

相对论性开普勒环的谱线轮廓

方 励 之 邓 铁 如
(中国科学技术大学天体物理研究室)

1981 年 5 月 12 日收到

提 要

对于一个围绕强引力场物体(例如黑洞)作开普勒运动的环状发光物,它所发射的光线要受多普勒频移,引力红移和光线偏折等效应的作用。这种作用决定了远处观察者所看到的谱线轮廓。本文利用光子输运方程方法,求出在 Schwarzschild 度规中的开普勒环所发射的谱线的轮廓的精确解。

一、引 言

环状几何结构是引力体系中一种常见的位形。在九大行星中,已知具有光环的就有三个,即土星、木星和天王星。在恒星尺度上的引力体系,以至星系尺度的引力体系中,也同样存在着环状结构,或环状发光区。这些环的运动主要受到引力的控制,作开普勒转动。因此,它们发射的光线将受到多普勒效应的影响,这是决定环的发射谱线的致宽以及轮廓的一个重要因素。对于这种经典性的引力体系的有关问题,黄授书等曾做过系统性的讨论^[1]。

数年前,我们曾把这种问题推广到相对论情况,讨论了相对论性开普勒盘的一般特征^[2-4]。后来发现,这种相对论性的盘或环的某些发射特征可能是解释一些天体现象的有用的机制^[5-8]。最近,我们又证明,在适当的条件下,在黑洞周围的确有可能存在一个发光的环,甚至是受激发射的光环^[9]。这些进展促使我们进行现在的工作:精确计算一些相对论性发光环的谱线轮廓。

相对论性环所发射的光将受到多普勒频移、引力红移和光线偏折等效应的综合作用。这种作用决定了远处观察者所接收到的谱线轮廓。但是,现在我们不能采用后牛顿方法来近似地处理这个问题^[10]。这是因为,开普勒环在强场范围中运动,应当进行精确的求解。

在本文中,我们采用光子的输运方程方法来求解这个问题。这项工作只限于讨论 Schwarzschild 度规中的开普勒环的有关问题,对于其他情况中的计算,准备在进一步的工作中给出。

二、光子的分布函数

在广义相对论中,光子在相空间中的分布函数 $N(x^\mu, p^\mu)$ 按下述方式定义^[11]。在点 x^μ

处的观察者,若在其局部惯性系中测得有 dn 个光子动量在 $k^\mu \rightarrow k^\mu + dk^\mu$ 之中,位置在 $x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu$ 之中,则

$$N(x^\mu, p^\mu) \equiv \frac{dn}{d^3x d^3k}, \quad (1)$$

它是标量,当忽略掉吸收和散射等过程时,它遵从下列方程:

$$\frac{dN}{d\lambda} = 0, \quad (2)$$

其中 λ 是沿光线的世界线的仿射参量. 上式又可以写成

$$k^\alpha \frac{\partial N}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\sigma\nu}}{\partial x^\alpha} k_\sigma k_\nu \frac{\partial N}{\partial k_\alpha} = 0. \quad (3)$$

显然,方程(3)表明,分布函数应是下列光子运动方程的运动积分的函数:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} &= k^\alpha, \\ \frac{dk_\alpha}{d\lambda} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\sigma\nu}}{\partial x^\alpha} k_\sigma k_\nu. \end{aligned} \quad (4)$$

对于 Schwarzschild 度规,相应的运动方程是(在 $G = c = 1$ 单位系)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) k_1, & \frac{d\vartheta}{d\lambda} &= -\frac{1}{r^2} k_2, \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} k_3, & \frac{dk_0}{d\lambda} &= 0, \\ \frac{dk_1}{d\lambda} &= -\frac{1}{2r} \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(\frac{6M}{r} - 2\right) k_0^2 + \left(2 - \frac{2M}{r}\right) k_1^2 \right\}, \\ \frac{dk_2}{d\lambda} &= -\cot \vartheta \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} k_0^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) k_1^2 - \frac{1}{r^2} k_2^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $k_1 = k_r$, $k_2 = k_\vartheta$, $k_3 = k_\varphi$, 由于 $k^\alpha k_\alpha = 0$, 故 $dk_3/d\lambda$ 不给出独立的方程. 这组方程具有下列的运动积分:

$$\begin{aligned} k_0, \\ L^2 &= r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) k_0^2 - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) k_1^2, \\ L_z &= k_3 = \sin^2 \vartheta (L^2 - k_1^2). \end{aligned} \quad (6)$$

对于一个远离中心的观察者来说,上列三者的物理意义分别是光子的能量、总角动量及角动量在极轴方向的分量. 代替 L^2 , 我们也可以使用下列量:

$$l^2 \equiv \frac{L^2}{k_0^2} = r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{k_1^2}{k_0^2}. \quad (7)$$

它的物理意义是瞄准距离. 除了上述三者之外,另外的积分常数可取光子的初始位置 r_0 , ϑ_0 及 φ_0 . 这样,分布函数 N 就应是 k_0 , l , L_z , r_0 , ϑ_0 及 φ_0 的函数.

