

缓变截面波导开放谐振腔的微波网络分析

李强法 徐承和

(北京大学无线电电子学系)

1980年6月15日收到

提 要

本文利用微波网络理论分析了缓变截面波导开放谐振腔，给出了任意纵剖面形状开放腔的传输 Q 值的一般公式。估计了波导壁欧姆损耗对 Q 值的影响。简单讨论了谐振频率修正问题。并具体推导了双圆锥腔和圆柱形开放腔的传输 Q 值的计算公式。

文献[1]中，应用缓变截面波导理论横截面法以及W.K.B.求解法分析了缓变截面波导型开放谐振腔中各谐振模式电磁场的纵向分布函数，给出了确定各模式谐振频率的普遍关系式。但该文未考虑到腔两端外接部分的影响。本文利用微波网络理论分析缓变波导开放谐振腔，就可考虑腔两端外接部分对腔特性的影响。

一、开放腔的微波网络分析

为方便计，我们讨论具有轴对称性的开放谐振腔。当然，本文略加修改就可适用于其

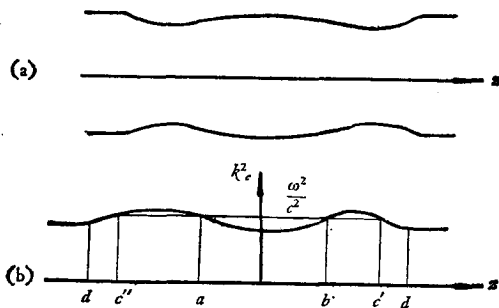


图1 轴对称缓变波导开放谐振腔纵剖面
(a) 及其 $k_c^2(z)$ 的函数形式

它横截面形状，例如矩形截面的缓变截面波导开放谐振腔。图1(a)示出轴对称开放腔(包括两端外接部分)纵剖面的一般形状，其中 $z < d'$ 及 $z > d$ 处分别接有一段规则圆波导。图1(b)示出了与(a)相对应的开放腔中某一模式的横向波数平方 $k_c^2(z)$ 的函数形式。图1中 $z = a, b, c', c''$ 均为 $k_c^2(z)$ 与直线 ω^2/c^2 的交点，在这些交点上有纵向波数 $k = 0$ ，即是开放腔及其两端外接部分中该模式截止截面的位置。

假定波导壁为理想导体，因而可以把图1所示的开放腔连同两端外接部分一起视作一个无耗二端口微波网络。下面推导这个网络的波幅传输矩阵^[2]。

与文献[1]相同，我们仍从缓变截面波导中电磁场与 z 有关的函数 $f_s(\omega, z)$ 所近似遵从的二阶变系数常微分方程出发，该方程为

$$\frac{d^2 f_s}{dz^2} + k^2(\omega, z) f_s = 0. \tag{1}$$

此处纵向波数 k 有

$$k^2(\omega, z) = \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2(z),$$

式中 $k_c(z)$ 为缓变截面波导中某一模式的横向波数, 为 z 的缓变函数; ω 为角频率; c 为光速; $j = \sqrt{-1}$. 并认为电磁场对时间 t 的关系为 $e^{j\omega t}$. 本文还采用以下符号:

$$k(\omega, z) = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2(z) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} > k_c^2 \right), \quad (2)$$

$$\kappa(\omega, z) = \left[k_c^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} < k_c^2 \right), \quad (3)$$

