

彩虹全息图成象的傅里叶分析¹⁾

蔡履中 张幼文²⁾

(山东大学) (上海交通大学)

1981年10月10日收到

提 要

本文用傅里叶光学的观点,对任意限制孔径下虹全息成象过程中的(单色)点扩散函数及传递函数进行了系统的分析,揭示出它们与限制孔径的本质联系,建立起与一般光学成象系统可以类比的统一理论,为极限分辨率和截止频率的计算提供了形式简单、意义明确的数学依据。

一、引 言

在全息术的发展进程中,由 Benton 于 1969 年首次提出^[1]的虹全息具有应用价值。它在一定程度上(例如沿某一方向)保留了全息象的立体感,而且可用普通白光再现,图象明亮,白天亦可观察。正因为它有这些优点,已被应用于商业广告、艺术摄影、全息立体电影等多种领域。1978 年,Chen 和 Yu (杨振宁)对 Benton 的二步法作了改进,提出了一步法彩虹全息术^[2],此方法不需要事先制备母全息,使拍摄过程大为简化,并已在干涉计量、彩色胶片储存、白光再现彩色象等方面得到了运用^{[3]-[5]},被认为是全息术的一个重要进展。虹全息方面的文献,过去多侧重于实验。在理论分析方面,Yu, Chen, 庄松林等人已就虹全息的分辨率、色模糊、空间频率带宽等问题作了一些分析^{[6]-[9]},得出了一系列有价值的结论。但是,上述文献对(单色)点扩散函数和分辨率的讨论都只限于孔径为一维狭缝的情形,而且这种计算往往是冗长繁琐的。实用中出于某种目的,孔径也可作成别的形状,例如为得到两个方向的立体感,Yu 曾建议拍摄具有十字形狭缝的虹全息,而一般象面全息亦可看作具有圆形孔径的虹全息的一种特例。对于这种孔径有变化的情况,文献[7,8]中的直接算法将更为繁复甚至成为不可能。本文试图利用傅里叶光学的观点,对二维任意孔径的普遍情况下虹全息成象的点扩散函数、极限分辨率及其传递函数进行比较系统的分析和讨论,并以简明的数学形式揭示它们与限制孔径的本质联系,从而将已经成熟的傅里叶光学引用到虹全息中来,对虹全息建立起与一般光学成象可以类比的统一理论。因为普通菲涅耳全息图可以看作是虹全息的特例,所以这些结果对于普通全息图也是有参考价值的。

本文分析皆对再现光中某一特定波长而言,即这里的点扩散函数实质上是指单色点

1) 本文曾在全国第二次光学信息处理学术报告会上宣读(1981年9月,青岛)。

2) 现在美国 Pennsylvania State University 访问研究。

扩散函数, 以下不再注明.

二、虹全息成象的点扩散函数

文献 [7, 8] 中分析了物光限制孔径为一维狭缝时的点扩散函数, 我们将采用类似的方法, 把孔径推广为二维任意形状, 根据严格的菲涅耳-基尔霍夫标量场衍射理论, 求出点扩散函数的一般表达式.

无论二步法虹全息还是一步法虹全息, 其物理实质都是记录时物光受到一定形状和大小的孔径的限制, 因此它们都可以用图 1 来表示. 对二步法来说, 图中物 O 是母全息的再现象, 它通过孔径衍射记录在虹全息干板 H 上. 对一步法来说, 物 O 是记录时透镜直接所成的象, 它也要通过孔径衍射记录在 H 上.

图 1 中 (ξ, η) 为孔径平面, (x, y)

为全息片平面, (α, β) 为再现象平面. O, I, R, C 各点坐标分别记为 $(x_o, y_o, d), (\alpha_r, \beta_r, l_r), (x_r, y_r, L_1)$ 和 (x_c, y_c, L_2) . 设记录时参考光及再现光均为会聚波.

我们首先不考虑孔径的衍射效应, 求出再现理想象点的坐标 (α_r, β_r, l_r) .

