ξ 规范), 可写成

$$C^{Aa} = F_i^{Aa}A_i + c_k^{Aa}s_k + c_k^{Aa+}s_k^+,$$
$$C^B = F_\mu^B B_\mu + c_k^B s_k + c_k^{B+}s_k^+. \tag{4'}$$

由于已扩充到更一般的情况,不限于 $SU(2)$, 故 a 不限于 $a = 1, 2, 3$.

规范变换为

$$A_\alpha^a \to A_\alpha^{a\prime} = A_\alpha^a - \frac{1}{g}(\partial_\alpha\theta^a - gf_{abc}\theta^b A_\alpha^c),$$

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\theta,$$

还有

$$s_l \to s_l' = s_l + \left(-\frac{i}{2}\tilde{\tau}^a_{lm}\theta^a - \frac{i}{2}\theta\delta_{lm}\right)s_m,$$

$$s_l^+ \to s_l^{+\prime} = s_l^+ + s_m^+\left(\theta^a\tilde{\tau}^a_{ml}\frac{i}{2} + \delta_{ml}\theta\frac{i}{2}\right).$$

写成简化的泛函形式，并取 $\theta^a = g\lambda^a$, $\theta = g'\lambda$, 则有

$$\begin{aligned}
&A_i \to A_i' = A_i + (\Delta_i^{Ab} + gt^b_{ik}A_k)\lambda^b,\\
&B_\mu \to B_\mu' = B_\mu + \Delta^B_\mu\lambda,\\
&s_l \to s_l' = s_l - \frac{i}{2}(g\tau^a_{lm}\lambda^a s_m + g'\lambda s_l),\\
&s_l^+ \to s_l^{+\prime} = s_l^+ + \frac{i}{2}(gs_m^+\tau^a_{ml}\lambda_a + g's_l^+\lambda).
\end{aligned} \tag{5}$$

简化符号的内容为（α, β 是时空指标；a, b, c 是非 Abel 子群的群指标；l, m 是非 Abel 子群的群表示的指标）

$$A_i = A^a_\alpha, \qquad \Delta_i^{Ab} = -\partial_\alpha\delta^4(x_i - x_j)\delta_{ab},$$

上式左边的 i 包括右边的 a, α, x_i; 左边的 b 包括右边的 b, x_j.

$$t^b_{ik} = f_{abc}\delta^4(x_i - x_k)\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\alpha\beta},$$

上式左边的 i 包括右边的 a, α, x_i; 左边的 k 包括右边的 c, β, x_k; 左边的 b 包括右边的 b, x_j.

相仿有

$$\Delta^B_\mu = -\partial_\alpha\delta^4(x_i - x_j), \quad \tau^a_{lm} = \tilde{\tau}^a_{lm}\delta^4(x_i - x_k)\delta^4(x_i - x_j).$$

和文献 [7] 一样，有如下关系：

$$\begin{aligned}
&[t^a, t^b] = f_{abc}t^c,\\
&t^a_{ik}\Delta_k^{Ab} - t^b_{ik}\Delta_k^{Aa} = f_{abc}\Delta_i^{Ac},\\
&\left[-\frac{i}{2}\tau^a, -\frac{i}{2}\tau^b\right] = f_{abc}\left(-\frac{i}{2}\tau^c\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

对于 Abel 子群，由于结构常数为零，不出现这种关系. 现在，由 (4) 和 (5) 式有

$$\begin{aligned}
-M^A_{ab} &= \frac{\delta c^{Aa}}{\delta\lambda^b} = F_i^{Aa}(\Delta_i^{Ab} + gt^b_{ij}A_j) + c_l^{Aa}\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_k\right) + c_l^{Aa+}\left(\frac{i}{2}gs_k^+\tau^b_{kl}\right),\\
-M^A_{a0} &= \frac{\delta c^{Aa}}{\delta\lambda} = c_l^{Aa}\left(-\frac{i}{2}g's_l\right) + c_l^{Aa+}\left(\frac{i}{2}g's_l^+\right),\\
-M^B_{00} &= \frac{\delta c^B}{\delta\lambda} = F^B_\mu\Delta^B_\mu + c_l^B\left(-\frac{i}{2}g's_l\right) + c_l^{B+}\left(\frac{i}{2}g's_l^+\right),\\
-M^B_{0b} &= \frac{\delta c^B}{\delta\lambda^b} = c_l^B\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_k\right) + c_l^{B+}\left(\frac{i}{2}gs_k^+\tau^b_{kl}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

要取两组 F–P 场：一组 $\bar{u}_a$, u_b 与非 Abel 子群相对应；一组 $\bar{u}$, u 与 Abel 子群相对应. 规范补偿项应为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\text{F-P}} &= \bar{u}_aM^A_{ab}u_b + \bar{u}_aM^A_{a0}u + \bar{u}M^B_{00}u + \bar{u}M^B_{0b}u_b\\
&= -\bar{u}_aF_i^{Aa}(\Delta_i^{Ab} + gt^b_{ij}A_j)u_b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-c_l^{Aa}\bar{u}_a\left(-\frac{i}{2}g\tau_{lk}^b s_k\right)u_b - c_l^{Aa+}\bar{u}_a\left(\frac{i}{2}gs_k^+\tau_{kl}^b\right)u_b - \bar{u}F_\mu^B\Delta_\mu^B u \\
&-c_l^B\bar{u}\left(-\frac{i}{2}g's_l\right)u - c_l^{B+}\bar{u}\left(\frac{i}{2}g's_l^+\right)u \\
&-c_l^{Aa}\bar{u}_a\left(-\frac{i}{2}g's_l\right)u - c_l^{Aa+}\bar{u}_a\left(\frac{i}{2}g's_l^+\right)u \\
&-c_l^B\bar{u}\left(-\frac{i}{2}g\tau_{lk}^b s_k\right)u_b - c_l^{B+}\bar{u}\left(\frac{i}{2}gs_k^+\tau_{kl}^b\right)u_b.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

于是取

$$
\begin{aligned}
s^R = &\mathscr{L}_{\text{inv}}[A_i] + \mathscr{L}_{\text{inv}}[B_\mu] - \frac{1}{2}(Ds_a)^2 - \Lambda V(s^+s) \\
&-\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2 - \frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2 \\
&+(K_i^A - F_i^{Aa}\bar{u}_a)(\Delta_i^{Ab} + gt_{ij}^b A_j)u_b + (K_\mu^B - F_\mu^B\bar{u})\Delta_\mu^B u \\
&+(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(-\frac{i}{2}g\tau_{lk}^b s_k u_b - \frac{i}{2}g's_l u\right) \\
&+(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}gs_k^+\tau_{kl}^b u_b + \frac{i}{2}g's_l^+ u\right) \\
&+\frac{1}{2}gL_a f_{abc}u_b u_c,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中 K_i^A, K_μ^B, K_l^s, K_l^{s+}, $\bar{u}_a$, u_a, $\bar{u}$, u 是互相反对易的．此时，B.R.S. 变换应取为（$\delta\lambda$ 也是与 K, $\bar{u}$, $u\cdots$ 反对易）

$$
\begin{aligned}
&\delta A_i = (\Delta_i^{Ab} + gt_{ij}^b A_j)u_b\delta\lambda, \qquad \delta B_\mu = (\Delta_\mu^B u)\delta\lambda, \\
&\delta s_l = -\frac{i}{2}(g\tau_{lk}^b s_k u_b + g's_l u)\delta\lambda, \\
&\delta s_l^+ = \frac{i}{2}(gs_k^+\tau_{kl}^b u_b + g's_l^+ u)\delta\lambda, \\
&\delta u_a = -\frac{1}{2}gf_{abc}u_b u_c\delta\lambda, \\
&\delta\bar{u}_a = \xi_A(F_i^{Aa}A_i + c_k^{Aa}s_k + c_k^{Aa+}s_k^+)\delta\lambda, \\
&\delta u = 0 \\
&\delta\bar{u} = \xi_B(F_\mu^B B_\mu + c_k^B s_k + c_k^{B+}s_k^+)\delta\lambda.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