对于位于 r_0 , ϑ_0 及 φ_0 的四速度为 u^μ 的发光体,若在它的共动系中发射单色光子 ν_e , 即频率分布比例于因子 $\delta(\nu - \nu_e)$, 则在 u^μ 参考系中,它发射的光子的分布函数就是

$$N_0(r_0, \vartheta_0, \varphi_0, k^\mu) = c(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) \delta(u^\mu k_\mu - \nu_e), \quad (8)$$

其中因子 $c(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ 描写相应点的发光强度, N 的脚标 0 表示它是发射时刻的分布. 根据前面的讨论, 实际上只要将 (8) 式中的 k^μ 等用运动积分 $k, l, L_z, r_0, \vartheta_0$ 及 φ_0 表示出来, 我们就得到方程 (2) 的满足初始分布 (8) 式的解了.

对于在赤道平面上运动的环, $\vartheta_0 = \pi/2$ 及 r_0 都是确定的, 若环中发光物的分布是均匀的, 则 c 也与 φ_0 无关, 它就是一个常数. 再之, 这时有 $u^\vartheta = 0$, 故

$$u^\mu k_\mu = u^0 k_0 + u^r k_1 + u^\phi k_3. \quad (9)$$

由 (7) 式, 有

$$k_1 = \pm k_0 \left[1 / \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 - l^2 / r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{1/2}, \quad (10)$$

其中正负号分别表示沿径向向外及向内运动的光子. 这样, 由 (8), (9) 及 (10) 等式就可以得到光子分布函数的最终表达式

$$N(\varphi_0, k_0, l, k_3) = c \delta \left\{ u^0 k_0 + u^r k_0 \left[\left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^{-2} - l^2 r_0^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^{-1} \right]^{1/2} + u^\phi k_3 - \nu_e \right\}. \quad (11)$$

三、谱线轮廓的计算

1. 视线在赤道平面内的情况

如果观测者位于环平面内, 且在方位角 $\varphi = 0$ 的方向, 从 r_0, φ_0 点发射的光若能被观测者接收到, 则下列关系就可从求解光子方程得到:

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right)^{1/2}}. \quad (12)$$

在这种几何位形下, 有 $k_3 = k_0 l$, 而对于远离环的观测者 $k_0 = \nu$, 即为观测频率. 这样, 对于圆形的环, $u^r = 0$, 由 (11) 式直接可以得到下列的轮廓表达式:

$$\begin{aligned} I(\nu) &= c \int \delta(u^0 k_0 + \nu u^\phi l - \nu_e) r_0 d\varphi_0 \\ &= c r_0 \frac{1}{u^\phi \nu} \left(\frac{d\varphi_0}{dl} \right) \Big|_{l = \frac{\nu_e - u^0 \nu}{u^\phi \nu}}. \end{aligned} \quad (13)$$

再利用 (12) 式, 上式可改写成

$$I(\nu) = \frac{c r_0}{M u^\phi \nu_e} \frac{1}{\nu'} F \left(\frac{1 - u^0 \nu'}{M u^\phi \nu'} \right), \quad (14)$$

其中 $\nu' = \nu / \nu_e$, 函数 F 如下定义:

$$F(x) = \int_0^{M/r_0} \frac{dw}{[1 - (w^2 - 2w^3)x^2]^{3/2}}. \quad (15)$$

由 (14) 及 (15) 式还容易得到, 当忽略掉广义相对论的效应时, 轮廓的表达式为

$$I(\nu) = c r_0 / [r_0^2 (u^\phi \nu)^2 - (\nu_e - \nu)^2]^{1/2}. \quad (16)$$

这就是文献 [1] 中给出的经典情况的轮廓表达式.

2. 一般情况

对于视线方向与环轴方向之间的夹角不等于 $\pi/2$ 的一般情况, 我们取视线方向为极轴, 则能被观测者接收的光线都在子午面内运动. 光子运动方程的解仍然有类似于 (12) 式的形式

$$\vartheta_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right)^{1/2}}. \quad (17)$$

它表示从 r_0, ϑ_0 发射的光若能到达观测者时所应满足的方程.