方程(1)的解用 W.K.B. 解表示, 则图 1(a), (b) 中所示的开放腔及其外接部分在各区域中解为

$$f_z = \begin{cases} \frac{A_1}{\sqrt{k_1}} e^{jk_1(z-d')} + \frac{B_1}{\sqrt{k_1}} e^{-jk_1(z-d')} & (z < d'), \\ \frac{A_2}{\sqrt{k_2}} e^{j\int_{d'}^z k_2 dz} + \frac{B_2}{\sqrt{k_2}} e^{-j\int_{d'}^z k_2 dz} & (d' < z < c''), \\ \frac{A_3}{\sqrt{\kappa_3}} e^{-\int_{c''}^z \kappa_3 dz} + \frac{B_3}{\sqrt{\kappa_3}} e^{\int_{c''}^z \kappa_3 dz} & (c'' < z < a), \\ \frac{A_4}{\sqrt{k_4}} e^{j\int_a^z k_4 dz} + \frac{B_4}{\sqrt{k_4}} e^{-j\int_a^z k_4 dz} & (a < z < b), \\ \frac{A_5}{\sqrt{\kappa_5}} e^{-\int_b^z \kappa_5 dz} + \frac{B_5}{\sqrt{\kappa_5}} e^{\int_b^z \kappa_5 dz} & (b < z < c'), \\ \frac{A_6}{\sqrt{k_6}} e^{j\int_{c'}^z k_6 dz} + \frac{B_6}{\sqrt{k_6}} e^{-j\int_{c'}^z k_6 dz} & (c' < z < d), \\ \frac{A_7}{\sqrt{k_7}} e^{jk_7(z-d)} + \frac{B_7}{\sqrt{k_7}} e^{-jk_7(z-d)} & (z > d). \end{cases} \quad (4)$$

设波有 $e^{-j\omega z}$ 形式, 则(4)式中 $A_n/\sqrt{k_n}$ 为沿 $+z$ 方向传输波的波幅, $B_n/\sqrt{k_n}$ 为沿 $-z$ 方向传输波的振幅, n 为各区编号. 区域 1 和 7 假定为二段规则波导. f_z 是其中电磁场的纵向分布函数, 因而(4)式中各区域的 f_z 要求在区域交界面上是光滑连接的. 关于 W.K.B. 法各区域解光滑连接的讨论, 可参考文献[3]中第七章, 这里将该书中连接公式直接引用如下:

对于图 2 所示情形, 连接公式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{-\int_z^a \kappa dz} &\longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_a^z k dz - \frac{\pi}{4}\right), \\ -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{\int_z^a \kappa dz} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_a^z k dz - \frac{\pi}{4}\right); \end{aligned} \quad (5)$$

对于图 3 所示情况, 连接公式为

$$\frac{2}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_z^b k dz - \frac{\pi}{4}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{-\int_b^z \kappa dz},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left(\int_x^b k dz - \frac{\pi}{4} \right) \longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{\int_b^z \kappa dz} \quad (6)$$

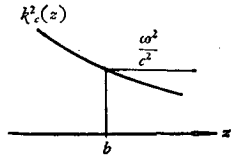


图2 适用连接公式(5)的情形

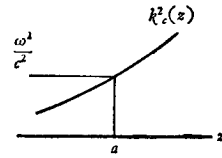


图3 适用连接公式(6)的情形

对 $n = 2-6$ 各区域交界处依次利用连接公式 (5) 或 (6), 这样得到不同区域的 A_n, B_n 之间关系式, 进行矩阵运算, 可以得出 (A_2, B_2) 与 (A_6, B_6) 的关系. 至于 (A_1, B_1) 与 (A_2, B_2) 以及 (A_6, B_6) 与 (A_7, B_7) 之间关系, 可由对应的相邻区交界处 f_i 及其一阶微商相等的条件得出. 把最后结果, 即 (A_1, B_1) 与 (A_7, B_7) 间的关系, 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_7 \\ B_7 \end{bmatrix},$$

这相当于把图 1 系统视作一无耗二端口网络, A 则对应为波幅传输矩阵. 其中 A 的矩阵元利用各连接条件经过冗长计算得到

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} e^{-j(\rho_1 + \rho_2)} \left[\left(4\beta_1\beta_2 + \frac{1}{4\beta_1\beta_2} \right) \cos L - j \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \sin L \right], \\ A_{12} &= \frac{1}{2} j e^{-j(\rho_1 - \rho_2)} \left[\left(4\beta_1\beta_2 - \frac{1}{4\beta_1\beta_2} \right) \cos L + j \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \sin L \right], \\ A_{21} &= \frac{-1}{2} j e^{j(\rho_1 - \rho_2)} \left[\left(4\beta_1\beta_2 - \frac{1}{4\beta_1\beta_2} \right) \cos L - j \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \sin L \right], \\ A_{22} &= \frac{1}{2} e^{j(\rho_1 + \rho_2)} \left[\left(4\beta_1\beta_2 + \frac{1}{4\beta_1\beta_2} \right) \cos L + j \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \sin L \right], \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\rho_1 = \int_{a'}^{c''} k_2 dz, \quad \rho_2 = \int_{c'}^d k_6 dz, \quad (8)$$

