第 30 卷 第 7 期 物 理 学 报 Vol. 30, No. 7
1981 年 7 月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1981

参量不稳定性对强场 Tokamak 中电子迴旋加热的影响[1)]

周玉美 蔡诗东
(中国科学院物理研究所)
1980 年 9 月 27 日收到

提 要

本文研究了垂直或平行外磁场入射一个频率在电子迴旋频率附近的波的若干可能的参量激发的通道. 发现对垂直入射的高功率的电子迴旋波,在进入线性模转换层以前,参量不稳定性可以发生. 泵波参量衰变成离子伯恩斯坦模或低杂波是最可能的参量过程.

一、引 言

近年来,由于高功率迴旋激射器 (Gyrotron) 技术的迅速发展[1],使得人们对用频率在电子迴旋频率附近的波加热磁约束等离子体的兴趣大大增加了[2]. 迴旋激射器可以产生在 Maser 区域的波,其频率在 Tokamak 的电子迴旋频率附近 ($\omega_0 \sim \Omega_e$), 这些波可以用波导管输入.

关于迴旋激射加热的线性模转换机制以及波的传播已经有人仔细地研究了[3]. 我们认为对目前可用的高功率的迴旋激射器来说,在泵波到达线性模转换层以前,参量不稳定性可能会发生. 泵波可以衰变成一个高频波和一个低频波,离子可以响应低频波而被加热.

本文研究了垂直或平行外磁场入射一个频率在电子迴旋频率附近的波的若干可能的参量不稳定性的通道. 典型的强场 Tokamak (例如 Alcator 等)的参数如下: $B = 50\text{kG}$, $n_e = n_i = 10^{14}\text{cm}^{-3}$, $T_e = 500\text{eV}$, 即 $\Omega_e = 8.8 \times 10^{11}/\text{sec}$, $\omega_{pe} = 5.5 \times 10^{11}/\text{sec}$, $\lambda_{De} = 2.4 \times 10^{-3}\text{cm}$, $v_{the} = 1.3 \times 10^9\text{cm/sec}$. 除特别说明外,本文计算中所用的迴旋激射器的功率密度为 10kW/cm^2 (相应的电场 $E_0 \simeq 2000\text{V/cm}$), 频率 $\omega_0 \simeq 7 \times 10^{11}/\text{sec}$. 上述所给的参量是指等离子体磁轴处的值. 但是在大 Tokamak 里,外磁场 $\boldsymbol{B}(r)$ 是反比于离开环轴的距离的,等离子体密度剖面中央近似平顶.

我们发现: 1)近似垂直入射的慢非常模衰变成另一个慢非常模和一个离子伯恩斯坦模或一个低杂波是最可能的参量过程. 2)近似平行入射的电子迴旋波可以在电子迴旋层被吸收,没有明显的参量不稳定性发生.

---

1) 本文于 1980 年 9 月在第二次国际环形等离子体加热 Grenoble-Verenna 会议上报告过.

二、一些可能的参量不稳定性的通道

若有一个高频泵波

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}+c.c. \tag{1}$$

射到一个磁化等离子体上. 用有质动力的方法可以得到对低频子波 $(\omega,\boldsymbol{k})$ 的非线性色散关系[4]

$$\frac{1}{\chi_e(\boldsymbol{k},\omega)}+\frac{1}{1+\chi_i(\boldsymbol{k},\omega)}=\frac{k^2}{c^2}[\boldsymbol{v}_{0-}\cdot\mathbf{G}_+\cdot\boldsymbol{v}_{0+}+\boldsymbol{v}_{0+}\cdot\mathbf{G}_-\cdot\boldsymbol{v}_{0-}]. \tag{2}$$

这里 $\mathbf{G}_\pm=\left[k_\pm^2\mathbf{I}-\frac{\omega_\pm^2}{c^2}\boldsymbol{\epsilon}_\pm-\boldsymbol{k}_\pm\boldsymbol{k}_\pm\right]^{-1}$，$\chi$ 是线性极化率，$v_j=i|e|\omega_j\chi_e(\omega_j)\cdot E_j/(m_e\cdot\omega_{pe}^2)$，$\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ 是线性介电张量，角标"±"分别表示上边带和下边带模，角标"0"表示泵浦. 这里用的符号同文献[4].