记录时射在 H 面的物光复振幅分布在旁轴近似下 (舍去与 x, y 无关的复数因子, 下同) 为

$$O = \exp \left\{ -ik_1 \left(\frac{x^2 + y^2}{2d} - \frac{x_o x + y_o y}{d} \right) \right\}, \quad (1)$$

参考波光为

$$R = \exp \left\{ -ik_1 \left(\frac{x^2 + y^2}{2L_1} - \frac{x_r x + y_r y}{L_1} \right) \right\}, \quad (2)$$

在胶片线性区, 振幅透过率为

$$t \propto I = |O + R|^2 = |O|^2 + |R|^2 + O^* R + OR^*. \quad (3)$$

再现光为

$$C = \exp \left\{ -ik_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2L_2} - \frac{x_c x + y_c y}{L_2} \right) \right\}. \quad (4)$$

以上各式中 $k_1 = 2\pi/\lambda_1, k_2 = 2\pi/\lambda_2, \lambda_1$ 和 λ_2 分别为记录和再现时波长. I 为记录时胶片上光强.

t 中对再现实象起作用的是 COR^* 项,

$$\begin{aligned} COR^* = \exp \left\{ -ik_2 \left[\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 L_1} + \frac{1}{2L_2} \right) (x^2 + y^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\lambda_2 x_o}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 x_r}{\lambda_1 L_1} + \frac{x_c}{L_2} \right) x - \left(\frac{\lambda_2 y_o}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 y_r}{\lambda_1 L_1} + \frac{y_c}{L_2} \right) y \right] \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

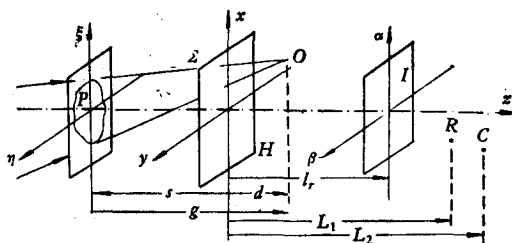


图 1 $P(\xi, \eta)$ 为限制孔径; O 为物点; R 为记录参考光源; C 为再现光源; I 为再现象点; H 为全息干板; $\Sigma(x, y)$ 为全息片孔径.

与会聚于点 (α_r, β_r, l_r) 的波式

$$\exp \left\{ -iK_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2l_r} - \frac{\alpha_r x + \beta_r y}{l_r} \right) \right\}$$

相比较知

$$\frac{1}{l_r} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 L_1} + \frac{1}{L_2},$$

$$\frac{\alpha_r}{l_r} = \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 x_r}{\lambda_1 L_1} + \frac{x_c}{L_2},$$

$$\frac{\beta_r}{l_r} = \frac{\lambda_2 y_0}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 y_r}{\lambda_1 L_1} + \frac{y_c}{L_2}$$

即

$$\begin{aligned} l_r &= \frac{\lambda_1 d L_1 L_2}{\lambda_2 L_1 L_2 - \lambda_2 d L_2 + \lambda_1 d L_1}, \\ \alpha_r &= \frac{\lambda_2 x_0 L_1 L_2 - \lambda_2 x_r d L_2 + \lambda_1 x_c d L_1}{\lambda_2 L_1 L_2 - \lambda_2 d L_2 + \lambda_1 d L_1}, \\ \beta_r &= \frac{\lambda_2 y_0 L_1 L_2 - \lambda_2 y_r d L_2 + \lambda_1 y_c d L_1}{\lambda_2 L_1 L_2 - \lambda_2 d L_2 + \lambda_1 d L_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

以下考虑孔径的衍射效应, 射到 (ξ, η) 平面上的物光为

$$u_o = \exp \left\{ -ik_1 \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2g} - \frac{\xi x_0 + \eta y_0}{g} \right) \right\}, \quad (7)$$

u_o 通过菲涅耳衍射到达 H 平面的光场分布为

$$O(x, y; k_1) = \iint_{P(\xi, \eta)} u_o \exp \left\{ ik_1 \left[\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2s} \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (8)$$