同样经过计算可以知道，(9)式的 S^R 在 (10) 式的 B.R.S. 变换下是不变的．从而可得到 S^R 所满足的 Slavnov 恒等式

$$
\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_i^A}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta A_i} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_\mu^B}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta B_\mu} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^s}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l^+} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta u_a} = 0,
\tag{11a}
$$

$$
-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_i^A} - c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^s} - c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta\bar{u}_a} = 0,
\tag{11b}
$$

$$
-F_\mu^B\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_\mu^B} - c_l^B\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^s} - c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta\bar{u}} = 0,
\tag{11c}
$$

$$\tilde{S}^R = S^R + \frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2 + \frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2. \tag{11d}$$

用S^R来求(微扰)顶角生成泛函 Γ，由于在 B.R.S. 变换下，体积元 $d(A_i)d(B_\mu)d(\bar{u}_a)d(u_a)\cdot d(\bar{u})d(u)$不变，所以又可得 Γ 的 Slavnov 恒等式

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i^A}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta A_i} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_\mu^B}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta B_\mu} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^s}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta s_l} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta s_l^+} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta u_a} = 0, \tag{12a}$$

$$-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i^A} - c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^s} - c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{u}_a} = 0, \tag{12b}$$

$$-F_\mu^B\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_\mu^B} - c_l^B\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^s} - c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{u}} = 0, \tag{12c}$$

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma + \frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2 + \frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2. \tag{12d}$$

(11a) 和 (12a) 式又可简写成

$$\tilde{S}^R * \tilde{S}^R = 0, \qquad \tilde{\Gamma} * \tilde{\Gamma} = 0.$$

三

对应于 Slavnov 恒等式 (11), (12) 可定义算子

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1, \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_0 &= \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_i^A}\frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_\mu^B}\frac{\delta}{\delta B_\mu} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^s}\frac{\delta}{\delta s_l} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta}{\delta s_l^+} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta L_a}\frac{\delta}{\delta u_a} \\ &= (\Delta_i^{Ab} + g t_{ij}^b A_j)u_b\frac{\delta}{\delta A_i} + \Delta_\mu^B u\frac{\delta}{\delta B_\mu} \\ &\quad + \left(-\frac{i}{2}g\tau_{lk}^b s_k u_b - \frac{i}{2}g' s_l u\right)\frac{\delta}{\delta s_l} \\ &\quad + \left(\frac{i}{2}g s_k^+\tau_{kl}^b u_b + \frac{i}{2}g' s_l^+ u\right)\frac{\delta}{\delta s_l^+} + \frac{1}{2}g f_{abc}u_b u_c\frac{\delta}{\delta u_a},\end{aligned} \tag{13b}$$

$$\mathscr{G}_1 = \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i^A} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta B_\mu}\frac{\delta}{\delta K_\mu^B} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l}\frac{\delta}{\delta K_l^s} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l^+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}} + \frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta u_a}\frac{\delta}{\delta L_a}. \tag{13c}$$

它们也满足

$$\mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_0 = 0, \qquad \mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_1\cdot\mathscr{G}_0 = 0,$$

故

$$\mathscr{G}\cdot\mathscr{G} = 0. \tag{14}$$

(这里并没有 $\frac{\delta}{\delta u}$，所以和文献 [7] 的情况类似，只是在 $\mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_0$ 中多出来一些含 u 的项，但又总是以 $u_a u + u u_a (=0)$ 和 $uu(=0)$ 的形式出现，所以也消去.)

现在就可以来做归纳法证明. 假定：重正化已经做到 n 圈. 重正化到 n 圈的裸的 $\tilde{S}^0$ 记作 $\tilde{S}_n^0$ (相当于文献 [6] 中的 S_n^B)，它严格满足

$$\tilde{S}_n^0 * \tilde{S}_n^0 = 0,$$

$$
-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_i^A}-c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_l^s}-c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta\bar{u}_a}=0,
$$

$$
-F_\mu^B\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_\mu^B}-c_l^B\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_l^s}-c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{S}_n^0}{\delta\bar{u}}=0. \tag{15}
$$

第一式意味着 $\tilde{S}_n^0$ 在重正化到 n 圈的 B.R.S. 变换下不变(我们知道,$n=0$ 时本来就是满足的,$\tilde{S}_{n=0}^0=\tilde{S}^R$). 重正化到 n 圈的 B.R.S. 变换是($\delta\lambda$,四个 K 和 $\bar{u}_a$, u_a, $\bar{u}$, u 都互相反对易):

$$
\begin{aligned}
&\delta A_i=\frac{\delta S_n^0}{\delta K_i^A}\delta\lambda, \qquad \delta B_\mu=\frac{\delta S_n^0}{\delta K_\mu^B}\delta\lambda,\\
&\delta s_l=\frac{\delta S_n^0}{\delta K_l^s}\delta\lambda, \qquad \delta s_l^+=\frac{\delta S_n^0}{\delta K_l^{s+}}\delta\lambda,\\
&\delta u_a=-\frac{\delta S_n^0}{\delta L_a}\delta\lambda, \qquad \delta\bar{u}_a=\xi_A C^{Aa}\delta\lambda,\\
&\delta u=0, \qquad \delta\bar{u}=\xi_B C^B\delta\lambda.
\end{aligned} \tag{16}
$$

由于 S_n^0 在(16)式的 B.R.S. 变换下不变,用它代替 S^R 算出的 $\tilde{\Gamma}$ 必定也满足 Slavnov 恒等式.(有一个前提,泛函积分体积元在(16)式的 B.R.S. 变换下不变. 后面将看到,把 S_n^0, S_{n+1}^0, $\cdots$ 做出来, Jacobian 的对角线之和仍保持为零,所以满足体积元不变). 即

$$
\tilde{\Gamma}*\tilde{\Gamma}=0,
$$

$$
-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i^A}-c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^s}-c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{u}_a}=0,
$$

$$
-F_\mu^B\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_\mu^B}-c_l^B\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^s}-c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{u}}=0. \tag{17}
$$

这里把 $\tilde{\Gamma}$ 按圈数展开$\left(\text{一开头用 }\dfrac{1}{\eta}S^R\text{ 代替 }S^R\right)$:

$$
\tilde{\Gamma}=\sum_{i=0}^{\infty}\eta^i\tilde{\Gamma}_i. \tag{18}
$$

根据归纳法证明的前提,$\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$, $\cdots$, $\tilde{\Gamma}_n$ 是有限的,$\tilde{\Gamma}_{n+1}$ 开始有发散. 这发散是 $n+1$ 圈的总体发散,子圈(少于 $n+1$ 圈)的发散都已消除. 按照文献[5]的讨论,把 $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ 的发散部分写作 $\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)$,则它必须满足

$$
\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)*\tilde{S}^R+\tilde{S}^R*\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)=(\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1)\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)=0,
$$

$$
\left(-F_i^{Aa}\frac{\delta}{\delta K_i^A}-c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta K_l^s}-c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)=0,
$$

$$
\left(-F_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}-c_l^B\frac{\delta}{\delta K_l^s}-c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)=0. \tag{19}
$$

现在要消除这个发散,所以必须找出满足(19)式的 $\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(S_n^0)$ 的完全解.