本文所感兴趣的是三波耦合，即仅考虑低边带模（stokes 分量）. 能量和动量守恒要求 $\omega_-=\omega-\omega_0$，$\boldsymbol{k}_-=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$. 对反向散射，我们取 $\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{k}_0$. 以下将讨论六个参量衰变通道以及在强场 Tokamak 里它们加热等离子体的可能性.

1. 垂直或近似垂直于磁场入射

若泵浦为垂直于磁场入射的 X 模，则色散关系 (2) 式可以简化为[4]

$$\frac{1}{\chi_e}+\frac{1}{1+\chi_i}=-\frac{k^2}{\omega_0^4}\frac{[\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2]^2}{\mathscr{D}_-}\times\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{E_0^2}{(\omega_0^2-\Omega_e^2)(\omega_0^2-\omega_{UH}^2)}. \tag{3}$$

这里

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}_-=(s_--n_-^2)s_--D_-^2,\quad s_-=1-\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_-^2-\Omega_\alpha^2}=s,\\&D_-=-\frac{\omega_{pe}^2\Omega_e}{\omega_-(\omega_-^2-\Omega_e^2)}=-D,\quad \Omega_\alpha\equiv\left|\frac{q_\alpha B}{m_\alpha c}\right|,\\&\varepsilon\equiv iE_{0x}/E_{0y}.\end{aligned} \tag{4}$$

1) X 模 → X 模 + 离子伯恩斯坦模

若入射波几乎垂直于外磁场，即 $\kappa\equiv\frac{k_{\parallel}^2}{k^2}\frac{m_i}{m_e}\sim 1$. $k_{\parallel}$ 对 X 模的贡献可以略去，但 $k_{\parallel}$ 对离子伯恩斯坦模是很重要的，必须保留. $\omega\leqslant\Omega_i$ 的离子伯恩斯坦模的线性色散关系为

$$\epsilon=\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2-\omega^2}\frac{k_\perp^2}{k^2}-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\frac{k_{\parallel}^2}{k^2}=0. \tag{5}$$

这里我们已经假设 $b_{i,e}\equiv\frac{k^2v_{\text{th}i,e}^2}{2\Omega_{i,e}}\ll 1$，(5) 式的解为 $\omega^2=\Omega_i^2\frac{\kappa}{1+\kappa}$. 对共振衰变，(3)—(5) 式给出阈值

$$E_{0T}=\left(\frac{\Gamma\Gamma_-}{\omega\omega_0}\right)^{1/2}\frac{[(\omega_0^2-\omega_{0H}^2)^2-\omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2|}\frac{\omega_0^2}{k_0}\frac{m_e}{e}$$

$$\times \frac{(\Omega_i^2-\omega^2)^{1/2}}{\omega_{pi}}\left[1+\frac{1}{\kappa}\frac{\omega^4}{(\Omega_i^2-\omega^2)^2}\right]^{1/2}. \tag{6}$$

这里 Γ, Γ_- 分别为两个子波的阻尼率．最大增长率为

$$\gamma_{\max}=\frac{e}{m_e}\frac{k_0E_0}{\omega_0^2}\sqrt{\omega\omega_0}\frac{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2|}{[(\omega_0^2-\omega_{UH}^2)^2+\omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}\frac{\omega_{pi}}{[\Omega_i^2-\omega^2]^{1/2}}$$
$$\times\frac{1}{\left[1+\frac{1}{\kappa}\frac{\omega^4}{(\Omega_i^2-\omega^2)^2}\right]^{1/2}}. \tag{7}$$

这个通道有非常低的阈值和较大的增长率． 当 κ 是 1 的量级时，阈值和最大增长率对 κ 都不敏感．

离子伯恩斯坦模的谐波 ($\Omega_i<\omega\lesssim 2\Omega_i$) 有较高的阈值和较低的增长率．

假如我们提高泵波的频率并增大它的强度，这时泵波可以衰变成 Ion Bernstein Reactive Quasi-Mode.