记录参考光 R 和再现光 C 的表达式仍为 (2) 和 (4) 式, 透过 H 的光场对产生实象有贡献的项仍为 COR^* . 从 H 平面到成象面的点扩散函数为

$$h(\alpha - x, \beta - y; k_2) = \exp \left\{ ik_2 \left[\frac{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2}{2l_r} \right] \right\}, \quad (9)$$

衍射成象点的复振幅分布为

$$u_r(\alpha, \beta; k_2) = \iint_{\Sigma(x, y)} COR^* h(\alpha - x, \beta - y; k_2) dx dy. \quad (10)$$

上式代入 (6)–(9) 式, 通过计算可得

$$\begin{aligned} u_r(\alpha, \beta; k_2) &= \iint_{\Sigma(x, y)} \exp \left\{ ik_2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{d} \right) (x^2 + y^2) + \left(\frac{\alpha_r - \alpha}{l_r} - \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 \xi}{\lambda_1 s} \right) x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\beta_r - \beta}{l_r} - \frac{\lambda_2 y_0}{\lambda_1 d} - \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 s} \right) y \right] \right\} dx dy \\ &\quad \times \iint_{P(\xi, \eta)} \exp \left\{ ik_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2g} \right) (\xi^2 + \eta^2) + \frac{x_0}{g} \xi + \frac{y_0}{g} \eta \right] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

考虑到由于孔径 P 的限制, 记录时物光照亮 H 的区域只占 H 很小一部分, 此区域外物光迅速衰减到零, 故积分限 $\Sigma(x, y)$ 可推广到无穷大, 这时利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i(Ax^2 + Bx)\} dx = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \exp\{-iB^2/4A\}$$

和 $g = s + d$, 同样舍去复常数因子, 可得

$$\begin{aligned} u_r(\alpha, \beta; k_2) &= \iint_{P(\xi, \eta)} \exp \left\{ ik_2 \left[\frac{d}{gl_r} (\alpha_r - \alpha) \xi + \frac{d}{gl_r} (\beta_r - \beta) \eta \right] \right\} d\xi d\eta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) \exp \left\{ -i2\pi \frac{d}{\lambda_2 gl_r} [(\alpha - \alpha_r) \xi + (\beta - \beta_r) \eta] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

上式中左方 $u_r(\alpha, \beta; k_2)$ 为位于 (x_o, y_o, d) 的物点由于孔径 P 的衍射作用而产生的象点弥散, 也即从物面到再现现象面的点扩散函数, 依通常习惯, 改记为 $h(\alpha, \beta; x_o, y_o)$. 右方显然为孔径 $P(\xi, \eta)$ 的傅里叶变换式. 记傅里叶变换算符为 $\mathcal{F}$, 则有

$$h(\alpha, \beta; x_o, y_o) = \mathcal{F}\{P(\xi, \eta)\} \Big|_{f_x = \frac{d}{\lambda_2 gl_r} (\alpha - \alpha_r), f_y = \frac{d}{\lambda_2 gl_r} (\beta - \beta_r)}. \quad (13)$$

这样, 就把普遍情况下虹全息成象的点扩散函数与物光限制孔径通过傅里叶变换直接联系起来, 而变换后空间频率 f_x, f_y 与象面坐标 (α, β) 的特定关系则由 (13) 式确定.

对再现虚象(它由 t 中 CO^*R 项产生)的分析, 也可得到意义相同的结论.

三、虹全息成象的极限分辨率

文献 [7, 8] 已求得了孔径为一维狭缝时的极限分辨率. 实际上, 由 (13) 式通过傅氏变换可直接得到各种限制孔径下的点扩散函数, 从而确定该孔径下的极限分辨率, 不需逐一重复第二节中复杂的计算过程. 这种方法意义明确, 运算简单, 特别是在孔径稍微复杂时更能显示其优越性. 下面列举三种情况为例说明之.

