

由 Hanusse 定理的完整化 而导出一个新定理

湛星华 谢大来

(西北大学)

汪培庄

(北京师范大学)

1980年10月28日收到

提 要

本文论述了非平衡统计热力学中 Hanusse 定理的完整化问题,并由此引导出一个新定理:
“如果中间反应物至多只有两种,参加每一步反应至多只有两分子,则不可能由一个定态到达任何一个极限环。”

一

关于体系在反应扩散过程中所具稳定的极限环性质的研究,在蓬勃发展着的非平衡统计热力学理论,及其在化学、生物学、天文学等领域的应用中,占据着一个十分重要的位置。

1972年, Hanusse^[1] 对空间均匀体系证明了下述定理。1973年, Tyson 和 Light^[2] 又独立地重新导出了这个定理,并推广到包含扩散的体系。这个定理说:

“如果反应阶段只是单分子和双分子的,在包含两个可变中间产物的反应序列中,不可能有包围不稳定结点或焦点的极限环。”

是否有允许包围鞍点的极限环存在呢? 定理没有回答。

不能一般地断言不存在包含鞍点的极限环。察波津斯基反应就是一个反例。这主要是根据文献[3]的一个定理:

“一个化学反应过程,如果每个反应式右端各个中间反应物种的计量系数均 ≤ 2 , 则不允许有包围不稳定结点或焦点的极限环,而察波津斯基反应当取 $f = 1$ 时满足定理条件。所以,它所产生的极限环只能包围鞍点。”

只能就一些特殊情形断言极限环不能包围鞍点,例如 Andronov 等曾给出了这样一类命题^[4]。我们知道,一个闭轨线若只包围一个单一奇点,则这个奇点不可能是鞍点。

二

下面我们将论证,就 Hanusse 所说的情形可断定: 极限环是不能包围鞍点的。

先从物理直观粗略地来看,如果 $*$ 是一个鞍点, Γ 是平面(二维)的一个极限环,从 $*$ 出发,要想“趋于” Γ , 可能有图1的走向方式。而由于积分曲线对 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$

都要有意义,而彼此不交,从鞍点四周积分曲线的拓扑结构来看,在*的四周好象还应出现四个奇点(见图2),加上鞍点本身这个奇点,在极限环中就会有五个奇点。

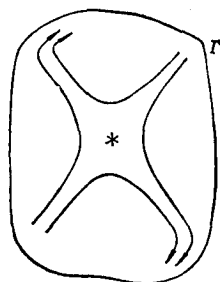


图1 从*出发“趋于” r 的可能走向

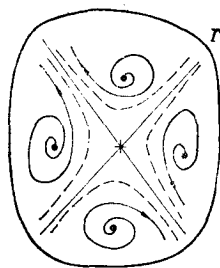


图2 在*四周好象还应有四个奇点

但按照 Hanusse 定理的条件看,至多只有两个中间物种,每一个化学反应至多是两分子反应。因此,运动方程至多是二元二次方程,至多只能有四个奇点。而这是与上面的分析矛盾的。

下面我们再给出严格的数字证明。

对于 Hanusse 定理的条件来说,其运动方程至多是二元二次方程,即右端为二元二次多项式方程

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y). \quad (1)$$

而对于此方程,根据文献[5, 6]知有下列四个引理。

- 引理 I^[5] 不存在包含三个初等奇点在其内部的闭轨线;
- 引理 II^[5] 不存在包含高阶奇点的闭轨线;
- 引理 III^[6] 鞍点之指数为 -1 , 结点焦点及中心之指数为 $+1$;
- 引理 IV^[6] 闭轨线中必有奇点存在,且其指数和为 $+1$ 。

根据上述四个引理,可证明下述定理:

“方程(1)的闭轨线中不可能含鞍点”。

证明如下:

1. 由引理 II 知,方程(1)的闭轨线中只能含初等奇点;
2. 因方程(1)最多有四个初等奇点,故方程(1)的闭轨线中所含奇点数目不能大于4;
3. 由引理 III 及引理 IV 知,所含奇点数目不能等于4或2;
4. 由引理 I 知,闭轨线中奇点数目不能等于3;
5. 故闭轨线中只能含一个初等奇点。由引理 III 及 IV 知,此奇点不能是鞍点。也就是说,只要有一个鞍点出现,就不会有包含此鞍点的闭轨线,而不用再考虑是否在鞍点附近还有其他高阶或初等奇点。

这样,我们就可以改进 Hanusse 定理,而导出一个完整化的新定理:

“如果中间反应物至多只有两种,参加每一步反应至多只有两分子,则不可能由一个定态到达任何一个极限环。”

本文在 1980 年 7 月全国非平衡统计物理会议上宣读。会议期间, G. Nicolis 教授等曾就本文内容与作者进行了有益的讨论, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] P. Hanusse, C. R. Acad, *Sci. Ser.*, **C 274** (1972), 1245.
- [2] J. Tyson and T. Light, *J. Chem. Phys.*, **59** (1973), 4164.
- [3] 汪培庄、刘若庄、湛垦华, 自然杂志(研究通信), **12** (1979), 728.
- [4] A. A. Andronov, A. A. Vit and C. E. Khaikin, *Theory of Oscillators*, Pergaman, Oxford, (1966).
- [5] 叶彦谦著, 极限环论, 上海科学技术出版社, 第十一章 (1965).
- [6] 秦元勋编著, 微分方程所定义的积分曲线(上册), 科学出版社, 第三编第一章 (1959).

A NEW THEOREM DEDUCED FROM THE COMPLETION OF HANUSSE'S THEOREM

ZHAN KEN-HUA XIE DAI-LAI WANG PEI-ZHUANG
(North-West University) (Beijing Normal University)

ABSTRACT

A new theorem have been deduced from the completion of Hanusse's theorem. It states: "If reactants in the intermediate reaction are not more than two kinds and the numbers of molecule taking part in any one reaction are not more than two, then it is not possible that a steady state arrives at a limit cycle".