2) X 模 $\rightarrow$ X 模 $+$ Ion Bernstein Reactive Quasi-Mode

假如取泵波的功率密度为 70kW/cm²(相应的电场 $E_0\simeq 5300$V/cm)，频率 $\omega_0\simeq 9.5\times 10^{11}$/sec，这时泵波将衰变成 Ion Bernstein Reactive Quasi-Mode. 对低频子波共振近似不再成立，但对低边带模仍可用共振近似．仍令 $\kappa=1$，色散关系变成

$$\omega^3-\frac{\Omega_i^2}{2}\omega+A=0. \tag{8}$$

这里

$$A=\left\{\frac{k_0\omega_{pi}|\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2|}{\omega_0^{3/2}[(\omega_0^2-\omega_{UH}^2)^2+\omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}\frac{e}{m_e}E_0\right\}^2.$$

(8) 式的不稳定解为

$$\omega=(2.58+2.9i)\times 10^8/\text{sec}. \tag{9}$$

这时 Ion Bernstein Reactive Quasi-Mode 的频率和增长率都是 E_0 的函数，并 $\gamma_{\max}\sim \mathrm{Re}\,\omega$. 若继续增加泵波的频率或强度，则 ω 的实部和虚部也将继续增加．但是，当泵波的功率密度为 10kW/cm² 时，这个通道是稳定的．

3) X 模 $\longrightarrow$ X 模 + 低杂波

若低频子波是低杂波，它的线性色散关系为

$$\epsilon=1+\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}=0. \tag{10}$$

在共振近似下，(10)，(4) 和 (3) 式给出阈值

$$E_{0T}=\left(\frac{\Gamma\Gamma_-}{\omega\omega_0}\right)^{1/2}\frac{\omega_{UH}\Omega_e}{\omega_{pe}^2}\frac{m_e}{e}\frac{\omega_0^2}{k_0}\frac{[(\omega_0^2-\omega_{UH}^2)^2+\omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2|} \tag{11}$$

和最大增长率

$$\gamma_{\max}=\frac{e}{m_e}E_0\frac{k_0}{\omega_0^2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{UH}\Omega_e}\sqrt{\omega\omega_0}\frac{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e+\omega_0)-\omega_{pe}^2|}{[(\omega_0^2-\omega_{UH}^2)^2+\omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}. \tag{12}$$

在同样的参数下，此通道的阈值几乎比离子伯恩斯坦模的通道高一个量级，而增长率几乎低一个量级．

4) X 模 $\rightarrow$ X 模 $+$ 离子声波

对于这个通道,我们有 $\omega \gg \Omega_i$. 阈值为

$$E_{0T} = \frac{m_e}{e}\left(\frac{\Gamma\Gamma_-}{\omega\omega_0}\right)^{1/2} \frac{2[(\omega_0^2 - \omega_{UH}^2)^2 + \omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e + \omega_0) - \omega_{pe}^2|}\,\omega_0^2\lambda_{De}. \tag{13}$$

最大增长率

$$\gamma_{\max} = \frac{e}{m_e}\frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{\omega_0^2}E_0\frac{1}{2\lambda_{De}}\frac{|\omega_0(\varepsilon\Omega_e + \omega_0) - \omega_{pe}^2|}{[(\omega_0^2 - \omega_{UH}^2)^2 + \omega_{pe}^2\Omega_e^2]^{1/2}}. \tag{14}$$

这个通道有较高的阈值. 为了使离子声波能够被激发,还需要 $T_e/T_i \geqslant 4$.

2. 平行或近似平行于磁场入射

若泵波为平行于磁场的电子迴旋波 (ECW),其频率 $\omega_0 \lesssim \Omega_e$,色散关系 (2) 式可以简化成

$$\frac{1}{\chi_e} + \frac{1}{1 + \chi_i} = -\frac{k^2}{\omega_0^2}\left(\frac{e}{m_e}\right)^2\frac{1 + \mu\theta^2}{\mathscr{D}_-}\frac{2E_0^2}{(\omega_0 - \Omega_e)^2}. \tag{15}$$

这里 $\mathscr{D}_- = s_- - n_-^2 - D_- + \nu_{\theta^2}$, θ 是 $\boldsymbol{k}_0$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 之间的夹角. 仅考虑 θ 较小的情况, 即 $\sin\theta \simeq \theta$, 并仅保留到 θ^2 项.

$$\mu \equiv \frac{R}{p}\left(\frac{R - p}{2D} + \frac{R}{p}\frac{\omega_0 - \Omega_e}{\omega_0}\right), \qquad \nu \equiv \frac{R(p - R)}{2p},$$

$$R \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega_0 - \Omega_e)(\omega_0 + \Omega_i)} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0(\omega_0 - \Omega_e)},$$

$$p \equiv 1 - \sum_a \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_0^2}.$$

在我们感兴趣的参数区域里,泵波服从色散关系

$$n^2 = R\left(1 - \frac{R - p}{2p}\vartheta^2\right). \tag{16}$$

1) ECW$\longrightarrow$ECW + 离子声波 ($\omega \gg \Omega_i$)