$$\beta_1 = \exp \left[\int_{c''}^a \kappa_3 dz \right], \quad \beta_2 = \exp \left[\int_b^{c'} \kappa_5 dz \right], \quad (9)$$

$$L = \int_a^b k_4 dz. \quad (10)$$

上面的矩阵表示式是直接由各区域中场解相互衔接得到的, (7) 式中矩阵元有 $A_{11} = A_{22}^*$, $A_{12} = A_{21}^*$ 以及 $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$, 这与无耗二端口网络的波幅传输矩阵的性质一致. 因此, 我们有理由把图 1 的系统等效成无耗二端口微波网络.

按微波网络理论(见文献[2]第四章), 无耗二端口网络的散射矩阵 S 可由传输矩阵 A 得到

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & 1 \\ A_{11} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_7 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

用散射矩阵 S 描述图 1 系统的网络特性是方便的.

为讨论网络的内在特性,通常假定 $z > d$ 处是匹配的,即 $B_7 = 0$, 此时图 1 网络的波幅传输系数为 S_{21} . 由 (7) 和 (11) 式得出

$$S_{21} = \frac{1}{A_{11}} = |S_{21}| e^{j\varphi} = \frac{2e^{j(\rho_1 + \rho_2)}}{\left(4\beta_1\beta_2 + \frac{1}{4\beta_1\beta_2}\right) \cos L - j\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \sin L}. \quad (12)$$

其模为

$$|S_{21}| = \frac{2}{\left[\left(4\beta_1\beta_2 + \frac{1}{4\beta_1\beta_2}\right)^2 \cos^2 L + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 \sin^2 L\right]^{1/2}} \quad (13)$$

和幅角为

$$\varphi = \rho_1 + \rho_2 + \operatorname{tg}^{-1} \left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \left(4\beta_1\beta_2 + \frac{1}{4\beta_1\beta_2} \right)^{-1} \operatorname{tg} L \right]. \quad (14)$$

现在研究 $|S_{21}|$ 的频率特性. 图 1 所示系统, 对于那些存在截止截面的波模式, (c'' , a) 和 (b , c') 二区间代表二段过截止波导, (9) 式定义的 β_1, β_2 是实数, 且大于零. 如果这二截止段都较长, 就有 $\beta_1\beta_2 \gg 1$, 在 (a, b) 段内的波能量被截留在内, 在某些分立的频率下谐振, 且有很高的 Q 值, 此时 $|S_{21}|$ 具有明显的谐振特性, 在腔谐振频率下 $|S_{21}|$ 取极大值, 即由条件

$$\frac{d}{d\omega} |S_{21}| = 0, \quad \frac{d^2}{d\omega^2} |S_{21}| < 0 \quad (15)$$

可确定腔的谐振频率. 这里 $|S_{21}|$ 是 β_1, β_2, L 的函数, 而后三者又都是频率 ω 的函数, 一般情况下按条件 (15) 来确定谐振频率在数学上是困难的. 对于实用的高 Q 腔, 可作如下近似处理:

当 $\beta_1\beta_2 \gg 1$, 且有 $2\beta_1\beta_2 \gg (\beta_1 - \beta_2)^2$, 由 (13) 式得出 $|S_{21}|$ 取极大值的条件为

$$\cos L \simeq 0, \quad \sin L \simeq (-1)^l. \quad (16)$$

亦即

$$L = \int_a^b k dz \simeq \left(l + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

这与文献 [1] 中得到的 (23) 式一致, (23) 式是在腔 Q 值 $\rightarrow \infty$ 时得到的, 现在近似得出, 对应于腔 Q 值极高的情况. 由谐振腔理论知, 对于高 Q 腔的谐振频率与由 (17) 式给出的频率相差 Q^{-1} 量级, 故由 (17) 式算出的谐振频率 ω_0 可作为零级近似值^[4]. 为计算腔的传输 Q 值, 可采用逐步近似法. 针对 ω_0 满足的条件 (16) 式, 把 $\sin L$ 和 $\cos L$ 在 ω_0 邻域作泰勒展开, 舍去 $(\Delta\omega)^2$ 以上项, 有

$$\sin L \simeq (-1)^l, \quad \cos L \simeq (-1)^l \left. \frac{\partial L}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta\omega,$$

