第 30 卷 第 7 期
1981 年 7 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 30, No. 7
July, 1981

关于动态位错场张量势的规范变换

欧 发

(哈尔滨工业大学物理教研室)

1980 年 3 月 29 日收到

提 要

本文引入并论证了描述动态位错场的张量势 ($\hat{A}$ 与 $\hat{B}$)[1] 的规范变换问题,而且证明这种变换可采取这样的形式:

$$\hat{B}' = \hat{B} + \nabla F,$$

$$\hat{A}' = \hat{A} - \rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla G,$$

$$\chi' = \chi - \rho \frac{\partial}{\partial t} F,$$

其中 $\chi_i = e_{ikl} A_{kl}$. 至于 F 与 G, 则为带有很大任意性的时空坐标的矢量函数,但它们要满足以下关系式:

$$F = \nabla \times G, \quad \nabla^2 F - \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F = 0.$$

进一步,又证明了文献 [2] 中提出的规范条件同 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 所满足的非齐次波动方程是相容的.

在将晶体当成是连续弹性介质的前提下,Косевич 建立了一套比较完备的动态位错场的方程组[1],作者对它做过系统的评述[2]. 该方程组为

$$\nabla \times \hat{u} = -\hat{\mathscr{D}}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \mu \nabla_k (u_{ik} + u_{ki}) + \lambda \nabla_i u_{kk}, \tag{2}$$

$$\nabla v = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \hat{I}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathscr{D}} = 0 \quad [(1)\text{ 式的相容条件}], \tag{4}$$

其中代表场的量 $\hat{u}$ 与 v 依次是介质的弹性畸变张量与运动速度矢量. 若以 $u(r, t)$ 标志在位置 r 与时刻 t 的弹性位移,则有

$$\hat{u} = \nabla u \quad \text{或} \quad u_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \tag{1a}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{或} \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2a}$$

而代表场的源头量 $\hat{\mathscr{D}}$ 或 $\hat{I}$ 依次是位错密度张量与位错流密度张量. 若以 τ 代表位错线的切线单位矢量, b 代表该位错线所"带"的 Burgers 矢量, V 代表位错线运动的速度, $N(r, t)$ 代表位错线的面密度,则 $\hat{\mathscr{D}}$ 由下式来定义:

$$\hat{\mathscr{D}} = N(r, t)\tau b, \tag{1b}$$

而 $\hat{I}$ 的定义为

$$\hat{I} = N(\boldsymbol{r}, t)[\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{V}]\boldsymbol{b}. \tag{3a}$$

以上定义只适用于介质中只有一种类型的位错线，即位错线都是互相平行的直线，而且每根位错线都带有相同的 Burgers 矢量. 在一般情况下 $\hat{\mathscr{D}}$ 与 $\hat{I}$ 应表达为

$$\hat{\mathscr{D}} = \sum_{\alpha,\beta} \boldsymbol{\tau}^{\alpha}\boldsymbol{b}^{\beta}N^{\alpha\beta}, \tag{1c}$$

$$\hat{I} = \sum_{\alpha,\beta} N^{\alpha\beta}[\boldsymbol{\tau}^{\alpha} \times \boldsymbol{V}^{\alpha\beta}]\boldsymbol{b}^{\beta}. \tag{3b}$$

这里 α 标志位错线的某一种方向，β 标志某一种晶格矢，(α, β) 代表一种类型的位错线，$N^{\alpha\beta}$ 与 $\boldsymbol{V}^{\alpha\beta}$ 则分别代表该种类型位错线的面密度与运动速度.

至于 (2) 式中的 ρ，μ 与 λ 则依次是弹性介质的密度、切变模量与 Lame 系数.

在求解的时候，从 $\hat{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 中可分出两个量 $\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$，它们只对晶体的切变形变有贡献. 再引入两个张量势 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 来表达 $\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$:

$$\hat{g} = \nabla \times \hat{A} - \nabla \boldsymbol{\chi} - \rho \frac{\partial \hat{B}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\chi} + \mu \nabla \cdot \hat{B}. \tag{6}$$

这里 $\boldsymbol{\chi}$ 是 $\hat{A}$ 的派生量

$$\chi_i = e_{ikl}A_{kl}. \tag{7}$$

可以证明[2]，$\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 满足下列非齐次波动方程:

$$\nabla^2\hat{A} - \frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial t^2} = -\hat{\mathscr{D}}, \tag{8}$$

$$\nabla^2\hat{B} - \frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial t^2} = -\hat{I}/\mu \quad \left(C_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right). \tag{9}$$

但要附加条件

$$\nabla \times \hat{B} + \mu^{-1}\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \hat{A} = 0. \tag{11}$$

这就需要证明，在 $\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的解是唯一的前提下，$\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的解并不是唯一的. (Kосевич 在提出上述条件时，对此并未加证明[1].)换言之，要确切地知道如何对 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 进行使 $\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 保持不变的变换. 这就是本文所提出的"位错场张量势的规范变换"，相应 (10) 与 (11) 式则称为"规范条件".