1. 矩形缝孔径(图 2)

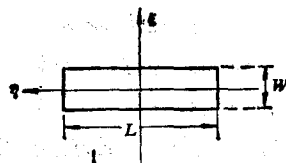


图 2

$$P(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{W}\right). \quad (14)$$

代入 (13) 式, 得

$$\begin{aligned} h &= LW \text{sinc}(Wf_x) \text{sinc}(Lf_y) \\ &= LW \text{sinc}\left[\frac{Wd}{\lambda_2 gl_r} (\alpha - \alpha_r)\right] \text{sinc}\left[\frac{Ld}{\lambda_2 gl_r} (\beta - \beta_r)\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

定义 sinc 函数的最大值到其第一零点的距离为极限分辨率, 则得 x, y 方向的极限分辨率分别为

$$\Delta H_x = \frac{\lambda_2 gl_r}{Wd}, \quad (16)$$

$$\Delta H_y = \frac{\lambda_2 gl_r}{Ld}. \quad (17)$$

其一维表达式与文献 [7, 8] 一致.

2. 十字缝孔径(图 3)

$$P(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{W}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{L}\right) + \text{rect}\left(\frac{\xi}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{W}\right) - \text{rect}\left(\frac{\xi}{W}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{W}\right). \quad (18)$$

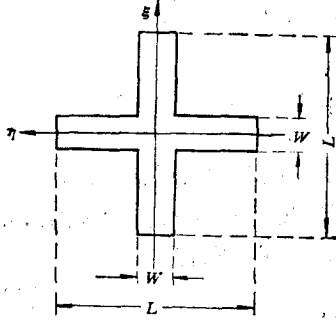


图 3

$$\begin{aligned} h &= LW \text{sinc}(Wf_x) \text{sinc}(Lf_y) \\ &\quad + LW \text{sinc}(Lf_x) \text{sinc}(Wf_y) \\ &\quad - W^2 \text{sinc}(Wf_x) \text{sinc}(Wf_y) \\ &= LW \text{sinc}\left[\frac{Wd}{\lambda_2 g l_r}(\alpha - \alpha_r)\right] \text{sinc}\left[\frac{Ld}{\lambda_2 g l_r}(\beta - \beta_r)\right] \\ &\quad + LW \text{sinc}\left[\frac{Ld}{\lambda_2 g l_r}(\alpha - \alpha_r)\right] \text{sinc}\left[\frac{Wd}{\lambda_2 g l_r}(\beta - \beta_r)\right] \\ &\quad - W^2 \text{sinc}\left[\frac{Wd}{\lambda_2 g l_r}(\alpha - \alpha_r)\right] \text{sinc}\left[\frac{Wd}{\lambda_2 g l_r}(\beta - \beta_r)\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\frac{d}{\lambda_2 g l_r} = c$ 为常量, $\alpha - \alpha_r = \alpha'$, $\beta - \beta_r = \beta'$, 上式可改写成

$$\begin{aligned} h &= LW \text{sinc}(cW\alpha') \text{sinc}(cL\beta') + LW \text{sinc}(cL\alpha') \text{sinc}(cW\beta') \\ &\quad - W^2 \text{sinc}(cW\alpha') \text{sinc}(cW\beta'). \end{aligned} \quad (20)$$

当 $L \gg W$ 时, 在 $\alpha' = 1/cW$ 处上式中第一、三项为零, 第二项已达到较高衍射级次 (L/W 级), 强度很弱, 可忽略, 因此可定义 x 方向分辨率为 $\Delta H_x = 1/cW$. 同理, y 方向分辨率也为 $\Delta H_y = 1/cW$.

当不满足 $L \gg W$ 时, 上式中三项一般不能同时消光, 图形较模糊. 为提高分辨率, 应取 $L = nW$ (n 为整数), 这时三项的消光线在第三项第一级消光线, 即由 $\alpha' = \pm 1/cW$, $\beta' = \pm 1/cW$ 围成的正方形边框上完全重合, 故仍可定义 $\Delta H_x = \Delta H_y = 1/cW$.

3. 圆形孔径(图 4).

