

Airy 函数乘积的积分

王仁川

(中国科学技术大学天体物理研究室)

1980年4月26日收到

提 要

本文提出对 $\int x^n A^{(p)} B^{(q)} dx$ 型不定积分普遍方法, 其中 A, B 都是含有参变量 λ 的 Airy 方程 $y'' = (\lambda + x)y$ 的解, p, q 是微分阶数, n 是非负整数. 当 $p, q \leq 1$, A 与 B 所含的参数不相同, 本文导出了上述积分普遍公式. 当 $A = B$ 时, 又提出了与 Albright 完全不同的求积方法. 作为它的应用, 本文讨论了处于三角势阱中电子的波函数正交归一问题, 并计算了势阱中能级间的跃迁几率.

一、引 言

在稳定的均匀力场中, 粒子运动的 Schrödinger 方程, 均可以化成形式为 $\psi'' = (\lambda + \xi)\psi$ 含有参变量的 Airy 方程^[1], 其中 λ 是与粒子能量成正比的常数, ξ 与粒子坐标成正比的自变量. 方程的一般解可以写成 $\psi = c_1 Ai(\lambda + \xi) + c_2 Bi(\lambda + \xi)$. Ai 和 Bi 分别是两个线性独立的 Airy 函数^[2]. Airy 函数不仅可以用来描述处于均匀力场中的微观粒子的连续态, 而且可以描述束缚态. Airy 函数的性质虽然作了大量的研究, 但直到 1976 年以前还没有人研究过 Airy 函数乘积的积分问题, 甚至连波函数归一化问题都没有涉及. 1976 年 Albright 解决了具有相同参量的 Airy 函数乘积的不定积分求法^[3] (即对角元的积分). 然而, 不同参量 Airy 函数乘积的积分 (即非对角元的积分) 问题, 仍然没有解决. 因而 Airy 函数在物理上应用的困难并没有消除. 随着 Airy 函数乘积的非对角元积分全面解决, Airy 函数有可能得到更广泛的应用^[4].

二、几条引理和定理

设 A, B 均是 $y'' = (\lambda + x)y$ Airy 方程的解, 它们的参数分别记为 α, β .

定义 I $T_1^n = x^n(A'B + B'A); T_2^n = x^n AB; T_3^n = x^n(A'B - B'A); T_4^n = x^n A'B'$.

并以 $T_m^n \left(\begin{smallmatrix} n=0,1,2,\dots,N \\ m=1,2,3,4 \end{smallmatrix} \right)$ 为基底构成线性空间记为 R^N .

显然, R^N 维数有限, 而且有 $R^{N-1} \subset R^N$.

引理 (I) $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in R^N$ ($Nn < +p+q$)

证: 当 $p, q \leq 1$ 时显然成立, $p, q \leq 2$ 时也成立, 只要把 A 的二阶微商换成 $(\alpha+x)A$;

B 的二阶微商换成 $(\beta + x)B$, 展开后其结果也是显然的. 今假定 $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in R^N (N < n + p + q)$ 其中 $p, q \leq K$ 成立 ($K \geq 2$), 用归纳法只要证明 $p, q \leq K + 1$ 成立即可. 先假定 $p = (K + 1), q \leq K, x^n A^{(K+1)} B^{(q)} = x^n \{A''\}^{(K-1)} B^{(q)} = x^n \{(\alpha + x)A\}^{(K-1)} B^{(q)} = \alpha x^n A^{(K-1)} B^{(q)} + x^{n+1} A^{(K-1)} B^{(q)} + (K-1)x^n A^{(K-2)} B^{(q)}$. 根据假定 $x^n A^{(K-1)} B^{(q)} \in R^{N'} (N' < n + K - 1 + q)$; $x^{n+1} A^{(K-1)} B^{(q)} \in R^{N''} (N'' < n + K + q)$; $x^n A^{(K-2)} B^{(q)} \in R^{N'''} (N''' < n + K - 2 + q)$, 故 $x^n A^{(K+1)} B^{(q)} \in R^N (N = \max\{N', N'', N'''\}, N < n + K + q < n + K + q + 1)$; 同理, 可证当 $q = K + 1, p \leq K, x^n A^{(p)} B^{(K+1)} \in R^N (N < n + K + 1 + q)$; 还需要证 $p = K + 1, q = K + 1$ 其关系也成立, $x^n A^{(K+1)} B^{(K+1)} = x^n A^{(K+1)} (\beta B^{(K-1)} + x B^{(K-1)} + (K-1)B^{(K-2)}) = \beta x^n A^{(K+1)} B^{(K-1)} + x^{n+1} A^{(K+1)} B^{(K-1)} + (K-1)x^n A^{(K+1)} B^{(K-2)}$. 根据上面证明结果, $x^n A^{(K+1)} B^{(K-1)} \in R^{N_1} (N_1 < n + K + K - 1)$; $x^{n+1} A^{(K+1)} B^{(K-1)} \in R^{N_2} (N_2 < n + 1 + K + K - 1)$; $x^n A^{(K+1)} B^{(K-2)} \in R^{N_3} (N_3 < n + K + K - 2)$. 故 $x^n A^{(K+1)} \cdot B^{(K+1)} \in R^N (N = \max(N_1, N_2, N_3) < n + 2K < n + 2(K + 1))$, 因而 $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in R^N \cdot (N < n + p + q)$ 在 $p \cdot q \leq K + 1$ 仍然成立, 引理证毕.