我们注意到这些 Slavnov 恒等式中,以及在 $\mathscr{G}_0$ 和 $\mathscr{G}_1$ 中,都没有 $\delta/\delta u$,因此不妨把解分成三类: 第一类不含 F-P 场; 第二类含有 u_a 以及 $\bar{u}_a$(也可同时含有 u 以及 $\bar{u}$); 第三类含有 u, 但不含 u_a. 对于前两类的解, Joglekar 和 Lee 的证明[8]仍可适用. 就是说, 不含

F-P 场的和含有 u_a 以及 $\bar{u}_a$ 的定域完全解应具有如下形式：

$$G[A, B, s, s^+] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A, B, s, s^+, \bar{u}_a, u_a, \bar{u}, K, L]. \tag{20}$$

(20) 式虽也包括第三类解（见 (30) 式的 F），但不是全部的第三类解．所以我们后面还要讨论第三类的完全解． 现在先来看 $G[A, B, s, s^+]$，它必须是规范不变的泛函． 由于 $\tilde{\Gamma}$ 是量纲为 4 的定域泛函，而这里量纲为 4 的定域规范不变的泛函只有 $\mathscr{L}_{\text{inv}}[A_i]$，$\mathscr{L}_{\text{inv}}[B_\mu]$，$-\dfrac{1}{2}|Ds_a|^2$，$V(s^+s)$ 四种，所以 $G[A,B,s,s^+]$ 的一般形式为

$$G[A,B,s,s^+] = \alpha(\epsilon)\mathscr{L}_{\text{inv}}[A_i] + \alpha'(\epsilon)\mathscr{L}_{\text{inv}}[B_\mu] - \alpha''(\epsilon)\left(\frac{1}{2}|Ds_a|^2\right) - \zeta(\epsilon)V(s^+s). \tag{21}$$

(用最小重正化，$\epsilon = n - 4$.)

再看 $\mathscr{G}\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$ 就是 (13a) 式的算子，而 $\mathscr{F}$ 要满足以下几个条件：

a) $\mathscr{G}$ 的 F-P 荷是 $+1$，$\tilde{\Gamma}$ 的 F-P 荷是零，所以 $\mathscr{F}$ 的 F-P 荷应是 -1. (L_a: -2; K, $\bar{u}_a$, $\bar{u}$: -1; A, B, s: 0; u_a, u: $+1$).

b) $\mathscr{G}$ 的量纲是 $+1$，$\tilde{\Gamma}$ 的量纲是 4，所以 $\mathscr{F}$ 的量纲应是 3. (K, L_a: $+2$; C^{Aa}, C^{Aa+}, C^B, C^{B+}: $+1$.)

c) $\mathscr{G}$ 的指标是全部收缩了的，$\tilde{\Gamma}$ 的指标也是全部收缩了的，所以 $\mathscr{F}$ 的指标全部要收缩掉．

根据以上三条件，$\mathscr{F}$ 中含 K, L_a 的项只有 $K_i^A A_i$，$K_\mu^B B_\mu$，$K_l^s s_l$，$K_l^{s+} s_l^+$，$K_l^s(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + e c_l^{B+})$，$K_l^{s+}(d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B)$，$L_a u_a$ 共七种形式． $\mathscr{F}$ 中没有既含 K (或 L_a) 又含 u 的项，因为做不成满足上述三条件的这样的项． $K_i^A t_{ij}^b t_{jk}^b A_k$ 因 $t_{ij}^b t_{jk}^b \sim C(G)\delta_{ik}$，又回到 $K_i^A A_i$． $K_l^s \tau_{lm}^b \tau_{mk}^b s_k$ 因 $\tau_{lm}^b \tau_{mk}^b \sim C(R)\delta_{lk}$，又回到 $K_l^s s_l$．$\cdots$，又由于传播子 $\overbrace{s_k^+ s_k^+} = 0$，$\overbrace{s_k s_k} = 0$，$\overbrace{s_k s_k^+} \neq 0$，所以排除了含 $K_l^s s_l^+$ 和 $K_l^{s+} s_l$ 的项．

d) 由于 Slavnov 方程 (19) 的后两个，要求 $K_i^A A_i$，$K_\mu^B B_\mu$，$K_l^s s_l$，$K_l^{s+} s_l^+$ 以如下形式与 $\bar{u}_a$，$\bar{u}$ 共同出现：

$$(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})A_i, \tag{22}$$

$$(K_\mu^B - \bar{u} F_\mu^B)B_\mu, \tag{23}$$

$$(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})s_l, \tag{24}$$

$$(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})s_l^+. \tag{25}$$

此外，满足 a), b), c), d) 的含 K_l^s，K_l^{s+} 的项还有

$$(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + e c_l^{B+}), \tag{26}$$

$$(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})(d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B). \tag{27}$$

从微扰论看到，d^{b+}，d^b 是群协变常数，e^+，e 是常数． 而 K_l^s 只与 c_m^{Ab+}，c_l^{B+} 相乘，K_l^{s+} 只与 c_m^{Ab}，c_l^B 相乘，也是由于传播子 $\overbrace{s_l s_l^+} \neq 0$，$\overbrace{s_l s_l} = \overbrace{s_l^+ s_l^+} = 0$．

含 L_a 的项不受条件 d) 的影响，仍是

$$L_a u_a. \tag{28}$$

把 $\mathscr{G}$ 作用在 (22)，(24) 至 (28) 式上，正如上述，得到的是全部第二类解（含 u_a 以及

$\bar{u}_a$，也可以同时含 u 以及 $\bar{u}$)。

把 $\mathscr{G}$ 作用在(23)式上得到的是含 B_μ 的第三类解。但上面提到，(20)式不包括全部第三类解(也即在有 Abel 子群时，Joglekar 和 Lee 的解并不完全)。所以我们要用另外的方法来找第三类的完全解。

首先，从 S^R 做微扰可以看到，$\tilde{\Gamma}$ 中必定有一项 $\sim \bar{u}F_\mu^B\Delta_\mu^B u$(即 $\bar{u}u$ 自能项)。根据 Slavnov 恒等式(19)的第三式，$\tilde{\Gamma}$ 中的这一项应有如下形式：

$$\sim (K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u.$$

同时，自 $c_l^B\bar{u}s_l u$ 出发做微扰，$\tilde{\Gamma}$ 中必定有 $\sim c_l^B\bar{u}s_l u$ 的项(重正化的 $\bar{u}s_l u$ 顶点)。根据(19)式的后两式，这一项应有如下形式：

$$\sim (K_l^s - c^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})s_l u.$$