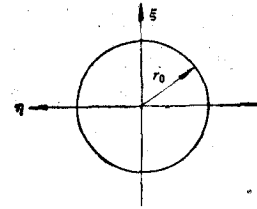


图 4

$$P(\xi, \eta) = \text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (21)$$

其中 $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, r_0 为孔径半径.

$$h = \mathcal{F}\left\{\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)\right\} = r_0 \frac{J_1(2\pi r_0 \rho)}{\rho}, \quad (22)$$

其中 J_1 为一阶贝塞耳函数, 而

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\left[\frac{d(\alpha - \alpha_r)}{\lambda_2 g l_r}\right]^2 + \left[\frac{d(\beta - \beta_r)}{\lambda_2 g l_r}\right]^2} \\ &= \frac{d}{\lambda_2 g l_r} \sqrt{(\alpha - \alpha_r)^2 + (\beta - \beta_r)^2}. \end{aligned}$$

函数 $J_1(2\pi r_0 \rho)$ 的第一零点在 $2r_0 \rho = 1.22$, 这时 $\rho = \frac{0.61}{r_0}$, 而 $\sqrt{(\alpha - \alpha_r)^2 + (\beta - \beta_r)^2} = 0.61 \frac{\lambda_2 g l_r}{r_0 d}$.

因此,极限分辨率(各向同性)为

$$\Delta H = 0.61 \frac{\lambda_2 g l_r}{r_0 d}. \quad (23)$$

代入(6)式中 l_r 表达式,得

$$\Delta H = \frac{0.61 \lambda_1 \lambda_2 g L_1 L_2}{r_0 (\lambda_2 L_1 L_2 - \lambda_2 d L_2 + \lambda_1 d L_1)}. \quad (24)$$

当 $d = 0$ 时,化为象面虹全息;若再令 r_0 表示记录时成象透镜的半径,则化为一般的象面全息. 可见一般象面全息(不另加限制孔径)可以看作是虹全息的特例,其极限分辨率可由上式得到

$$\Delta H = 0.61 \frac{\lambda_1 S}{r_0}. \quad (25)$$

显然,它就是记录时爱里(Airy)斑的半径,这个结果是合理的. 因为对象面全息来说,再现时没有放大作用,分辨率完全取决于记录时孔径衍射情况.

在(13)式中若令 $S = 0$ (从而 $g = d$), $P(\xi, \eta) = \Sigma(x, y)$, 则虹全息转化为普通全息. 由此可求出普通全息片的点扩散函数,进而确定其分辨率. 例如对于矩形全息片,由(16), (17)式可以得到

$$\Delta H_x = \frac{\lambda_2 l_r}{L_x}, \quad (26)$$

$$\Delta H_y = \frac{\lambda_2 l_r}{L_y}. \quad (27)$$

这里 L_x, L_y 分别表示全息片在 x, y 方向的宽度,此结果与 Yu 书中的分析^[10]完全一致.

四、虹全息成象的传递函数

1. 虹全息成象作为线性空间不变系统

为了把虹全息(普通全息可作为其特例)成象过程和一般光学系统成象过程作一类比,并纳入统一的理论,可以考虑引入传递函数概念;而传递函数理论所带来的简化只适用于线性空间不变系统. 由波动传播现象的线性性质(它可以从波动方程的线性直接导出)和记录介质的线性性质,可以说明全息成象过程是线性的. 由(12), (13)式可见,点扩散函数可以写成 $\alpha - \alpha_r$ 和 $\beta - \beta_r$ 的函数 $h(\alpha - \alpha_r, \beta - \beta_r)$, 因此,从理想象点到衍射象点的转换过程是空间不变的. 于是,对于给定的 λ_1, λ_2 和系统的几何配置,虹全息成象可以看作是线性空间不变系统,可以引入传递函数概念.

2. 相干传递函数

当记录时用单色点光源照明时,物面各点完全相关,成象为相干成象,这时可以引入相干传递函数.