根据引理 (I), $x^n A^{(p)} B^{(q)} = \sum_{\substack{n=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4}} a_{nm} T_m^n$, 其中 a_{nm} 是与 x 无关的常数, 故

$$\int x^n A^{(p)} B^{(q)} dx = \sum_{\substack{n=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4}} a_{nm} \int T_m^n dx.$$

由此可得

引理 (II) $x^n A^{(p)} B^{(q)}$ 函数的不定积分可以化成有限个 $T_m^n \left(\begin{smallmatrix} n=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4 \end{smallmatrix} \right)$ 的不定积分的线性组合.

定义 II 以 Df 表示 $\frac{d}{dx} f$, 如果某函数 G 它能表示成 $G = Df$, 其中 f 为已知函数, 则称 G 为“可以积出的”. 以 $\mathcal{F}$ 表示可以积出函数的全体.

定义 III 以 $DT_m^n \left(\begin{smallmatrix} n=0,1,\dots,N \\ m=1,2,3,4 \end{smallmatrix} \right)$ 为基底构成线性空间, 记为 DR^N , 同样显然有 $DR^{N-1} \subset DR^N$.

引理 (III) 如果 $G \in DR^N$, 则 $G \in \mathcal{F}$.

证: 因 $G \in DR^N$, 故

$$G = \sum_{\substack{n=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4}} G_{nm} DT_m^n = D \sum_{\substack{n=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4}} G_{nm} T_m^n,$$

因而 $G \in \mathcal{F}$.

定理 当 $\alpha \neq \beta$ 时 $T_m^n \in \mathcal{F}$.

证: 根据引理 (III) 只需要证明 $T_m^n \in DR^N$ 即可. 由于有

$$DT_2^0 = T_1^0; DT_3^0 = (\alpha - \beta)T_2^0; DT_1^1 = T_2^0 + T_1^1;$$

$$DT_4^0 = \frac{\alpha + \beta}{2} T_1^0 + T_1^1 - \frac{\alpha - \beta}{2} T_3^0; DT_3^1 = T_3^0 + (\alpha - \beta)T_2^1;$$

$$DT_1^0 = (\alpha + \beta)T_2^0 + 2T_2^1 + 2T_4^0;$$

相继推出

$$T_1^0 \in DR^0; T_2^0 \in DR^0; T_1^1 \in DR^1; T_3^0 \in DR^1; T_2^1 \in DR^1; T_4^0 \in DR^1.$$

由此得出, $T_m^0 (m = 1, \dots, 4) \in DR^1$; 用归纳法, 假定 $T_m^{n-1} (m = 1, \dots, 4) \in DR^n$, 如果能推出 $T_m^n (m = 1, \dots, 4) \in DR^{n+1}$, 则定理成立. 由于

$$DT_2^n = nT_2^{n-1} + T_1^n; \quad DT_3^n = nT_3^{n-1} + (\alpha - \beta)T_2^n;$$

$$DT_2^{n+1} = (n+1)T_2^n + T_1^{n+1}; \quad DT_4^n = nT_4^{n-1} + \frac{\alpha + \beta}{2}T_1^n + T_1^{n+1} - \frac{\alpha - \beta}{2}T_3^n;$$

$$DT_3^{n+1} = (n+1)T_3^n + (\alpha - \beta)T_2^{n+1}; \quad DT_1^n = nT_1^{n-1} + (\alpha + \beta)T_2^n + 2T_2^{n+1} + 2T_4^n;$$