同理还有如下的项：

$$\sim (K_l^{s+} - c^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})s_l^+ u.$$

对于这些项，$\mathscr{G}$ 作用上去后得到

$$\mathscr{G}(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u = \frac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u,$$

$$\mathscr{G}\left[(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(\frac{-i}{2}\right)g's_l u + (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}\right)g's_l^+ u\right]$$

$$= \frac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta s_l}\left(\frac{-i}{2}g's_l u\right) + \frac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta s_l^+}\left(\frac{i}{2}g's_l^+ u\right).$$

所以由于 $\mathscr{L}'_{\text{inv}}$ 在 $v(1)$ 规范变换下不变，$\mathscr{G}$ 作用在

$$u\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta u} = (K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u + (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(\frac{-i}{2}\right)g's_l u + (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}\right)g's_l^+ u \tag{29}$$

上得零。可见(29)式也是一个解，而且是第三类的解。它不能写成(20)式的形式。

还可以说明，$\mathscr{G}\times$(23)式是第三类的含 B_μ 的唯一的解；(29)式是第三类的不含 B_μ 的唯一的解。关于前者，因为只有 $\mathscr{G}\dfrac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu}B_\mu = \dfrac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u$ 可与

$$\mathscr{G}(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu)\Delta_\mu^B u = \frac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u$$

抵消，B_μ 的别的泛函做不到这一点，所以我们看到

$$\mathscr{G}\times(23) = \frac{\delta\mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu}B_\mu - (K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u$$

是第三类含 B_μ 的唯一的解[1)]。关于后者，因为 u 的 F-P 荷为 $+1$，它在 $\tilde{\Gamma}$ 中出现时，必定只能是 $K_\mu^B u$，$K_l^s u$，$K_l^{s+}u$，$\bar{u}u$，$\bar{u}_a u$ 以及 $L_a u_a u$ 等结合的形式。$\tilde{\Gamma}$ 的量纲是 4。$L_a u_a u$ 的量纲虽

1) 参看下面(30)式的 F.

然是 4，但应排除，因从 $L_a f_{abc} u_b u_c$ 出发做微扰得不到 $L_a u_a \cdots$ 形式. 量纲为 4 的 $\bar{u}u\bar{u}u$, $\bar{u}_a u \bar{u}_a u$ 也应排除，因为 $uu = 0$, $\bar{u}_a \bar{u}_a = 0$. 事实上，按照 (19) 式的第二、三式，$\bar{u}_a u_b \bar{u} u$ 的出现只能以 $(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})u_a$, $(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})u_a$ 或 $(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})u_b$ 乘上 $(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})u$, $(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})u$ 或 $(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})u$ 的形式. 这样一来，量纲超过了 4，所以也要排除(这里是没有真空自发破缺的微扰，出不了带质量量纲的在分母上的常数). 于是，满足 Slavnov 方程 (19) 的第二、三式，F-P 荷为零，量纲为 4，与微扰一致的，指标全都收缩掉的，不含 B_μ，不含 u_a 而含有 u 的解只能有以下三种组合(A_i 的指标不同，进不去):

$$\sim (K_\mu^B - \bar{u} F_\mu^B)\Delta_\mu^B u,$$
$$\sim (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u}) s_l u,$$
$$\sim (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u}) s_l^+ u.$$

(不出现 $K_l^s s_l^+$, $K_l^{s+} s_l$ 的原因前已说过)然后，还要满足 Slavnov 方程 (19) 的第一式，则上述三项必须进一步组合成 (29) 式的形式，不能是别的形式. 所以，(29) 式是第三类的不含 B_μ 的唯一的解.

四

上面找到了满足 $\tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\operatorname{div}}(S_n^0)$ 全部条件的所有的独立解，它们是(自 (21) 到 (29) 式)

$$A = \mathscr{L}_{\text{inv}}[A_i], \qquad B = \mathscr{L}_{\text{inv}}[B_\mu],$$

$$C = -\frac{1}{2}|Ds_a|^2, \qquad D = V(s^+ s),$$

$$E = \mathscr{G}(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})A_i$$
$$= \frac{\delta \mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta A_i} A_i - (K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})\Delta_i^{Ab} u_b,$$

$$F = \mathscr{G}(K_\mu^B - \bar{u} F_\mu^B) B_\mu = \frac{\delta \mathscr{L}'_{\text{inv}}}{\delta B_\mu} B_\mu - (K_\mu^B - \bar{u} F_\mu^B)\Delta_\mu^B u,$$

$$G = \mathscr{G}(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u}) s_l$$
$$= \frac{\delta \tilde{S}^R}{\delta s_l} s_l - (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lk}^b s_k u_b - \frac{i}{2} g' s_l u\right),$$

$$H = \mathscr{G}(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u}) s_l^+$$
$$= \frac{\delta \tilde{S}^R}{\delta s_l^+} s_l^+ - (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2} g s_k^+ \tau_{kl}^b u_b + \frac{i}{2} g' s_l^+ u\right),$$

$$I = \mathscr{G}(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + e c_l^{B+})$$
$$= \frac{\delta \tilde{S}^R}{\delta s_l}(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + e c_l^{B+}),$$

$$J = \mathscr{G}(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})(d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B)$$
$$= \frac{\delta \tilde{S}^R}{\delta s_l^+}(d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B),$$

$$K=-\mathscr{G}(L_a u_a)=-\frac{g}{2}L_a f_{abc}u_b u_c-\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta u_a}u_a,$$

$$L=u\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta u}. \tag{30}$$

为了方便,可以把这十二个独立的解重新组合一下:

$$A-K=\frac{A_i}{2}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta A_i}-\frac{g}{2}\frac{\partial\tilde{S}^R}{\partial g}+\frac{L_a}{2}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta L_a}-\frac{1}{2}\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\tilde{S}^R$$
$$+\frac{1}{2}c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta c_l^{Aa}}+\frac{1}{2}c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta c_l^{Aa+}}. \tag{31a}$$

(凡是 gA_i 组合出现的情况, $\frac{A_i}{2}\frac{\delta}{\delta A_i}-\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial g}$ 作用上去都为零)

$$B-L=\frac{B_\mu}{2}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta B_\mu}-\frac{g'}{2}\frac{\partial\tilde{S}^R}{\partial g'}-\frac{1}{2}\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\tilde{S}^R$$
$$+\frac{1}{2}c_l^B\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta c_l^B}+\frac{1}{2}c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta c_l^{B+}}. \tag{31b}$$

(凡是 $g'B_\mu$ 组合出现的情况, $\frac{B_\mu}{2}\frac{\delta}{\delta B_\mu}-\frac{g'}{2}\frac{\partial}{\partial g'}$ 作用上去都为零.)