现在, 对于圆形的环, 轮廓也有类似形式

$$I(\nu) = c \int \delta(u^0 k_0 + u^0 \nu l - \nu_c) ds, \quad (18)$$

其中 s 为沿圆环的弧长.

因为, 对于现在取定的坐标系, 圆环的方程为:

$$r = r_0, \quad \cos \vartheta \cos \Theta + \sin \vartheta \sin \varphi \sin \Theta = 0, \quad (19)$$

其中 Θ 是视线方向与环轴方向之间的夹角. 故不难求得

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{r_0 \sin^2 \vartheta}{\cos \Theta}, \\ u^3 &= \sin \Theta \cos \varphi u^{\varphi'}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $u^{\varphi'}$ 的意义是, 在环平面内的方位角 φ' 方向上的环的四速度分量. 这样, 由 (19)、(20) 式就可以最终得到

$$I(\nu) = \frac{c r_0}{M u^{\varphi'} \nu_c} \frac{1}{\nu} \frac{\sin^3 \vartheta F(l)}{\cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta \sin^2 \Theta + l \cos \vartheta \cos^2 \Theta F(l)}, \quad (21)$$

其中函数 F 仍由 (15) 式定义, 而 l 则由下式给出:

$$l = \frac{1 - u^0 \nu'}{M \nu' u^{\varphi'} \sin \Theta \cos \varphi}. \quad (22)$$

其他符号的意义与前相同. 当 $\Theta = \pi/2$ 时, (21) 式回到 (14) 式. 如果忽略广义相对论的作用, 它成为经典表达式

$$I(\nu) = c r_0 / [r_0^2 (u^{\varphi'} \nu)^2 \sin^2 \Theta - (\nu_c - u^0 \nu)^2]^{1/2}. \quad (23)$$

(14) 及 (21) 式就是圆环的谱线轮廓的精确表达式. 在图 1 中我们给出几个典型的谱线轮廓. 从这些图形可以看到, 这些轮廓都具有双峰结构, 一峰紫移, 一峰红移. 这一特征与非相对论情况是相似的.

但是, 峰的分布在两种情况是不相同的. 在非相对论情况, 两峰相对于 ν_c 是对称的. 而在相对论情况, 则由于横向多普勒效应, 引力红移及光线偏折使两峰相对于 ν_c 不再对称. 以致一些原为紫移的峰, 有时也移向红端 (见图 1(a)).

谱线的致宽范围, 也就是两峰之间的间隔, 可用下述方式求出. 首先, 瞄准距离 l 的有意义的范围应由 (12) 式中被积函数为实数来确定, 它是

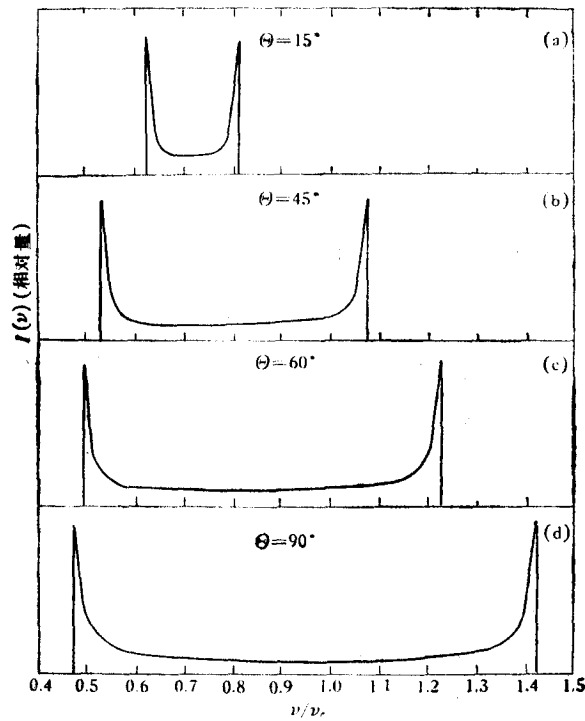


图 1 取 $r_0 = 6M$;

(a) — $\theta = 15^\circ$; (b) — $\theta = 45^\circ$; (c) — $\theta = 60^\circ$; (d) — $\theta = 90^\circ$

$$0 \leq l \leq l_{\max} = \frac{r_0}{M}^{3/2} / \left[\left(\frac{r_0}{M} \right)^2 - 2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

再由 (17), (19) 及 (22) 等式即可求得在上述瞄准距离范围中的频率铺展范围.