相继又可以推出:

$$T_1^n \in DR^n; \quad T_2^n \in DR^n; \quad T_1^{n+1} \in DR^{n+1}; \quad T_3^n \in DR^{n+1}; \quad T_2^{n+1} \in DR^{n+1}; \quad T_4^n \in DR^{n+1};$$

因而有 $T_m^n (m = 1, 2, 3, 4) \in DR^{n+1}$. 由此得出 $T_m^n \in \mathcal{S}$.

推论 当 $\alpha \neq \beta$, $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in \mathcal{S}$.

证: 由于 $x^n A^{(p)} B^{(q)} = \sum_{\substack{K=0,1,\dots,N \\ m=1,\dots,4}} a_{Km} T_m^K$, ($N < n + p + q$), $T_m^K \in DR^{K+1} \subset DR^{N+1}$, 故 $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in DR^{N+1}$, 则 $x^n A^{(p)} B^{(q)} \in \mathcal{S}$.

三、方法与公式

计算 T_m^n 的不定积分的方法, 实质上是把求积运算变成代数运算, 具体方法有两种, 即逐级计算法和矩阵计算法.

1. 逐级计算法 这种方法在证明 $T_m^n \in \mathcal{S}$ 中实际上已经给出了. 按顺序作函数 T_2^0 , T_3^0 , T_1^1 , T_4^0 , T_3^1 , T_2^2 , T_4^1 , T_3^2 , T_1^3 , T_3^3 , T_4^2 , T_3^4 , T_1^5 ; $\dots$; T_2^{n+1} , T_4^n , T_3^{n+1} , T_1^n ; $\dots$, 微商等式. 每一个等式在按顺序积分的情况下, 只有一个待求积的 T_m^K 函数, 因而通过简单的代数运算可以相继求出 T_1^0 , T_2^0 , T_1^1 , T_3^0 , T_2^1 , T_4^0 , T_1^2 , T_3^1 , T_2^2 , T_4^1 ; $\dots$; T_1^{n+1} , T_3^n , T_2^{n+1} , T_4^n ; $\dots$ 函数的不定积分公式.

2. 矩阵解法 定义如下两类矢量

$$(\bar{I}^n) = (T_1^n, T_2^n, T_1^{n+1}, T_3^n, T_2^{n+1}, T_4^n);$$

$$(\bar{II}^n) = (T_2^n, T_3^n, T_2^{n+1}, T_4^n, T_3^{n+1}, T_1^n).$$

令

$$\bar{G}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\alpha + \beta)}{2} & 0 & 1 & -\frac{(\alpha - \beta)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+1 & (\alpha - \beta) & 0 \\ 0 & (\alpha + \beta) & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由 $DT_2^n, DT_3^n, DT_2^{n+1}, DT_4^n, DT_3^{n+1}, DT_1^n$ 等式中可以得到如下的关系:

$$D(\bar{\Pi}^n) = -nF(\bar{I}^{n-1}) + \bar{G}_n(\bar{I}^n).$$

由于 $\text{Det } \bar{G}_n \neq 0$, 故 $(\bar{I}^n) = D\bar{G}_n^{-1}(\bar{\Pi}^n) + n\bar{G}_n^{-1}F(\bar{I}^{n-1})$.

令 $\bar{H}_n = \bar{G}_n^{-1} \cdot F$, 因而有

$$(\bar{I}^n) = D\bar{G}_n^{-1}(\bar{\Pi}^n) + n\bar{H}_n(\bar{I}^{n-1}).$$

此公式对 n 为任何正整数和零均成立. (在 $n=0$ 的情况只需要形式上推广一下 T_m^n 的定义, 把 n 推广到负整数, 因而 $(\bar{I}^{-1})$ 也有定义) 可以用递推关系, 注意到 $(\bar{\Pi}^n) = x^n(\bar{\Pi}^0)$, 最后可得

$$(\bar{I}^n) = D\{x^n\bar{G}_n^{-1} + nx^{n-1}\bar{H}_n\bar{G}_{n-1}^{-1} + n(n-1)x^{n-2}\bar{H}_n\bar{H}_{n-1}\bar{G}_{n-2}^{-1} + \dots + n!\bar{H}_n\bar{H}_{n-1}\bar{H}_{n-2}\dots\bar{H}_1\bar{G}_0^{-1}\}(\bar{\Pi}^0),$$