$$C+2D=\frac{s_a}{2}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_a}+\frac{s_a^+}{2}\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_a^+}-\frac{1}{2}\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}}+c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}\right)\tilde{S}^R$$
$$-\frac{1}{2}\left(K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}+c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c^{B+}}\right)\tilde{S}^R, \tag{31c}$$

$$D=V(s^+s), \tag{31d}$$

$$-E+K=-A_i\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta A_i}+\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\tilde{S}^R$$
$$-\left(c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}}+c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}\right)\tilde{S}^R-L_a\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta L_a}, \tag{31e}$$

$$-F+L=-B_\mu\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta B_\mu}+\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\tilde{S}^R$$
$$-\left(c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\right)\tilde{S}^R, \tag{31f}$$

$$-G=\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}}+c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}-s_l\frac{\delta}{\delta s_l}\right)\tilde{S}^R, \tag{31g}$$

$$-H=\left(K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}+c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}-s_l^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}\right)\tilde{S}^R, \tag{31h}$$

$$I=(d_{lm}^b c_m^{Ab+}+ec_l^{B+})\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l}, \tag{31i}$$

$$J=(d_{ml}^{b+}c_m^{Ab}+e^+c_l^B)\frac{\delta\tilde{S}^R}{\delta s_l^+}, \tag{31j}$$

$$K+L=\frac{1}{2}\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}+K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right.$$

$$+ K_l^s \frac{\delta}{\delta K_l^s} + K_l^{s+} \frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}\Big) \tilde{S}^R, \tag{31k}$$

$$L = u \frac{\delta \tilde{S}^R}{\delta u}. \tag{31l}$$

所以，$\tilde{\Gamma} \underset{(n+1)}{\mathrm{div}} (S_n^0)$ 的一般形式为

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma} \underset{(n+1)}{\mathrm{div}} (S_n^0) &= \alpha(\epsilon)(31\mathrm{a}) + \alpha'(\epsilon)(31\mathrm{b}) + \alpha''(\epsilon)(31\mathrm{c}) + \zeta(\epsilon)(31\mathrm{d}) \\
&\quad + \beta(\epsilon)(31\mathrm{e}) + \beta'(\epsilon)(31\mathrm{f}) + \beta_1''(\epsilon)(31\mathrm{g}) \\
&\quad + \beta_2''(\epsilon)(31\mathrm{h}) + \delta_1(\epsilon)(31\mathrm{i}) + \delta_2(\epsilon)(31\mathrm{j}) \\
&\quad - \gamma(\epsilon)(31\mathrm{k}) + \eta(\epsilon)(31\mathrm{l})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \Big[& \Big(\frac{\alpha(\epsilon)}{2} - \beta(\epsilon)\Big)\Big(A_i \frac{\delta}{\delta A_i} + L_a \frac{\delta}{\delta L_a}\Big) + \Big(\frac{\alpha'(\epsilon)}{2} - \beta'(\epsilon)\Big) B_\mu \frac{\delta}{\delta B_\mu} \\
& + \Big(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2} - \beta''(\epsilon)\Big)\Big(s_l \frac{\delta}{\delta s_l} + s_l^+ \frac{\delta}{\delta s_l^+}\Big) - \frac{\alpha(\epsilon)}{2} g \frac{\partial}{\partial g} - \frac{\alpha'(\epsilon)}{2} g' \frac{\partial}{\partial g'} \\
& + \Big(-\frac{\alpha(\epsilon)}{2} + \beta(\epsilon) - \frac{\gamma(\epsilon)}{2}\Big)\Big(K_i^A \frac{\delta}{\delta K_i^A} + u_a \frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta \bar{u}_a}\Big) \\
& + \Big(-\frac{\alpha'(\epsilon)}{2} + \beta'(\epsilon) - \frac{\gamma(\epsilon)}{2}\Big)\Big(K_\mu^B \frac{\delta}{\delta K_\mu^B} + u \frac{\delta}{\delta u} + \bar{u} \frac{\delta}{\delta \bar{u}}\Big) \\
& + \Big(-\Big(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2} - \beta''(\epsilon)\Big) + \Big(-\frac{\alpha(\epsilon)}{2} + \beta(\epsilon) - \frac{\gamma(\epsilon)}{2}\Big) \\
& + \Big(\frac{\alpha(\epsilon)}{2} - \beta(\epsilon)\Big)\Big) \cdot \Big(K_l^s \frac{\delta}{\delta K_l^s} + K_l^{s+} \frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}\Big) \\
& + \Big(\Big(\frac{\alpha(\epsilon)}{2} - \beta(\epsilon)\Big) - \Big(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2} - \beta''(\epsilon)\Big)\Big) \cdot \Big(c_l^{Aa} \frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}} + c_l^{Aa+} \frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}\Big) \\
& + \Big(\Big(\frac{\alpha'(\epsilon)}{2} - \beta'(\epsilon)\Big) - \Big(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2} - \beta''(\epsilon)\Big)\Big) \cdot \Big(c_l^B \frac{\delta}{\delta c_l^B} + c_l^{B+} \frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\Big) \\
& - v_{l(n+1)} \frac{\delta}{\delta s_l} - v_{l(n+1)}^+ \frac{\delta}{\delta s_l^+}\Big] \tilde{S}^R + \zeta(\epsilon) V(s^+ s).
\end{aligned} \tag{32}$$

说明一下:

(a) 由于 $u, \bar{u}$ 的重正化常数 $\tilde{Z}_3'$ 是共同的,所以应取 $\eta(\epsilon) = 0$.

(b) 由于 s_l, s_l^+ 的重整化常数 Z_s 是共同的(即 $\overline{s_l s_l^+}$ 传播子的 Z_s),所以应取

$$\beta_1''(\epsilon) = \beta_2''(\epsilon) = \beta''(\epsilon).$$

(c) $\zeta(\epsilon) V(s^+ s)$ 可通过(2)式中 Λ 的重正而消去(例如取 $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + \eta^{n+1}\zeta(\epsilon)$),有独立的 Z_Λ.

(d)
$$\begin{aligned}
v_{l(n+1)} &= -(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + e c_l^{B+})\delta_1(\epsilon), \\
v_{l(n+1)}^+ &= -(d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B)\delta_2(\epsilon).
\end{aligned} \tag{33a}$$

取

$$\begin{aligned}
s_{l(n+1)}^0 &= (Z_s)_{n+1}^{1/2}(\bar{s}_l + (v_l)_{n+1}), \\
s_{l(n)}^0 &= (Z_s)_n^{1/2}(\bar{s}_l + (v_l)_n),
\end{aligned} \tag{33b}$$

其中

$$(Z_s)_i = 1 + \eta z_{s(1)} + \eta^2 z_{s(2)} + \cdots + \eta^i z_{s(i)},$$

$$(v_l)_i = v_{l(0)} + \eta v_{l(1)} + \eta^2 v_{l(2)} + \cdots + \eta^i v_{l(i)}. \tag{33c}$$