其中 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. 利用这些近似式, 可把 (12) 式改写成.

$$S_{21} = \frac{2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{-1} e^{j[(l+\frac{1}{2})\pi + \rho_1 + \rho_2]}}{1 + j4 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta\omega}. \quad (18)$$

表达式 (18) 可与图 4 的无耗二端口网络等效。图 4 中纯电纳元件 jB 两边各接有

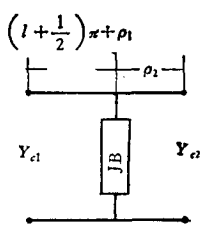


图 4 缓变截面开放腔在某一模式的谐振频率附近的等效网络

长度分别为 $(l + \frac{1}{2})\pi + \rho_1$ 和 ρ_2 , 特性阻抗分别为 Y_{c1} 和 Y_{c2} 的两段传输线。

图 4 的网络传输系数 \bar{S}_{21} 可写成

$$\bar{S}_{21} = \frac{2Y_{c1}}{Y_{c1} + Y_{c2}} \frac{e^{j[(l+\frac{1}{2})\pi + \rho_1 + \rho_2]}}{1 + jB/(Y_{c1} + Y_{c2})} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

如果 B 在频率 ω_0 附近有谐振特性, 则 B 近似为

$$B \simeq \left. \frac{\partial B}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega,$$

从而(19)式变成

$$\bar{S}_{21} = \frac{2Y_{c1}}{Y_{c1} + Y_{c2}} \frac{e^{j[(l+\frac{1}{2})\pi + \rho_1 + \rho_2]}}{1 + j \frac{1}{Y_{c1} + Y_{c2}} \left. \frac{\partial B}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega} = \frac{2Y_{c1}}{Y_{c1} + Y_{c2}} \frac{e^{j[(l+\frac{1}{2})\pi + \rho_1 + \rho_2]}}{1 + j2Q\omega_0\Delta\omega}, \quad (20)$$

其中网络的该谐振模式的 Q 值为

$$Q = \frac{\omega_0}{2(Y_{c1} + Y_{c2})} \left. \frac{\partial B}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}.$$

将 (18) 式与 (20) 式作比较, 可以看出, 在缓变截面波导开放腔的某模式谐振频率附近, 其传输特性可用图 4 网络来等效, 即图 1 的开放腔在某谐振模式附近的等效网络按图 4 表示, 即有 $\bar{S}_{21} = S_{21}$, 就得出图 1 的缓变截面开放腔在某一谐振模式的传输 Q 值 Q_T 的表示式

$$Q_T = 2\omega_0 \left[\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \omega} \right]_{\omega_0}. \quad (21)$$

(21) 式是确定任意纵剖面形状的缓变截面开放谐振腔的传输 Q 值的普遍公式, 我们限于轴对称性的腔, (2) 和 (3) 式中

$$k \text{ 或 } \kappa = \left| \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_{nm}^2}{R^2(z)} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

这里 μ_{nm} 对于磁波 H_{nm} 模是 n 阶贝塞耳函数的导数的第 m 个零点, 对电波 E_{nm} 模则是 n 阶贝塞耳函数的第 m 个零点, $R(z)$ 为截面半径. 把上式代入 (9) 和 (10) 式, 针对不同区域中的 $R(z)$, 即可算出 β_1 , β_2 和 L , 这样, (21) 式的 Q_T 可以算出.

如果定义

$$Q_{T1} = \left(2\omega_0 \beta_1^2 \frac{\partial L}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}, \quad (22)$$

$$Q_{T2} = \left(2\omega_0 \beta_2^2 \frac{\partial L}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}. \quad (23)$$

(21) 式也可写成以下表示式:

$$Q_T = \left(\frac{1}{Q_{T1}} + \frac{1}{Q_{T2}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

如果有 $\beta_1 \gg \beta_2$, 则 $Q_T \simeq Q_{T1}$; 反之, 如果 $\beta_2 \gg \beta_1$, 则 $Q_T \simeq Q_{T2}$.