令 $\tilde{x} = \frac{d\xi}{\lambda_2 g l_r}$, $\tilde{y} = \frac{d\eta}{\lambda_2 g l_r}$, 则(12)式可改写为

$$h(\alpha - \alpha_r, \beta - \beta_r) = \iint_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{d} \tilde{x}, \frac{\lambda_2 g l_r}{d} \tilde{y}\right) \times \exp\{-i2\pi[(\alpha - \alpha_r)\tilde{x} + (\beta - \beta_r)\tilde{y}]\} d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (28)$$

由傅里叶光学理论^[11], 相干传递函数为

$$H(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, \beta) \exp\{-i2\pi(f_x \alpha + f_y \beta)\} d\alpha d\beta = \mathcal{F}\{h(\alpha, \beta)\}. \quad (29)$$

代入(28)式, 得

$$\begin{aligned} H(f_x, f_y) &= \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\left[P\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{d} \tilde{x}, \frac{\lambda_2 g l_r}{d} \tilde{y}\right)\right]\right\} \\ &= P\left(-\frac{\lambda_2 g l_r}{d} f_x, -\frac{\lambda_2 g l_r}{d} f_y\right). \end{aligned} \quad (30)$$

若在反射坐标系中定义 $P(\xi, \eta)$, 则有

$$H(f_x, f_y) = P\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{d} f_x, \frac{\lambda_2 g l_r}{d} f_y\right). \quad (31)$$

可见, 相干传递函数由限制孔径 P 直接决定, 且与 λ_1, λ_2 及系统几何参数有关.

例如, 对矩形孔径, 由(14)式可直接写出

$$H(f_x, f_y) = \text{rect}\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{W d} f_x\right) \text{rect}\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{L d} f_y\right), \quad (32)$$

因此, x 和 y 方向的相干截止频率分别为

$$f_{x, \max} = \frac{dW}{2\lambda_2 g l_r}, \quad (33)$$

$$f_{y, \max} = \frac{dL}{2\lambda_2 g l_r}. \quad (34)$$

(33)式与文献[7]中(39)式一致, 但这里是避免了一切繁琐计算而直接写出的. 实际上, 对许多不规则孔径用积分直接计算已属不可能, 而此方法仍能直接给出图象明晰的结果.

3. 非相干传递函数

若在记录时引入漫射板透射照明物体, 会在物面迭加一随机相移, 严格的分析^[12]证明此时应引用非相干传递函数.

规范化非相干传递函数可定义为^[11]

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha, \beta)|^2 \exp\{-i2\pi(f_x \alpha + f_y \beta)\} d\alpha d\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta}. \quad (35)$$

应用 Goodman 的分析方法^[11], 可得相干传递函数与非相干传递函数的关系为

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} H\left(\xi - \frac{f_x}{2}, \eta - \frac{f_y}{2}\right) H^*\left(\xi + \frac{f_x}{2}, \eta + \frac{f_y}{2}\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} |H(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta}. \quad (36)$$

代入(31)式,得

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi - \frac{\lambda_2 g l_r}{2d} f_x, \eta - \frac{\lambda_2 g l_r}{2d} f_y\right) P\left(\xi + \frac{\lambda_2 g l_r}{2d} f_x, \eta + \frac{\lambda_2 g l_r}{2d} f_y\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (37)$$

可见,非相干传递函数由限制孔径 P 的自相关决定,也与 λ_1, λ_2 及系统几何参数有关.

对宽度为 W 的一维狭缝孔径,通过计算可得到其非相干截止频率为

$$f_{\max} = \frac{dW}{\lambda_2 g l_r}. \quad (38)$$

与(33)式相比较,可见非相干截止频率扩展到相干截止频率的两倍.

为了对限制孔径对截止频率的影响有一数量级方面的认识,我们举两个实例计算一下非相干截止频率.