其中

$\bar{G}_K^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha-\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K+1}{\alpha-\beta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} & -\frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{2}{\alpha-\beta} & -\frac{2}{\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ -\frac{(K+1)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{2(K+1)^2}{(\alpha-\beta)^3} & -\frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{1}{\alpha-\beta} & 0 \\ \frac{(K+1)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2} - \left(\frac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)} + \frac{2(K+1)^2}{(\alpha-\beta)^3}\right) & \frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} - \frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{-1}{\alpha-\beta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{H}_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K+1}{\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)} & 0 & \frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} & 0 & \frac{2}{\alpha-\beta} \\ 0 & \frac{(K+1)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2} & 0 & -\frac{2(K+1)^2}{(\alpha-\beta)^3} & 0 & -\frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} \\ -1/2 & -\frac{(K+1)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2} & 0 & \frac{(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)} + \frac{2(K+1)^2}{(\alpha-\beta)^3} & 0 & \frac{2(K+1)}{(\alpha-\beta)^2} \end{pmatrix}.$$

由于在 $\int (\bar{I}^n)dx$ 和 $\int (\bar{I}^{n+1})dx$ 中, $\int T_1^{n+1}dx$ 和 $\int T_2^{n+1}dx$ 都重复计算了两次, 因而可以将 $(\bar{I}^n)$ 中的 T_1^{n+1}, T_2^{n+1} 两分量删去, 则 $(\bar{I}^n)$ 变成 $(I^n) = (T_1^n, T_2^n, T_3^n, T_4^n)$. 与此相应须将矩阵 $\bar{G}_n^{-1}, \bar{H}_n$ 删去第三行和第五行变成 4×6 型矩阵. 在 $(\bar{\Pi}^0)$ 中由于第三分量 $T_1^0 = xT_2^0$ 和第五分量 $T_3^0 = xT_2^0$ 可以分别拼入 $(\bar{\Pi}^0)$ 中第一分量 T_1^0 和第二分量 T_2^0 之中,

因而 $(\bar{\Pi}^0)$ 变成 $(\Pi^0) = (T_2^0, T_3^0, T_4^0, T_1^0)$, 与此相应需要将矩阵 $\bar{G}_K^{-1} (K = 0, 1, \dots, n)$ 的第三列乘以 x 加入第一列, 第五列乘以 x 加入第二列, 然后将其第三列和第五列全部删去. 再由于 $\bar{H}_K$ 中第三列和第五列的元素全是零, 因而全部的 $\bar{G}_K^{-1} (K = 0, \dots, n)$ 和 $\bar{H}_K (K = 1, \dots, n)$ 均可以化成 4×4 型矩阵, $G_K^{-1} (K = 0, 1, \dots, n)$; $H_K (K = 1, \dots, n)$.

$G_K^{-1} =$

$$G_K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha - \beta} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{2x}{\alpha - \beta} & -\frac{2(K+1)}{(\alpha - \beta)^2} & \frac{-2}{\alpha - \beta} & 0 \\ \frac{(K+1)(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2(K+1)x}{(\alpha - \beta)^2} - \left[\frac{\alpha + \beta}{2(\alpha - \beta)} + \frac{2(K+1)^2}{(\alpha - \beta)^3} + \frac{x}{\alpha - \beta} \right] & -\frac{2(K+1)}{(\alpha - \beta)^2} & +1/2 \end{pmatrix},$$

$$H_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\alpha - \beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} & \frac{2(K+1)}{(\alpha - \beta)^2} & \frac{2}{\alpha - \beta} \\ -1/2 & -\frac{(K+1)(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} & \left[\frac{(\alpha + \beta)}{2(\alpha - \beta)} + \frac{2(K+1)^2}{(\alpha - \beta)^3} \right] & \frac{2(K+1)}{(\alpha - \beta)^2} \end{pmatrix}.$$

最后积分的普遍公式可以写成如下形式:

$$\int (I^n) dx = \left\{ \sum_{p=0}^n \left(\frac{d^p x^n}{dx^p} \right) \prod_{K=0}^p H_{(n-K+1)} G_{n-K}^{-1} \right\} (\Pi^0),$$

其中 $H_{(n+1)} = 1$ $H_{(K)} = H_K (K \leq n)$. 实际的物理问题可能只对某些类型项的不定积分感兴趣, 从此公式出发可以大大简化计算.