通常, 用微波网络来分析波导中局部不均匀性时, 要求网络端口离不均匀性区域足够远, 使一模式在不均匀性处产生的高次模式很快衰减, 它们不影响端口处的场, 即所谓等效网络的单模近似. 这里情形有些不同, 因此对网络的等效性需加以论证. 这里的波导不均匀段指 $z = d'$ 到 d 一段, 不均匀性指波导横截面的连续变化, 但在实用的开放腔中这种截面变化很缓慢, 根据理论分析^[5], 比所讨论的谐振模式更高次的模式与前者耦合很弱, 因此这些高次模式的影响可以忽略; 在腔中还可能存在一些谐振模式更低次模式, 这些模式是截止模式, 在腔内很快衰减, 对端口的场影响微弱; 而且我们的端口可选择在 $z < d'$ 和 $z > d$ 的规则波导中任一位置. 基于上述理由, 我们在单模近似下作出开放腔的等效微波网络是基本合理的.

上面的分析假定网络是无耗的, 即不考虑波导壁的欧姆损耗, 故 (21) 至 (24) 式所表示的 Q_T 是腔的传输 Q 值 (某些文献中称为衍射 Q 值, 这不够确切, 因实际的开放腔的能量输出是沿波导传输到负载的). 实际上, 特别在微波频率高端, 当 Q_T 值较高时, 壁欧姆损耗对开放腔的总 Q 值有明显影响. 单独考虑波导壁欧姆损耗所得出的 Q 值, 即称腔的固有 Q 值, 记之为 Q_r . 一般微波谐振腔用微扰法计算 Q_r 的公式为

$$Q_r = \frac{2 \int_V |H|^2 dV}{\delta \int_S |H_t|^2 dS}, \quad (25)$$

式中 δ 为某一模式谐振频率下导体壁上趋肤厚度, H 为腔体积 V 内磁场, H_t 为导体壁表面上磁场切向分量, S 指腔壁表面. 根据文献[1,4]给出的腔内电磁场解, 给出腔壁材料的导电率及由 (17) 式得到的谐振频率, 按 (25) 式可估算出 Q_r 值. 实践证明, 用 (25) 式计算 Q_r 值对于频率在 10 千兆赫以下较正确. 在目前加工条件所能达到的表面光洁度下, 对于毫米波段, 腔壁表面的粗糙度使 (25) 式给出 Q_r 值有很大误差, 此时这种估算只是粗略近似.

开放谐振腔的总 Q 值 Q_L 等于

$$Q_L = \left(\frac{1}{Q_T} + \frac{1}{Q_r} \right)^{-1}. \quad (26)$$

二、双圆锥腔和圆柱形开放腔的 Q 值计算

作为例子, 本节用上节理论具体推导出双圆锥腔和圆柱形开放腔的 Q_T 值表示式.

先讨论双圆锥腔. 这种腔包括两端外接部分在内的纵剖面形状, 如图 5 所示. 它是由几段圆锥形波导和规则波导拼接而成, 腔主体在 (a, b) 区间内.

设腔中存在 H_{nmi} 谐振模式 (对于 E_{nmi} 模可同样作出). 各几何参量的意义可从图 5 看出, 各段波导中的截止截面位置 a, b, c' 和 c'' , 可令 (2) 式 $k(\omega, z) = 0$ 得到

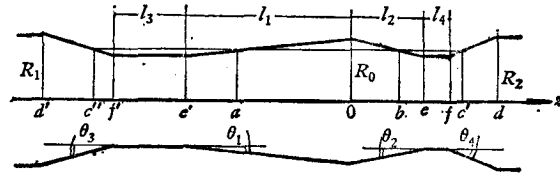


图5 双圆锥腔的纵剖面形状

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta_1} \left(R_0 - \frac{\mu_{nm} c}{\omega} \right), & b &= \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_2} \left(R_0 - \frac{\mu_{nm} c}{\omega} \right), \\
 c' &= l_2 + l_4 + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_4} \left(R_2 - \frac{\mu_{nm} c}{\omega} \right), \\
 c'' &= -\left[l_1 + l_3 + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_3} \left(R_1 - \frac{\mu_{nm} c}{\omega} \right) \right],
 \end{aligned} \quad (27)$$