由对称性 $(l \cos \varphi)_{\max} = -(l \cos \varphi)_{\min}$, 所以, 由 (22) 式形式上可把谱的致宽范围 $\nu'_{\min} < \nu' < \nu'_{\max}$ 如下写出:

$$\nu'_{\min} = \frac{1}{u^0 \mp M u^{\phi'} \sin \Theta (l \cos \varphi)_{\max}} \quad (25)$$

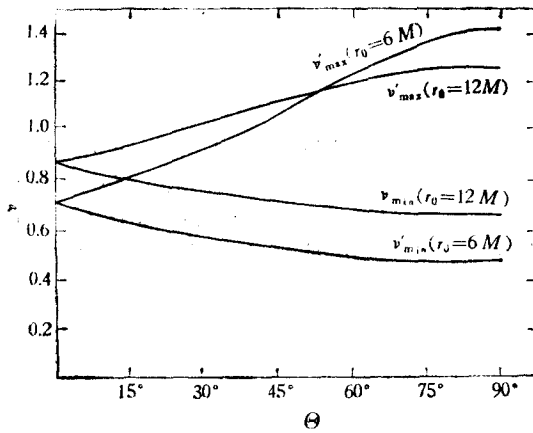


图 2

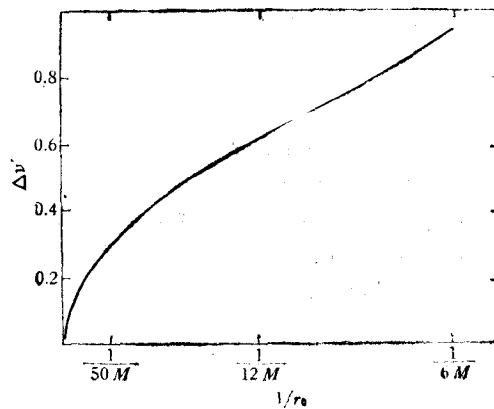


图 3

对于在 Schwarzschild 场中的开普勒圆运动,有

$$\begin{aligned} u^\phi &= M^{1/2}/r_0(r_0 - 3M)^{1/2}, \\ u^0 &= r_0^{1/2}/(r_0 - 3M)^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

因此,当视线沿对称轴时 ($\Theta = 0$), 有

$$v'_{\max} = v'_{\min} = \frac{1}{u^0} = \left(1 - \frac{3M}{r_0}\right)^{1/2}. \quad (27)$$

当视线与环对称轴垂直时 ($\Theta = \pi/2$), 谱线致宽达到最大, 它为

$$\Delta v' = \frac{1}{u^0 - l_{\max} u^\phi} - \frac{1}{u^0 + l_{\max} u^\phi} = 2 \left[\frac{M(1 - 2M/r_0)}{r_0(1 - 3M/r_0)} \right]^{1/2}. \quad (28)$$

在图 2 中给出谱线的紫移峰 v'_{\max} 及红移峰 v'_{\min} 随 Θ 变化的一些典型曲线. 在图 3 中给出最大致宽随环的径向坐标 r_0 的变化. 一般说, 广义相对论的效应是使致宽或双峰的间隔变得比相应的经典情况要小一些.

参 考 文 献

- [1] S. S. Huang, *Astrophys J.*, **171**(1972), 549.
- [2] 方励之、张家铝、尤峻汉, 中国科学技术大学学报, **3**(1973), 2.
- [3] 方励之、张家铝、尤峻汉, 科学通报, **19**(1974), 561.
- [4] 方励之、张家铝, 科学通报, **20**(1975), 465.
- [5] Fang Li-zhi, R. Ruffini, *Phys. Lett. B*, **86**(1979), 193.
- [6] 方励之, R. Ruffini, 科学通报, **25**(1980), 47.
- [7] Fang Li-zhi, R. Ruffini, L. Stella, *Vistas in Astronomy*, to be published.
- [8] R. Ruffini, L. Stella, *Phys. Lett. B*, **93**(1980), 107.
- [9] L. Z. Fang, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **194**(1981), 177.
- [10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, 972; 中译本: 温伯格, 引力论和宇宙论, 邹振隆等译, 科学出版社, (1980).
- [11] 方励之, 广义相对论及其在天体物理中的应用 (讲义, 1977).

LINE PROFILE OF RELATIVISTIC KEPLERIAN RINGS

FANG LI-ZHI DENG TIE-RU

(*Astrophysics Research Division, University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

The light emitted from a Keplerian ring around the objects with strong gravitational field should be affected by Doppler shift, gravitational redshift and deflection of light. The line profiles for a faraway observer are dominated by these effects. In this paper the precise solutions of line profiles for the Keplerian rings in the Schwarzschild case have been obtained by means of the kinetic equation for photons.