根据我们探索的结果表明，这种规范变换的形式应该是(证明见后)

$$\hat{B}' = \hat{B} + \nabla \boldsymbol{F}, \tag{12}$$

$$\hat{A}' = \hat{A} - \rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla \boldsymbol{G}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\chi}' = \boldsymbol{\chi} - \rho\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 是时间与位置的某种任意的矢量函数，但是它们要满足以下关系式:

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G}, \tag{15}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{F}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}=0. \tag{16}$$

虽然如此,这并不失对 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 选择的任意性.

正如前面已经指出,$\boldsymbol{\chi}$ 纯属 $\hat{A}$ 的派生量,因此,$\boldsymbol{\chi}$ 的变换方式就完全取决于 $\hat{A}$ 的变换方式,

$$\begin{aligned}\chi_i'&=e_{ikl}A_{kl}'=e_{ikl}\left(A_{kl}-\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla_kG_l\right)\\&=\chi_i-\rho\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{G})_i.\end{aligned} \tag{17}$$

这里可参照 (7), (13) 与 (14) 诸式.

现证明在上述规范变换下 $\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的不变性:设 $\hat{g}'$ 与 $\boldsymbol{W}'$ 对应于变换后的 $\hat{A}'$ 与 $\hat{B}'$. 先看 $\hat{g}'$ [可对照 (12)—(14) 及 (5) 式],

$$\begin{aligned}\hat{g}'&=\nabla\times\hat{A}'-\nabla\boldsymbol{\chi}'-\rho\frac{\partial\hat{B}'}{\partial t}\\&=\hat{g}-\nabla\times\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{G}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{F}-\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{F}=\hat{g}.\end{aligned}$$

这里考虑到 $\nabla\times\nabla\boldsymbol{G}\equiv 0$. 再看 $\boldsymbol{W}'$ [可对照 (12)—(14) 及 (6) 式],

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}'&=\frac{\partial\boldsymbol{\chi}'}{\partial t}+\mu\nabla\cdot\hat{B}'\\&=\boldsymbol{W}+\left(-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}\right)+\mu\nabla^2\boldsymbol{F}\\&=\boldsymbol{W}+\mu\left[\nabla^2\boldsymbol{F}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}\right]\quad(\text{其中 } C_t^2=\mu/\rho)=\boldsymbol{W}.\end{aligned}$$

这里考虑到 (16) 式. 可见,$\hat{g}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 在我们的规范变换下是保持不变的.

同时,也不难证明,对 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的附加的规范条件 (10) 与 (11) 式同 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 所满足的非齐次波动方程 (8) 与 (9) 在任何时刻都是相容的. 现证明如下:

将 (8) 式两边取散度,得

$$\nabla^2(\nabla\cdot\hat{A})-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\hat{A})=-\nabla\cdot\hat{\mathscr{D}}. \tag{18}$$

由于 $\nabla\cdot(\nabla\times\hat{u})\equiv 0$ (参照 (1) 式),则

$$\nabla\cdot\hat{\mathscr{D}}\equiv 0. \tag{19}$$

故 (18) 式中 $\nabla\cdot\hat{A}$ 的解恒为零,即在任何时刻能满足 (8) 式的 $\hat{A}$ 都能满足 (11) 式,即满足规范条件之二,

$$\nabla\cdot\hat{A}=0.$$

在 (8) 式两边取对 t 的一次偏导数,再对 (9) 式两边取旋度,然后将分别经过上述手续的两式相加,那就得到

$$\nabla^2\hat{\phi}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\phi}=-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathscr{D}}+\nabla\times\hat{I}\right), \tag{20}$$

其中

$$\hat{\phi} = \nabla \times \hat{B} + \mu^{-1} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \tag{21}$$

(20) 等式之右边括号内的两项和，根据位错 Burgers 矢量在“流动”中的连续性[2]，应有

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathscr{D}} + \nabla \times \hat{I} = 0. \tag{22}$$

这说明 (20) 式中 $\hat{\phi}$ 的解恒为零，即在任何时刻满足 (8) 与 (9) 式的 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$，总能满足条件 (10) 式，即满足规范条件之一，

$$\hat{\phi} = \nabla \times \hat{B} + \mu^{-1} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0.$$

证明完毕.

参　考　文　献

[1] A. M. Косевич, Ж.Э.Т.Ф., **42** (1) (1962).
[2] 欧　发，哈尔滨工业大学学报 (**3—4**) (1978), 196.

ON THE GAUGE TRANSFORMATION OF THE TENSOR POTENTIALS FOR THE FIELD OF MOVING DISLOCATIONS

OU FA
(*Harbin Institute of Technology*)

ABSTRACT

The problem on gauge transformation of the tensor potentials ($\hat{A}$ and $\hat{B}$)[1] associated with the dislocation field is treated. It is shown that the expressions of this transformation may take the form

$$\hat{B}' = \hat{B} + \nabla \boldsymbol{F}$$

$$\hat{A}' = \hat{A} - \rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{\chi}' = \boldsymbol{\chi} - \rho \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{F},$$

where $\chi_i = e_{ikl} A_{kl}$. $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{G}$ are some arbitrary vector functions of position and time, but they must satisfy the relations

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{G}, \quad \nabla^2 \boldsymbol{F} - \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{F} = 0.$$

Furthermore, it is proved that the gauge conditions presented in [1] are compatible with the inhomogeneous wave equations for $\hat{A}$ and $\hat{\boldsymbol{B}}$