其中 c 为光速。由文献[1]的(42)式,对双圆锥腔已算出

$$L = \int_a^b \kappa dz = M \mu_{nm} (E - \operatorname{tg}^{-1} E). \quad (28)$$

这里

$$M = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}, \quad E = \left(\frac{R_0^2 \omega^2}{\mu_{nm}^2 c^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

把(28)式对 ω 求偏微商,得到

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = M \mu_{nm} E / \omega. \quad (30)$$

同样可算出(9)式的积分

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \exp \left(\int_{c''}^a \kappa dz \right) = \exp \left[\int_{c''}^{-(a_1+l_3)} \kappa dz + \int_{-(a_1+l_3)}^{-l_1} \kappa dz + \int_{-l_1}^a \kappa dz \right], \\
 \beta_1 &= \exp \left[\kappa_1 l_3 + M_1 \left(\frac{\mu_{nm} \ln \frac{\mu_{nm} + \kappa_1 R_1}{\mu_{nm} - \kappa_1 R_1}}{2} - \kappa_1 R_1 \right) \right],
 \end{aligned} \quad (31)$$

式中

$$\kappa_1 = \left(\frac{\mu_{nm}^2}{R_1^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad M_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_3}{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_3}. \quad (32)$$

将(30)和(31)式代入(22)式,得到

$$Q_{T1} = 2M \mu_{nm} E \left\{ \exp \left[2\kappa_1 l_3 + M_1 \left(\mu_{nm} \ln \frac{\mu_{nm} + \kappa_1 R_1}{\mu_{nm} - \kappa_1 R_1} - 2\kappa_1 R_1 \right) \right] \right\}. \quad (33)$$

同样可得

$$Q_{T2} = 2M \mu_{nm} E \left\{ \exp \left[2\kappa_2 l_4 + M_2 \left(\mu_{nm} \ln \frac{\mu_{nm} + \kappa_2 R_2}{\mu_{nm} - \kappa_2 R_2} - 2\kappa_2 R_2 \right) \right] \right\}, \quad (34)$$

式中

$$\kappa_2 = \left(\frac{\mu_{nm}^2}{R_2^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad M_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_4}{\operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_4}. \quad (35)$$

把(34)和(35)式代入(24)式就可以得到腔的传输 Q 值。

下面讨论圆柱形开放腔。这类腔的纵剖面示于图6中。它是图5的双圆锥腔在 R_0

处插接一段规则圆波导而形成。对它的计算可利用上面双圆锥腔的结果作适当修正得出。

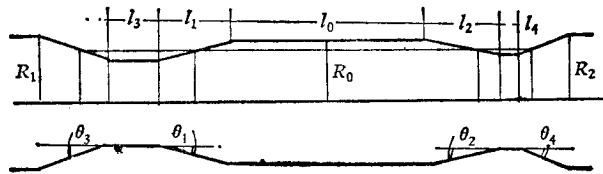


图6 圆柱形开放腔的纵剖面

对于圆柱形开放腔的 H_{nm} 谐振模式, 有

$$L_c = \int_a^b k dz = k_0 l_0 + M \mu_{nm} (E - \text{tg}^{-1} E), \quad (36)$$

式中 k_0 和 l_0 是中间一段规则圆波导的纵向波数和长度,

$$k_0 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_{nm}^2}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

其谐振频率 ω_0 按 (17) 式和 (36) 式近似得到

$$k_0 l_0 + M \mu_{nm} (E - \text{tg}^{-1} E) = \left(l + \frac{1}{2} \right) \pi \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

把 (36) 式对 ω 求偏微商, 有

$$\frac{\partial L_c}{\partial \omega} = \frac{M \mu_{nm} E}{\omega} + \frac{\omega l_0}{c^2 k_0}. \quad (39)$$