此地零级没有自发破缺，$v_{l(0)}=0$. $v_{l(1)},\cdots,v_{l(n)},v_{l(n+1)}$ 是规范有关的(与 c_l^{Ab}, c_l^B, c_l^{Ab+}, c_l^{B+} 有关)蝌蚪图抵消项,在重正化中可以去掉,见下面:

$$\begin{aligned} s^0_{l(n+1)} - s^0_{l(n)} &= ((Z_s)^{1/2}_{n+1}(\bar{s}_l + (v_l)_{n+1}) - (Z_s)^{1/2}_n(\bar{s}_l + (v_l)_n)) \\ &= \left(\left(1 + \frac{\eta^{n+1} z_{s(n+1)}}{1 + \eta z_{s(1)} + \cdots \eta^n z_{s(n)}}\right)^{1/2} - 1\right)(Z_s)^{1/2}_n \bar{s}_l \\ &\quad + \left(\left(1 + \frac{\eta^{n+1} z_{s(n+1)}}{1 + \eta z_{s(1)} + \cdots + \eta^n z_{s(n)}}\right)^{1/2} (\eta v_{l(1)} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \eta^{n+1} v_{l(n+1)}) - (\eta v_{l(1)} + \cdots + \eta^n v_{l(n)})\right)(Z_s)^{1/2}_n \\ &= \frac{1}{2}\eta^{n+1} z_{s(n+1)} \bar{s}_l + \eta^{n+1} v_{l(n+1)} + o(\eta^{n+2}). \end{aligned} \tag{34a}$$

同样有

$$s^{+0}_{l(n+1)} - s^{+0}_{l(n)} = \frac{1}{2}\eta^{n+1} z_{s(n+1)} \bar{s}^+_l + \eta^{n+1} v^+_{l(n+1)} + o(\eta^{n+2}). \tag{34b}$$

再取

$$A^0_{i(n)} = (Z_3)^{1/2}_n A_i, \quad u^0_{a(n)} = (\tilde{Z}_3)^{1/2}_n u_a, \quad \bar{u}^0_{a(n)} = (\tilde{Z}_3)^{1/2}_n \bar{u}_a,$$

$$B^0_{\mu(n)} = (Z'_3)^{1/2}_n B_\mu, \quad u^0_{(n)} = (\tilde{Z}'_3)^{1/2}_n u, \quad \bar{u}^0_{(n)} = (\tilde{Z}'_3)^{1/2}_n \bar{u}. \tag{34c}$$

每个 $(Z)_n$ 都是如下展开:

$$(Z)_n = 1 + \eta z_{(1)} + \cdots + \eta^n z_{(n)}. \tag{34d}$$

从而有

$$A^0_{i(n+1)} - A^0_{i(n)} = \frac{1}{2}\eta^{n+1} z_{3(n+1)} A_i + o(\eta^{n+2})$$

等等．还可以取(省去( )$_n$ 符号)

$$g^0 = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} g, \quad g'^0 = \frac{\tilde{Z}'_1}{\tilde{Z}'_3 Z_3'^{1/2}} g', \quad \xi^0_A = \frac{\xi_A}{Z_3}, \quad \xi^0_B = \frac{\xi_B}{Z'_3},$$

$$K_i^{A^0} = (\tilde{Z}_3)^{1/2} K_i^A, \quad K_\mu^{B^0} = (\tilde{Z}'_3)^{1/2} K_\mu^B, \quad L_a^0 = (Z_3)^{1/2} L_a,$$

$$K_l^{s^0} = \frac{\tilde{Z}_3^{1/2} Z_3^{1/2}}{Z_s^{1/2}} K_l^s = \frac{\tilde{Z}_3'^{1/2} Z_3'^{1/2}}{Z_s^{1/2}} K_l^s,$$

$$K_l^{s+^0} = \frac{\tilde{Z}_3^{1/2} Z_3^{1/2}}{Z_s^{1/2}}, \quad K_l^{s+} = \frac{\tilde{Z}_3'^{1/2} Z_3'^{1/2}}{Z_s^{1/2}} K_l^{s+},$$

$$c_l^{Aa^0} = \frac{Z_3^{1/2}}{Z_s^{1/2}} c_l^{Aa}, \quad c_l^{B^0} = \frac{Z_3'^{1/2}}{Z_s^{1/2}} c_l^B,$$

$$c_l^{Aa+^0} = \frac{Z_3^{1/2}}{Z_s^{1/2}} c_l^{Aa+}, \quad c_l^{B+^0} = \frac{Z_3'^{1/2}}{Z_s^{1/2}} c_l^{B+}. \tag{34e}$$

同时,对照(32)式,给定各个 $z_{(n+1)}$ 如下:

$$\frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon)=-\frac{z_{3(n+1)}}{2},\quad -\frac{\alpha(\epsilon)}{2}+\beta(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}=-\frac{\tilde{z}_{3(n+1)}}{2},$$
$$\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}-\beta'(\epsilon)=-\frac{z'_{3(n+1)}}{2},\quad -\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}+\beta'(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}=-\frac{\tilde{z}'_{3(n+1)}}{2},$$
$$\frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)=-\frac{z_{s(n+1)}}{2},$$
$$-\frac{\alpha(\epsilon)}{2}=-\left(\tilde{z}_{1(n+1)}-\tilde{z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)}\right),$$
$$-\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}=-\left(\tilde{z}'_{1(n+1)}-\tilde{z}'_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z'_{3(n+1)}\right). \tag{35}$$

我们把 S^R 中的 $A, B, s, s^+, K, L, c, g, g', \xi, \cdots, \bar{u}, u$ 全部换成 $A^0_{(n+1)}, B^0_{(n+1)}, s^0_{(n+1)}, s^{+0}_{(n+1)}, K^0_{(n+1)}, \cdots \bar{u}^0_{(n+1)}, u^0_{(n+1)}$, S^R 经过这样换过后定义为 S^0_{n+1}. 相仿，如果全部换成 $A^0_{(n)}, B^0_{(n)}, s^0_{(n)}, s^{+0}_{(n)}, K^0_{(n)}, \cdots, \bar{u}^0_{(n)}, u^0_{(n)}$，则换过后 S^R 就变成 S^0_n. 于是有

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S^0_{n+1})=\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S^0_n)+(\tilde{S}^0_{n+1}-\tilde{S}^0_n)+o(\eta^{n+2}). \tag{36}$$

由于 (35) 式和 (32) 式，$(\tilde{S}^0_{n+1}-\tilde{S}^0_n)(\sim o(\eta^{n+1}))$ 正好把 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(s^0_n)$ 中的发散部分 $\eta^{n+1}\ \tilde{\Gamma}\underset{(n+1)}{\mathrm{div}}(s^0_n)(\sim o(\eta^{n+1})$，这是 $(n+1)$ 级的总体发散)全部消去，而且低于 η^{n+1} 的各级都不受影响. 所以，$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(s^0_{n+1})$ 中不仅原先的 $\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^n$ 各级有限的结果不改变，而且 η^{n+1} 级也是有限的. 这正是我们所要做的重正化的结果.