附 录

非对角元的积分表 1 $\int (I^0) dx = G_0^{-1} (\Pi^0)$

$$\begin{aligned} \int (A'B + B'A) dx &= AB, \\ \int AB dx &= \frac{1}{\alpha - \beta} (A'B - B'A), \\ \int (A'B - B'A) dx &= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{2x}{\alpha - \beta} \right) AB - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} (A'B - B'A) - \frac{2}{\alpha - \beta} A'B', \\ \int A'B' dx &= \left[\frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2x}{(\alpha - \beta)^2} \right] AB - \left[\frac{\alpha + \beta}{2(\alpha - \beta)} + \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} + \frac{x}{\alpha - \beta} \right] (A'B - B'A) \\ &\quad - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} A'B' + \frac{1}{2} (A'B + B'A). \end{aligned}$$

积分表 2 $\int (I^1) dx = \{xG_1^{-1} + H_1 G_0^{-1}\} (\Pi^0)$

$$\int x(A'B + B'A) dx = xAB - \frac{1}{\alpha - \beta} (A'B - B'A),$$

$$\int xAB = -\frac{(\alpha + \beta + 2x)}{(\alpha - \beta)^2}AB + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{2}{(\alpha - \beta)^2} + x \right) (A'B - B'A) + \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} A'B',$$

$$\begin{aligned} \int x(A'B - B'A)dx &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + x \right) (\alpha + \beta + 2x)AB \\ &\quad - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \left(\alpha + \beta + \frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + 3x \right) (A'B - B'A) \\ &\quad - \frac{2}{\alpha - \beta} \left(\frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + x \right) A'B' + \frac{1}{(\alpha - \beta)} (A'B + B'A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xA'B'dx &= \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\alpha + \beta + \frac{24}{(\alpha - \beta)^2} + 4x \right) (\alpha + \beta + 2x) \right] AB \\ &\quad - \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(5(\alpha + \beta) + \frac{24}{(\alpha - \beta)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta + \frac{24}{(\alpha - \beta)^2} \right) x + x^2 \right] (A'B + B'A) - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad \cdot \left[\alpha + \beta + \frac{24}{(\alpha - \beta)^2} + 4x \right] A'B' + \left(\frac{2}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{1}{2}x \right) (A'B + B'A). \end{aligned}$$

积分表 3 $\int (I^2)dx = \{x^2G_2^{-1} + 2H_2(xG_1^{-1} + H_1G_0^{-1})\}(II^0)$

$$\begin{aligned} \int x^2(A'B + B'A)dx &= \left\{ \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha + \beta + 2x] + x^2 \right\} AB \\ &\quad - \frac{2}{\alpha - \beta} \left[\frac{2}{(\alpha - \beta)^2} + x \right] (A'B - B'A) - \frac{4}{(\alpha - \beta)^2} A'B', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2ABdx &= -\frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \left[\frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + x \right] (\alpha + \beta + 2x)AB \\ &\quad + \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{4}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha + \beta + \frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + 3x \right] + x^2 \right\} (A'B - B'A) \\ &\quad + \frac{4}{(\alpha - \beta)^2} \left[\frac{6}{(\alpha - \beta)^2} + x \right] A'B' - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} (A'B + B'A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2(A'B - B'A)dx &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ -2 + \left[\frac{4(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{120}{(\alpha - \beta)^4} + \frac{20x}{(\alpha - \beta)^2} + x^2 \right] \right. \\ &\quad \cdot (\alpha + \beta + 2x) \left. \right\} AB - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \left\{ \frac{24}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha + \beta + \frac{5}{(\alpha - \beta)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[\alpha + \beta + \frac{30}{(\alpha - \beta)^2} \right] x + 5x^2 \right\} (A'B - B'A) \\ &\quad - \frac{2}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{4}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha + \beta + \frac{30}{(\alpha - \beta)^2} + 5x \right] + x^2 \right\} A'B' \\ &\quad + \frac{2}{\alpha - \beta} \left[\frac{10}{(\alpha - \beta)^2} + x \right] (A'B + B'A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2A'B'dx &= \left\{ - \left[x + \frac{6}{(\alpha - \beta)^2} \right] + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha + \beta + 2x) \left[\frac{18(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{360}{(\alpha - \beta)^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x \left(\alpha + \beta + \frac{60}{(\alpha - \beta)^2} \right) + 3x^2 \right] \right\} AB + \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left\{ 1 - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \right. \\ &\quad \cdot \left[(\alpha + \beta)^2 + \frac{78(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{360}{(\alpha - \beta)^4} \right] - \frac{18x}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha + \beta + \frac{20}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\ &\quad \left. - \left[\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{30}{(\alpha - \beta)^2} \right] x^2 - x^3 \right\} (A'B - B'A) - \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{18}{(\alpha - \beta)^2} \left[\alpha + \beta + \frac{20}{(\alpha - \beta)^2} \right] + \left[(\alpha + \beta) + \frac{60}{(\alpha - \beta)^2} \right] x + 3x^2 \right\} A'B' \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[(\alpha + \beta) + \frac{60}{(\alpha - \beta)^2} + 6x \right] + \frac{x^2}{2} \right\} (A'B + B'A). \end{aligned}$$