对普通全息图,利用 Yu 给出的数据^[10]: $L_x = 100\text{mm}$, $d = 200\text{mm}$. 为简单计,设记录参考光及再现光均为平行光,且方位相同,波长都是 $5000 \text{ \AA}$, 这时 $l_r = d$, $s = 0$, $g = s + d = d$, $W = L_x$, 代入(38)式得

$$f_{x,\max} = \frac{L_x}{\lambda_2 d} = \frac{100}{5 \times 10^{-4} \times 200} = 1000 \text{ (条/mm)}.$$

对虹全息图,利用 Chen 给出的数据^[6]: $W = 7\text{mm}$, $s = 830\text{mm}$, $d = 40\text{mm}$, 仍设参考光及再现光为全同平行光, $\lambda_2 = \lambda_1 = 5000 \text{ \AA}$, 这时 $l_r = d$, $g = s + d$, 代入(38)式得

$$f_{x,\max} = \frac{W}{\lambda_2 (d + s)} = \frac{7}{5 \times 10^{-4} \times (830 + 40)} = 16 \text{ (条/mm)}.$$

此数值与 Yu 等人的实测值(见文献[7]中图5的实测曲线)基本一致.

可见,孔径大大限制了虹全息成象的最高频率. 如果用白光再现,由于色模糊的影响,除非对象面全息,实际最高频率还达不到此数值,所以,和普通全息图相比,虹全息成象的分辨率一般是比较差的,能分辨的最高频率差不多要低1—2个数量级,这是虹全息的一个主要缺点.

五、虹全息成象与一般光学系统成象的比较

Goodman 对一般光学系统成象的分析^[11]得出以下结论:

$$h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \times \exp\{-i2\pi[(x_i - \tilde{x}_0)\tilde{x} + (y_i - \tilde{y}_0)\tilde{y}]\} d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad (39)$$

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y), \quad (40)$$

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi - \frac{\lambda d_i}{2} f_x, \eta - \frac{\lambda d_i}{2} f_y\right) P\left(\xi + \frac{\lambda d_i}{2} f_x, \eta + \frac{\lambda d_i}{2} f_y\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (41)$$

以上各式中 (x_i, y_i) 为象面流动坐标(相当于本文中 (α, β)), $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ 为理想象点坐标(相当于本文中 (α_r, β_r)), $P(\xi, \eta)$ 为系统出射光瞳函数, λ 为光波波长, d_i 为出瞳平面到成像平面的距离。

将(28), (31), (37)式与(39), (40), (41)式相比较,可以得出如下结论:

1) 虹全息成像和一般光学系统成像完全可以用统一的理论和形式一致的公式来描述。点扩散函数都是限制孔径的傅里叶变换, 相干传递函数都由限制孔径直接确定, 非相干传递函数都由限制孔径的自相关确定。这种一致性是不难理解的, 因为 Goodman 的分析仅仅是基于“黑箱”(black box)模型和标量场衍射理论, 对成像系统的具体结构未加任何限制, 所以由此得出的结论是具有普遍性的。

2) 虹全息中物光限制孔径函数在作因子代换(见3))后起到了一般光学成像系统中出瞳函数的作用, 它对成像过程有着决定性的影响。

3) 将一般光学系统成像公式(39)–(41)应用于虹全息时只需将 P 中因子 λd_i 代之以因子 $\lambda_2 g l_r / d$ 。

这种因子代换可以认为是虹全息成像不同于一般光学系统成像的主要特点, 它是由虹全息成像所特有的物理过程所决定的。为了对此过程的物理图象有一更明晰的理解, 我们可用图5说明之。

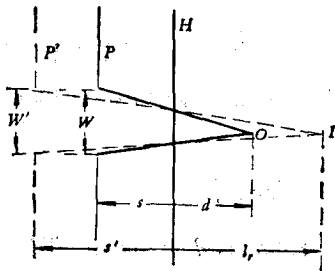


图 5

为作图方便, 图5只画了一维情况。实线表示记录光, 虚线表示再现光。 P 为实际孔径, P' 为孔径 P 的再现象。

再现时象点 I 的弥散应由“再现孔径” P' 的衍射效应所决定。

再现时会聚光经过宽度为 W' 的孔径 P' 在距离为 $s' + l_r$ 的 I 点产生象点弥散, 对此过程应用通常公式(39), 其中 $\lambda = \lambda_2$, $d_i = s' + l_r$, 自变量 $\tilde{x}$ 除以孔径放大率 W'/W , 可得再现象点扩散函数 $h(\alpha)$ 中 P 的表达式应为 $P\left(\lambda_2(l_r + s') \frac{W}{W'}, \tilde{x}\right)$ 。利用与导出(6)式相同的方法可得

$$s' = \frac{\lambda_1 s L_1 L_2}{\lambda_2 L_1 L_2 + \lambda_2 s L_2 - \lambda_1 s L_1}, \quad (42)$$