圆柱形开放腔 β_1 和 β_2 表示式与双圆锥腔的相同, 这样马上得到前者的传输 Q 值

$$Q_{CT1} = 2 \left(M \mu_{nm} E + \frac{\omega^2 l_0}{c^2 k_0} \right) \exp \left[2 \kappa_1 l_3 + M_1 \left(\mu_{nm} \ln \frac{\mu_{nm} + \kappa_1 R_1}{\mu_{nm} - \kappa_1 R_1} - 2 \kappa_1 R_1 \right) \right], \quad (40)$$

$$Q_{CT2} = 2 \left(M \mu_{nm} E + \frac{\omega^2 l_0}{c^2 k_0} \right) \exp \left[2 \kappa_2 l_4 + M_2 \left(\mu_{nm} \ln \frac{\mu_{nm} + \kappa_2 R_2}{\mu_{nm} - \kappa_2 R_2} - 2 \kappa_2 R_2 \right) \right]. \quad (41)$$

由下式可算出腔的传输 Q 值 Q_{CT} :

$$Q_{CT} = \left(\frac{1}{Q_{CT1}} + \frac{1}{Q_{CT2}} \right)^{-1}. \quad (42)$$

这些结果在 $l_0 \rightarrow 0$ 时, 与双圆锥腔结果一致。

至于与欧姆损耗对应的 Q 值, 可由 (25) 式作出估计, 这样, 按 (26) 式得到腔的总 Q 值 Q_L 。

谐振频率的修正问题。按 (17) 式计算谐振频率是近似的, 在 Q 值很高, 即 $\beta_1 \beta_2 \gg 1$ 时, 它与实际频率相差甚小。如对谐振频率 ω_0 的修正, 可利用文献[2]中第 7.7 节对有耗谐振腔的谐振频率的修正公式

$$\omega_{0L} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_L} \right), \quad (43)$$

式中 ω_0 即由 (17) 式得到的近似值。可以看出, 当 $Q_L > 10^3$ 时, 频率修正量

$$\omega_0 - \omega_{0L} < 5 \times 10^{-4} \omega_0.$$

三、结 论

本文利用微波网络理论分析了缓变截面波导开放腔,给出了任意纵剖面形状的开放腔的传输 Q 值的近似公式,它适用于 $\beta_1\beta_2 \gg 1$ 的条件,即适用于腔 Q 值高的情况.对于自由电子脉塞器件中常用的双圆锥腔和圆柱形开放腔,具体推导了传输 Q 值的计算公式.列出了估计腔壁欧姆损耗所引起的固有 Q 值 Q_r ,从而可用(43)式对谐振频率的修正.采用网络分析,其网络参量仍需用求解电磁场得到.本文在推导中作了一些简化,方程(1)的W.K.B.解在截止截面($k=0$)附近是不存在的,但不影响场的连接条件,在计算网络参量时也无需涉及.用微波网络分析开放腔,所得结果在工程设计上便于使用,特别是对熟悉电路网络的人员.所得计算公式也较简便.本文对两种具体腔结构导出了计算公式,只要给出这两种腔的几何尺寸就可算出工作模式的谐振频率和 Q 值.

本文曾经1412研究所吴鸿适教授,清华大学张克潜副教授及中国科学院电子学研究所郭和忠副研究员的审阅,并提出了宝贵的意见.北京大学无线电电子学系研究生周乐柱、于明对本文提出了修改意见.在此一并表示感谢.

参 考 文 献

- [1] 李强法, 物理学报, **29**(1980), 1405.
- [2] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [3] Eugen Mezbacher, *Quantum Mechanics*, Chap. 7, John Wiley & Sons, New York, (1970).
- [4] 周乐柱、徐承和、龚中林, 物理学报, **30**(1981), 153.
- [5] Б. З. Каценельбаум, Теория нерегулярные волноводов с медленно меняющимися параметрами, Изд. АН СССР, (1961).

MICROWAVE NETWORK THEORY OF OPEN RESONATORS IN THE FORM OF WAVEGUIDE WITH SLOWLY-VARYING CROSS-SECTION

LI QIANG-FA XU CHENG-HE

(Department of Radio-Electronics, Peking University)

ABSTRACT

Using microwave network theory, this paper presents an analysis of open resonators in the form of waveguide with slowly-varying cross-section. A general formula for determining the transmission Q value of the open resonator with any longitudinal profile is given. The value of Q_r resulting from the lossy wall is estimated. The correction of the resonant frequencies is discussed. As examples we derived the formulas to calculate the Q value for dual-cone open resonators and that for cylindrical open resonators.