四、对角元的积分

上节所得的积分公式只有在 A, B 参变量 α, β 不相等的情况下才能成立. 当 $A = B$ 时, 其乘积的积分原则上可以由已得的现成公式, 令 $\alpha \rightarrow \beta, A \rightarrow B$, 求其极限得到. 然而这种做法并不简便. 实际上只需要从上节一个最简单的非对角元积分公式出发, 便可以得到对角元积分的全部结果.

$$\int AB dx = \frac{1}{\alpha - \beta} (A'B - B'A),$$

其中 A, B 均是 $y'' = (\lambda + x)y$ 的解. Airy 方程的一般解可以表示为

$$y(x + \lambda) = C_1 Ai(x + \lambda) + C_2 Bi(x + \lambda).$$

如果令 $A = y(x + \alpha)$ 和 $B = y(x + \beta)$; 当 $\alpha \rightarrow \beta$ 时, 自然有 $A \rightarrow B$.

下面先讨论 $\lambda = 0$ 情况, 可设 $A = y(x + \varepsilon), B = y(x)$, 然后对 A 和 A' 以 x 为原点作泰勒级数展开:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y^{(n)}(x), \quad A' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} y^{(n+1)}(x).$$

代入上式两公式中, 比较同级 ε 的系数, 可得下面等式:

$$\int y^{(n)} y dx = \frac{1}{n+1} (y^{(n+2)} y - y^{(n+1)} y').$$

利用部分积分法又可得另一等式:

$$\int y^{(n)} y' dx = \frac{1}{n+2} (y^{(n)} y - x y^{(n+1)} y + y^{(n+2)} y'),$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$; 将 n 按下列方式 $(0, 1), (2, 3), \dots, (2K, 2K+1), \dots$ 分划为许多组. 分别命名为第 0 组, 第 1 组 $\dots$; $(2K, 2K+1)$ 称为第 K 组. 第 0 组可以得到 $\int y^2 dx, \int yy' dx, \int y'^2 dx$ 三个积分公式; 相继第一组可以得到 $\int xy^2 dx, \int xyy' dx, \int xy'^2 dx$ 三个积分公式. 不难证明从第 n 组中, 可以得到 $\int x^n y^2 dx, \int x^n yy' dx, \int x^n y'^2 dx$ 积分公式. 因而 $\lambda = 0$ 的 Airy 函数对角元积分公式全部可以由此给出.

附 录

$\lambda = 0$ 对角元积分公式

第 0 组:

$$\int y^2 dx = (xy^2 - y'^2), \quad \int yy' dx = \frac{1}{2} y^2,$$

$$\int y'^2 dx = -\frac{1}{3} (x^2 y^2 - 2yy' - xy'^2);$$

第一组:

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{3} (x^2 y^2 + yy' - xy'^2), \quad \int xyy' dx = \frac{1}{2} y'^2,$$

$$\int xy'^2 dx = -\frac{1}{5} \left[\left(x^3 + \frac{3}{2} \right) y^2 - 3xyy' - x^2 y'^2 \right];$$

第二组:

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{5} [(x^3 - 1)y^2 + 2xyy' - x^2 y'^2],$$

$$\int x^2 yy' dx = \frac{1}{6} (x^2 y^2 - 2yy' + 2xy'^2),$$

$$\int x^2 y'^2 dx = -\frac{1}{7} [x^4 y^2 - 4x^2 yy' - (x^3 - 4)y'^2].$$

至于 $\lambda \neq 0$ 的情况, 由于有恒等式

$$\int x^n y^{(p)} y^{(q)} dx = \sum_{K=0}^n (-1)^K C_n^K \lambda^K \int (x + \lambda)^{n-K} y^{(p)} y^{(q)} dx,$$

p, q 为微分阶数 ($p, q \leq 1$), $C_n^K = \frac{n!}{K!(n-K)!}$ 二项式系数. 等式右面的积分只需要

利用 $\lambda = 0$ 积分公式, 将其中的自变量 x 换成 $(x + \lambda)$ 即可. 下面相应给出最前面三组 $\lambda \neq 0$ Airy 函数乘积对角元的积分公式:

$$\int y^2 dx = [(x + \lambda)y^2 - y'^2], \int yy' dx = \frac{1}{2} y^2,$$

$$\int y'^2 dx = -\frac{1}{3} [(x + \lambda)^2 y^2 - 2yy' - (x + \lambda)y'^2];$$

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{3} \{ (x + \lambda)^2 y^2 + yy' - (x + \lambda)y'^2 \} - \lambda [(x + \lambda)y^2 - y'^2],$$

$$\int xyy' dx = \frac{1}{2} y'^2 - \lambda \frac{1}{2} y^2,$$

$$\begin{aligned} \int xy'^2 dx = & -\frac{1}{5} \left\{ \left[(x + \lambda)^3 + \frac{3}{2} \right] y^2 - 3(x + \lambda)yy' \right. \\ & \left. - (x + \lambda)^2 y'^2 \right\} + \frac{\lambda}{3} [(x + \lambda)^2 y^2 - 2yy' - (x + \lambda)y'^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 y^2 dx = & \frac{1}{5} \{ [(x + \lambda)^3 - 1] y^2 + 2(x + \lambda)yy' - (x + \lambda)^2 y'^2 \} \\ & - \frac{2}{3} \lambda [(x + \lambda)^2 y^2 + yy' - (x + \lambda)y'^2] + \lambda^2 [(x + \lambda)y^2 - y'^2], \end{aligned}$$

$$\int x^2 yy' dx = \frac{1}{6} [(x + \lambda)^2 y^2 - 2yy' + 2(x + \lambda)y'^2] - \lambda y'^2 + \frac{\lambda^2}{2} y^2,$$

$$\int x^2 y'^2 dx = \frac{-1}{7} \{ (x + \lambda)^4 y^2 - 4(x + \lambda)^2 yy' - [(x + \lambda)^3 - 4] y'^2 \}$$

$$+ \frac{2\lambda}{5} \left\{ \left[(x + \lambda)^3 + \frac{3}{2} \right] y^2 - 3(x + \lambda)yy' - (x + \lambda)^2 y'^2 \right\}$$

$$- \frac{\lambda^2}{3} \{ (x + \lambda)^2 y^2 - 2yy' - (x + \lambda)y'^2 \}.$$

五、应用——尖劈势阱中的电子

尖劈势阱的势能函数 $V(x) = -eExQ(x)$, 其中 $Q(x)$ 是阶梯函数 $Q(x) = 1$, 当 $x < 0$; $Q(x) = -\infty$ 当 $x \geq 0$; E 为电场强度, e 为电子电荷. 电子的波函数满足定态的 Schrödinger 方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - eExQ(x)\right)\psi = \mathcal{E}\psi,$$

相应于能量特征值 $\mathcal{E}_n = \left(\frac{\hbar^2 e^2 E^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}}$, γ_n 的特征波函数为

$$\begin{aligned}\psi_n &= \alpha_n Ai\left(-\gamma_n - \left(\frac{2eEm}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}x\right) \quad x < 0, \\ \psi_n &= 0 \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

这里 α_n 是归一化常数, $(-\gamma_n)$ 是 Airy 函数零点, $Ai(-\gamma_n) = 0$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma_0 = 2.338$, $\gamma_1 = 4.087$, $\gamma_2 = 5.520$, $\gamma_3 = 6.787$, $\gamma_4 = 7.944$; 当 $n \geq 5$ 时,

$$\gamma_n \cong \left[\frac{3}{2}\pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