再进一步看，既然 s^0_{n+1}, s^0_n 是通过对 S^R 作变数变换得来，则 Slavnov 恒等式在作变数变换后必定仍成立，即有(自 (11) 式)

$$\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{A0}_{i(n+1)}}\cdot\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta A^0_{i(n+1)}}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{B0}_{\mu(n+1)}}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta B^0_{\mu(n+1)}}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s0}_{l(n+1)}}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta s^0_{l(n+1)}}$$
$$+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+0}_{l(n+1)}}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta s^{+0}_{l(n+1)}}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta L^0_{a(n+1)}}\cdot\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta u^0_{a(n+1)}}=0,$$
$$-F^{Aa}_i\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{Aa}_{i(n+1)}}-c^{Aa0}_{l(n+1)}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s0}_{l(n+1)}}-c^{Aa+0}_{l(n+1)}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+0}_{l(n+1)}}-\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta\bar{u}^0_{a(n+1)}}=0,$$
$$-F^B_\mu\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{B0}_{\mu(n+1)}}-c^{B0}_{l(n+1)}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s0}_{l(n+1)}}-c^{B+0}_{l(n+1)}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+0}_{l(n+1)}}-\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta\bar{u}^0_{(n+1)}}=0,$$
$$\tilde{S}^0_{n+1}=s^0_{n+1}+\frac{1}{2}\xi^0_{A(n+1)}(C^{Aa0})^2_{n+1}+\frac{1}{2}\xi^0_{B(n+1)}(C^{B0})^2_{n+1}. \tag{37}$$

从重正化的乘法关系 (34 式) 看到 (见 (4) 式)

$$\frac{1}{2}\xi^0_A(C^{Aa0})^2+\frac{1}{2}\xi^0_B(C^{B0})^2=\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2+\frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2.$$

所以规范确定项在重正化中不变，又由于(自 (35) 式)

$$\frac{1}{2}z_{3(n+1)}+\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)}=\frac{1}{2}z'_{3(n+1)}+\frac{1}{2}\tilde{z}'_{3(n+1)}=\frac{\gamma(\epsilon)}{2}.$$

所以有如下关系(因为上面的等式对每一级都成立):

$$Z_3\tilde{Z}_3=Z'_3\tilde{Z}'_3. \tag{38}$$

于是 (37) 式去掉共同常数因子后写成

$$\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^A_i}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta A_i}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^B_\mu}\frac{\delta\tilde{S}^0}{\delta B_\mu}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^s_l}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta s_l}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+}_l}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta s^+_l}+\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta u_a}=0,$$

$$-F^{Aa}_i\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^A_i}-c^{Aa}_l\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^s_l}-c^{Aa+}_l\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+}_l}-\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta\bar{u}_a}=0,$$

$$-F^B_\mu\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^B_\mu}-c^B_l\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^s_l}-c^{B+}_l\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta K^{s+}_l}-\frac{\delta\tilde{S}^0_{n+1}}{\delta\bar{u}}=0. \tag{39}$$

而且(39)式显然是严格成立的,与(15)式一致,可作为更高一级重整化的出发点.

我们还注意到(37)第一式意味着 $\tilde{S}^0_{n+1}$ 在下列 B.R.S. 变换下不变(把(10)式作变数变换):

$$\begin{aligned}
&\delta A^0_{i(n+1)}=(\Delta^{Ab}_i+g^0_{(n+1)}t^b_{ij}A^0_{j(n+1)})u^0_{b(n+1)}\delta\lambda^0,\\
&\delta B^0_{\mu(n+1)}=(\Delta^B_\mu u^0_{(n+1)})\delta\lambda^0,\\
&\delta s^0_{l(n+1)}=\frac{-i}{2}(g^0_{(n+1)}\tau^b_{lk}s^0_{k(n+1)}u^0_{b(n+1)}+g'^0_{(n+1)}s^0_{l(n+1)}u^0_{(n+1)})\delta\lambda^0,\\
&\delta s^{+0}_{l(n+1)}=\frac{i}{2}(g^0_{(n+1)}s^+_{k(n+1)}\tau^b_{kl}u^0_{b(n+1)}+g'^0_{(n+1)}s^{+0}_{l(n+1)}u^0_{(n+1)})\delta\lambda^0,\\
&\delta u^0_{a(n+1)}=-\frac{1}{2}g^0_{(n+1)}f_{abc}u^0_{b(n+1)}u^0_{c(n+1)}\delta\lambda^0,\\
&\delta\bar{u}^0_{a(n+1)}=\xi^0_A(F^{Aa}_iA^0_{i(n+1)}+c^{Aa0}_{k(n+1)}s^0_{k(n+1)}+c^{Aa+0}_{k(n+1)}s^{+0}_{k(n+1)})\delta\lambda^0,\\
&\delta u^0_{(n+1)}=0,\\
&\delta\bar{u}^0_{(n+1)}=\xi^0_B(F^B_\mu B^0_{\mu(n+1)}+c^{B0}_{k(n+1)}s^0_{k(n+1)}+c^{B+0}_{k(n+1)}s^{+0}_{k(n+1)})\delta\lambda^0.
\end{aligned}\tag{40}$$

再作变数变换,把 $A^0_{i(n+1)}$, $B^0_{\mu(n+1)}$, $\cdots$按(34)式换成 A_i, B_μ, $\cdots$,考虑到规范确定项中的 $\xi^{1/2}_AF^{Aa}_iA_i$ 和 $\xi^{1/2}_BF^B_\mu B_\mu$ 是不重正化的,从而在有关 $\delta\bar{u}_a$, $\delta\bar{u}$ 的 B.R.S. 变换中,$\xi_AF^{Aa}_iA_i$ 和 $\xi_BF^B_\mu B_\mu$ 在重正化前后不改变,所以应取

$$\delta\lambda^0=Z^{1/2}_3\tilde{Z}^{1/2}_3\delta\lambda=Z'^{1/2}_3\tilde{Z}'^{1/2}_3\delta\lambda. \tag{41}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&\delta A_i=((\tilde{Z}_3)_{n+1}\Delta^{Ab}_i+g(\tilde{Z}_1)_{n+1}t^b_{ij}A_j)u_b\delta\lambda,\\
&\delta B_\mu=((\tilde{Z}'_3)_{n+1}\Delta^B_\mu u)\delta\lambda,\\
&\delta s_l=\frac{-i}{2}(g(\tilde{Z}_1)_{n+1}\tau^b_{lk}s_ku_b+g'(\tilde{Z}'_1)s_lu)\delta\lambda,\\
&\delta s^+_l=\frac{i}{2}(gs^+_k(\tilde{Z}_1)_{n+1}\tau^b_{kl}u_b+g'(\tilde{Z}'_1)s^+_lu)\delta\lambda,\\
&\delta u_a=-\frac{1}{2}g(\tilde{Z}_1)_{n+1}f_{abc}u_bu_c\delta\lambda,\\
&\delta\bar{u}_a=\xi_A(F^{Aa}_iA_i+c^{Aa}_ks_k+c^{Aa+}_ks^+_k)\delta\lambda,\\
&\delta u=0,\\
&\delta\bar{u}=\xi_B(F^B_\mu B_\mu+c^B_ks_k+c^{B+}_ks^+_k)\delta\lambda,
\end{aligned}\tag{42}$$