用 (15), (16) 和 (4) 式并令 $\theta = 0$, 在共振近似下,得到阈值

$$E_{0T} = \left(\frac{\Gamma\Gamma_-}{\omega\omega_0}\right)^{1/2}\left(\frac{m_e}{e}\right)\lambda_{De}ck_0[\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)]^{1/2}\left[1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k_0^2}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{1/2}. \tag{17}$$

最大增长率

$$\gamma_{\max} = \frac{e}{m_e}\frac{E_0}{k_0c\lambda_{De}}\left[\frac{\omega\omega_0}{\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)}\right]^{1/2}\frac{1}{\left[1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k_0^2}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{1/2}}. \tag{18}$$

若入射泵波与磁场 B_0 成一小角度 θ, 则阈值和最大增长率变成

$$E_{0T} = \left(\frac{\Gamma\Gamma_-}{\omega\omega_0}\right)^{1/2}\left(\frac{m_e}{e}\right)\lambda_{De}[\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)]^{1/2}\omega_0R^{1/2}\left[1 + \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{1/2} \times\left\{1 - \left[\frac{(R - p)R\Omega_e - F}{4p(R\Omega_e + \Omega_e - 2\omega_0)} + \frac{y}{2}\right]\theta^2\right\}, \tag{19}$$

$$\gamma_{\max} = \left(\frac{e}{m_e}\right)\frac{E_0}{\lambda_{De}\omega_0R^{1/2}}\left[\frac{\omega\omega_0}{\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{-1/2} \times\left\{1 - \left[\frac{(R - p)R\Omega_e - F}{4p(R\Omega_e + \Omega_e - 2\omega_0)} + \frac{y}{2}\right]\theta^2\right\}^{-1}. \tag{20}$$

这里

$$F = \frac{2\omega_0 - \Omega_e}{\omega_0(\Omega_e - \omega_0)}[\omega_0(\Omega_e - \omega_0)(R - p) - R\omega_{pe}^2] + [\omega_0(\Omega_e - \omega_0) + \omega_{pe}^2]\frac{2\omega_{pe}}{\omega_0^3}.$$

在我们所考虑的参量范围内，稍微斜一点的入射，给出稍低的增长率和稍高的阈值．由于要激发离子声波，这里需要 $T_e/T_i \geqslant 4$.

2) ECW⟶ECW + 电阻性准离子模 (Resistive Quasi-Ion Mode)

这个通道在 $T_e \simeq T_i$ 时也是可能的．因此对 Tokamak 来说，这个通道是现实的．对电阻性准离子模，若取 $\theta = 0$, $v_{\text{th}e} \gg \frac{\omega}{k} \sim v_{\text{th}i}$，则

$$\chi_e = (k\lambda_{De})^{-2} \qquad \chi_i = \left[1 + \frac{\omega}{kv_{\text{th}i}} Z\left(\frac{\omega}{kv_{\text{th}i}}\right)\right] \Big/ (k\lambda_{De})^2.$$

若取反向散射，则 $(k\lambda_{De})^2 \ll 1$，所以 $|\chi_e|, |\chi_i| \gg 1$．得到阈值为

$$E_{0T} = \left(\frac{m_e}{e}\right)\left(\frac{\Gamma_-}{\omega_0}\right)^{1/2} \lambda_{De} c k_0 [\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)]^{1/2} \times \left[1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k_0^2}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{1/2} \left[\frac{2 + \zeta \operatorname{Re} Z(\zeta)}{2\zeta \operatorname{Im} Z(\zeta)}\right]^{1/2}. \tag{21}$$

这里 $\zeta = \omega/kv_{\text{th}i}$．相对于 ω 使 E_{0T} 最小化，则得到当 $\omega = kv_{\text{th}i}$ 时，即 $\zeta = 1$ 时，电阻性准离子模有最小的阈值

$$E_{0T} = \left(\frac{m_e}{e}\right)\left(\frac{\Gamma_-}{\omega_0}\right)^{1/2} \lambda_{De} c k_0 [\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)]^{1/2} \left[1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k_0^2}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{1/2} 0.84 \tag{22}$$

和最大的增长率

$$\gamma_{\max} = \left(\frac{e}{m_e}\right)\frac{E_0^2}{c^2k_0^2\lambda_{De}^2}\frac{\omega_0}{\Omega_e(\Omega_e - \omega_0)}\left[1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k_0^2}\left(1 - \frac{2\omega_0}{\Omega_e}\right)\right]^{-1/2} 1.4. \tag{23}$$