(1) 利用 $\int y^2 dx = xy^2 - y'^2$ 公式可以求出归一化常数

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= 1 / \int_{-\infty}^0 Ai^2\left(-\gamma_n - \left(\frac{2eEm}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}x\right) dx \\ &= 1 / \left(\frac{\hbar^2}{2eEm}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\gamma_n}^{\infty} Ai^2(x) dx = \left(\frac{2meE}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} Ai'^{-2}(-\gamma_n).\end{aligned}$$

(2) 利用 $\int AB dx = \frac{1}{\alpha - \beta} (A'B - B'A)$, 证明波函数正交. 设 $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \psi_m(x) \psi_n(x) dx &= \alpha_m \alpha_n \int_{-\infty}^0 Ai\left(-\gamma_m - \left(\frac{2meE}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}x\right) Ai\left(-\gamma_n - \left(\frac{2meE}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}x\right) dx \\ &= \left(\frac{\hbar^2}{2meE}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\alpha_m \alpha_n}{\gamma_n - \gamma_m} [Ai'(-\gamma_m + \xi) Ai(-\gamma_n + \xi) \\ &\quad - Ai'(-\gamma_n + \xi) Ai(-\gamma_m + \xi)]_0^{\infty} = 0.\end{aligned}$$

(3) 利用公式

$$\begin{aligned}\int x AB dx &= -\frac{(\alpha + \beta + 2x)}{(\alpha - \beta)^2} AB + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{2}{(\alpha - \beta)^2} + x\right) (A'B - B'A) \\ &\quad + \frac{2}{(\alpha - \beta)^2} A'B'\end{aligned}$$

求电子在能级间跃迁几率.

电子由高能态 m 自发跃迁到低能态 n 的几率为

$$\begin{aligned}
A_{m,n} &= \frac{4e^2\omega_{mn}^3}{\hbar C^3} |x_{mn}|^2, \\
x_{mn} &= \int_{-\infty}^0 x \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \left(\frac{\hbar^2}{2meE} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_m \alpha_n \int_{-\infty}^0 Ai(-\gamma_m + \xi) \\
&\quad \cdot Ai(-\gamma_n + \xi) \xi d\xi = \frac{2}{(\gamma_m - \gamma_n)^2} \left(\frac{\hbar^2}{2meE} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_m \alpha_n Ai'(-\gamma_m) \\
&\quad \cdot Ai'(-\gamma_n) = \frac{2}{(\gamma_m - \gamma_n)^2} \left(\frac{\hbar^2}{2meE} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\omega_{mn} &= \frac{1}{\hbar} (\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n) = \left[\frac{(eE)^2}{2m\hbar} \right]^{\frac{1}{2}} (\gamma_m - \gamma_n).
\end{aligned}$$

由此可得

$$A_{mn} = \frac{4e^3E}{\hbar m^2 C^3} (2m\hbar eE)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\gamma_m - \gamma_n}.$$

以上均用了 Airy 函数 Ai 的性质 $Ai(\infty) = Ai'(\infty) = 0$

在本文完成过程中,得到了陶懋顺、尤峻汉、华新民等同志热情鼓励和帮助,任尚芬同志参与了最后一节的工作,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Л. Ландау, И. Е. Лифшиц "Квантовая механика", (1948), p. 90.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, (1965), "Handbook of Mathematical Functions", (New York: Dover).
- [3] J. R. Albright, *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** (1977), 485.
- [4] 方励之、王仁川、任尚芬,自然杂志, **3**(3)(1980), 235.

INTEGRALS OF PRODUCTS OF AIRY FUNCTIONS

WANG REN-CHUAN

(Research Division of Astrophysics, University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

General methods of calculating indefinite integrals of the type $\int x^n A^{(p)} B^{(q)} dx$ are presented, where A and B are solutions of the Airy equation $y'' = (\lambda + x)y$ with the parameter λ , p, q are the order of differential, n is a non-negative integer. General formulae of this type of integrals is given for corresponding $p, q \leq 1$ and functions A, B with different parameters. For $A=B$ a method of integration is also obtained, which is quite different from that of Albright. As an application, these formulae of integrals are applied to the problem of the orthonormalization of the wave functions of an electron in a triangular potential well, and the transition probabilities between the energy-levels are obtained.