而

$$W' = \frac{\lambda_2 s'}{\lambda_1 s} W, \quad (43)$$

由(6), (42), (43)式经计算可得

$$\lambda_2(l_r + s') \frac{W}{W'} = \frac{\lambda_2 g l_r}{d}. \quad (44)$$

因此 P 的表达式变为 $P\left(\frac{\lambda_2 g l_r}{d} \tilde{x}\right)$.

由以上分析可知, 因子 $\lambda_2 g l_r / d$ 的产生从本质上说是由于再现时孔径象及物象的横向及纵向放大效应所引起的.

以上各式中若令 $s = 0$, $P(\xi, \eta) = \Sigma(x, y)$, 则虹全息转化为普通全息, 这时 $\lambda_2 g l_r / d = \lambda_2 l_r$, (28), (31), (37) 式与 (39), (40), (41) 式在形式上就完全一致了, 因为这时记录时及再现时限制孔径均为全息片孔径 $\Sigma(x, y)$, 不存在再现孔径的放大作用, 只是把再现象点的纵向距离由记录时的物点距离 d 变成了 l_r . 但是, 需要强调指出的是, 全息成象与一般光学系统成象的一个重要区别是再现波长与记录波长可以不同, 这就导致了在不同再现波长下象的横向及纵向放大率、象点位置、点扩散函数、传递函数, 从而其极限分辨率及截止频率都有所不同.

当多色光再现时, 从理论上也可引入多色点扩散函数和传递函数的概念, 此种计算比较繁冗, 且似乎缺乏实用价值, 不拟在本文讨论.

参 考 文 献

- [1] S. A. Benton, *J. Opt. Soc. Am.* **59**(1969), 1545A.
- [2] H. Chen and F. T. S. Yu, *Opt. Lett.*, **2**(1978), 85.
- [3] F. T. S. Yu and H. Chen, *Opt. Comm.*, **25**(1978) 173.
- [4] F. T. S. Yu and H. Chen, *Opt. Comm.*, **27**(1978), 307.
- [5] H. Chen, A. Tai and F. T. S. Yu, *Appl. Opt.*, **17**(1978), 1490.
- [6] H. Chen, *Appl. Opt.*, **17**(1978), 3290.
- [7] S. L. Zhuang, Y. W. Zhang, P. H. Ruterbusch and F. T. S. Yu, *Appl. Opt.*, **20**(1981), 872.
- [8] 杨振寰、张幼文、庄松林、陆永祥, 上海交通大学学报, 1980年 第4期, 1.
- [9] 张幼文、蔡履中、朱伟光, 物理学报, **31**(1982), 427.
- [10] F. T. S. Yu, *Introduction to Diffraction, Information Processing and Holography*, MIT Press, (1973).
- [11] J. W. Goodman, 傅里叶光学导论(中译本), 科学出版社, (1979), 第六章.
- [12] S. Lowenthal and H. Arsenault, *J. Opt. Soc. Am.*, **60**(1970), 1478.

FOURIER ANALYSIS OF RAINBOW HOLOGRAPHIC IMAGING

CAI LI-ZHONG

(Shandong University, Jinan)

ZHANG YOU-WEN

(Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

Based on the viewpoint of Fourier optics, we have analysed systematically the (monochromatic) point spread function and transfer function of rainbow holographic imaging limited by an arbitrary aperture, revealed the essential relation between the function and the aperture, then established a unified theory which is analogous to that of conventional imaging system. Thus we provided a simple and clear mathematical basis for calculation of the limited resolution and the cut-off frequency.