其中

$$s_l=\bar{s}_l+(v_l)_{n+1},\qquad s^+_l=\bar{s}^+_l+(v^+_l)_{n+1}. \tag{43}$$

(42)式就是与(39)式有关的 B.R.S. 变换(s^0_{n+1} 在(42)式的 B.R.S. 变换下不变),也是

(16)式的 B.R.S. 变换的具体化。只需把 $n+1$ 换成 n，(42)式就回到(16)式。

下面把(42)式和(10)式进行对比：

(a) 在(10)式中，$s_l=\bar{s}_l$，$s_l^+=\bar{s}_l^+$；但在(42)式中，s_l，s_l^+ 作了(43)式的平移。这是消去重正化中出现的发散的 v_l 和 v_l^+（与规范有关的真空期待值）所必需的。

(b) 在(10)式与(42)式之间还有如下的关系：

$$
\begin{aligned}
\Delta_i^{Ab} &\to \Delta_{i(n+1)}^{Ab0}=(\widetilde{Z}_3)_{n+1}\Delta_i^{Ab},\\
t_{ij}^b &\to t_{ij(n+1)}^{b0}=(\widetilde{Z}_1)_{n+1}t_{ij}^b,\\
\tau_{lm}^b &\to \tau_{lm(n+1)}^{b0}=(\widetilde{Z}_1)_{n+1}\tau_{lm}^b,\\
f_{abc} &\to f_{abc(n+1)}^0=(\widetilde{Z}_1)_{n+1}f_{abc}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

这相当于经过 $n+1$ 级的微扰修正后，Δ_i^{Ab} 变成了裸的 $\Delta_{i(n+1)}^{Ab0}$，…等等，而且这些裸的 Δ^0，t^0，τ^0，f^0 仍满足（自(44)式和(6)式）：

$$
\begin{aligned}
&t_{ij(n+1)}^{a0}t_{jk(n+1)}^{b0}-t_{ij(n+1)}^{b0}t_{jk(n+1)}^{a0}=f_{abc(n+1)}^0t_{ij(n+1)}^{c0},\\
&\left(-\frac{i}{2}\right)\tau_{kl(n+1)}^{a0}\left(-\frac{i}{2}\right)\tau_{lm(n+1)}^{b0}-\left(-\frac{i}{2}\right)\tau_{kl(n+1)}^{b0}\left(-\frac{i}{2}\right)\tau_{lm(n+1)}^{a0}\\
&\qquad=f_{abc(n+1)}^0\left(-\frac{i}{2}\right)\tau_{km(n+1)}^{c0},\\
&t_{lm(n+1)}^{a0}\Delta_{m(n+1)}^{Ab0}-t_{lm(n+1)}^{b0}\Delta_{m(n+1)}^{Aa0}=f_{abc(n+1)}^0\Delta_{l(n+1)}^{Ac0}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

与(6)式一样。

(c) 自(45)式，对换 i,l 可得（求迹）

$$t_{il(n+1)}^{a0}t_{li(n+1)}^{b0}-t_{il}^{b0}t_{li(n+1)}^{a0}=f_{abc(n+1)}^0t_{ii(n+1)}^{c0}=0.$$

然而可把 $f_{abc}=M_{ab}^c$ 看做一个矩阵，不同 c 的 M^c 是互相独立的，所以

$$t_{ii(n+1)}^{c0}=0. \tag{46}$$

又因 $f_{abc}\sim\varepsilon_{abc}$，所以 $f_{abc(n+1)}^0\sim\varepsilon_{abc}$，从而

$$f_{aab(n+1)}^0=0. \tag{47}$$

所以在作(42)式的 B.R.S. 变换时，泛函积分体积元的 Jacobian 的对角线之和为零，Jacobian 为 1。由此可在 $(n+1)$ 级得到 $\tilde{\Gamma}$ 的 Slavnov 恒等式。（即(17)式，$\tilde{\Gamma}$ 用 s_{n+1}^0 作出。）

这就保证同样的重正化步骤可一级一级继续进行下去。

(d) 与(42)式相对应的规范变换为 $\left(\text{取 } u_b\delta\lambda=\frac{1}{(\widetilde{Z}_3)_{n+1}}\theta^b,\ u\delta\lambda=\frac{1}{(\widetilde{Z}_3')_{n+1}}\theta\right)$

$$
\begin{aligned}
\delta A_i&=\left(\Delta_i^{Ab}+\frac{(\widetilde{Z}_1)_{n+1}}{(\widetilde{Z}_3)_{n+1}}gt_{ij}^bA_j\right)\theta^b,\\
\delta B_\mu&=(\Delta_\mu^B)\theta,\\
\delta s_l&=\frac{-i}{2}\left(\frac{(\widetilde{Z}_1)_{n+1}}{(\widetilde{Z}_3)_{n+1}}g\tau_{lk}^bs_k\theta^b+\frac{(\widetilde{Z}_1')_{n+1}}{(\widetilde{Z}_3')_{n+1}}g's_l\theta\right),\\
\delta s_l^+&=\frac{i}{2}\left(\frac{(\widetilde{Z}_1)_{n+1}}{(\widetilde{Z}_3)_{n+1}}gs_k^+\tau_{kl}^b\theta^b+\frac{(\widetilde{Z}_1')_{n+1}}{(\widetilde{Z}_3')_{n+1}}g's_l^+\theta\right).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

从(b)，(c)，(d)看到，重正化前后的规范群的结构常数是一一对应的，Abel 子群仍保持为 Abel 子群，这就证明了重正化前后的规范群的同构。

如果有费密场 ψ_L, ψ_R，则由于在 $\mathscr{L}_L$, $\mathscr{L}_R$ 中 gA_i, $g'B_\mu$ 分别以组合形式出现，$\frac{A_i}{2}\frac{\delta}{\delta A_i}-\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial g}$, $\frac{B_\mu}{2}\frac{\delta}{\delta B_\mu}-\frac{g'}{2}\frac{\partial}{\partial g'}$ 作用上去为零，所以只是提供新的重正化常数 Z_L, Z_R，不影响整个的重正化．费密场与 Higgs 场的耦合项有新的耦合常数，从而有新的重正化常数，对重正化也不引起困难．

如果有真空自发破缺，则 Zinn-Justin 和 Lee 的讨论[2]仍适用，不必另作讨论．

这种证明方法还可以推广到更多个子群的情况．

参　考　文　献

[1] G.'t Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B50** (1972), 318.
[2] B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 3121, 3137; **D7** (1973), 1049.
[3] D. A. Ross, J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B51** (1973), 125.
[4] J. Julve, M. Tonin, *Nuov. Cim.*, **29A** (1975), 85.
[5] J. Zinn-Justin, Trends in Elementary Particle Theory, Edited by H. Rollnik, K. Dietz (1976).
[6] J. C. Taylor, Gange Theories of Weak Interactions, (1976), Cambridge University Press.
[7] B. W. Lee, Methods in Field Theory, Edited by R. Balian, J. Zinn-Justin, (1976).
[8] *S. Joglekar, B. W. Lee, Annals of Phys.*, **97** (1976), 160.

ON THE ISOMORPHISM BETWEEN GAUGE GROUPS BEFORE AND AFTER RENORMALIZATION, IN THE PRESENCE OF ABEL SUBGROUPS AND HIGGS FIELDS

WANG RONG

(Graduate School, University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

We give a rigorous proof on the isomorphism between gauge groups before and after renormalization, in the presence of Abel subgroups and Higgs fields.