表　1

通　　道	E_{0T} (V/cm)	$\gamma_{\max}$ (1/sec)	γ (1/sec)	Γ_-/ω_-	Γ/ω	备　　注
X⟶X + IEQM		2.9×10^8	2.9×10^8			$\omega_0 = 9.5\times10^{11}$/sec $E_0 = 5300$V/cm
X⟶X + IB	37	2.1×10^7	2.1×10^7	4.4×10^{-7}	1.5×10^{-3}	$\omega_0 = 7\times10^{11}$/sec $E_0 = 2000$V/cm
X⟶X + LH	429	1.5×10^6	1.5×10^6	4.4×10^{-7}	3×10^{-5}	$\omega_0 = 7\times10^{11}$/sec $E_0 = 2000$V/cm
X⟶X + IA	1240	1.4×10^7	0.18×10^6	4.4×10^{-7}	0.15	$\omega_0 = 7\times10^{11}$/sec $E_0 = 2000$V/cm $T_e/T_i \geqslant 4$
ECW⟶ECW + IA	1614	1.3×10^8	0.15×10^8	4.3×10^{-5}	0.15	$\omega_0 = 7\times10^{11}$/sec $E_0 = 2000$V/cm $T_e/T_i \geqslant 4$
ECW⟶ECW + QI	3500	6.9×10^7	6.9×10^7	4.3×10^{-5}		$\omega_0 = 7\times10^{11}$, $T_e = T_i$ $E_0 = 5300$V/cm

以本文所用的参数代入，则 $E_{0T} \simeq 3500\text{V/cm}$，超过了功率密度为 10kW/cm^2 的泵波的场强 E_0，所以此通道是稳定的. 但若将泵波的功率密度增加到 70kW/cm^2，相应的电场 $E_0 \simeq 5300\text{V/cm}$，这时此通道可以是不稳定的.

以上讨论的各种可能的参量激发的阈值、增长率等列于表 1. 可以看到，衰变成一个慢 X 模和一个离子伯恩斯坦模或低杂波是最可能的参量过程.

三、结 论

1. 若用高功率的迴旋激射器对强磁场和高密度的 Tokamak 中的等离子体加热，则在泵波到达线性模转换层以前，就会有参量不稳定性发生，因而研究泵波的非线性行为是重要的.

2. 对近似平行环向磁场入射的电子迴旋波，参量不稳定性是不重要的.

3. 对于垂直或近似垂直环向磁场入射的高功率的非常模，参量不稳定性可以发生. 在泵波到达高杂共振层以前，由于参量不稳定性，它可以衰变成另一垂直于磁场并和入射泵波传播方向相反的电磁波，此电磁波可以传播出等离子体，因此泵波的一些能量将被浪费.

4. 泵波参量衰变成离子伯恩斯坦模或低杂波是最可能的参量过程. 低频静电子波将停留在等离子体里并最终被等离子体吸收，从而加热电子和离子.

参 考 文 献

[1] H. R. Jory, Joint Varenna-Grenoble Int. Symp. on Heating in Toroidal Plasmas, (July 1978); V. V. Alikaev *et al.*, *ibid.*

[2] M. Bornatici and F. Engelmann, *Radio Science*, **14**(1979), 28; 309; *Comments Plasma Phys. Cont. Fusion*, 4(1979), 139; I. Fidone *et al.*, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 645; 22(1979), 1833; V. V. Alikaev *et al.*, *Sov. J. Plasma Phys.*, 2(1976), 212; A. G. Litvak *et al.*, *Nucl. Fusion*, **17**(1977), 659.

[3] F. Deluca and C. Maroli, *J. Plasma Physics*, **20**(1978), 299.

[4] 周玉美、蔡诗东，物理学报，**29**(1980)，916.

PARAMETRIC EXCITATION EFFECTS ON THE ELECTRON CYCLOTRON HEATING IN HIGH FIELD TOKAMAK

ZHOU YU-MEI, CAI SHI-DONG

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Several possible parametric decay channels are studied in high field and dense Tokamay range. It is found that for the high power nearly perpendicular incident, electron cyclotron wave parametric processes may occur before it encounters the linear mode-conversion-layer. The pump wave decays into an ion Bernstein wave or a lower hybrid wave is most probable.