

引力场的能量动量赝张量与 轴对称体系的引力辐射

王 友 棠

(上海交通大学应用物理系)

1981年10月27日收到

提 要

本文计算了轴对称体系的引力辐射总功率。用胡宁的^[1] $\tau^{(\infty)\alpha\beta}$ 表达式和 Bondi 的柱面波解直接计算导出 $-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^\pi c_0^2 \sin\theta d\theta$ 。这个结果与 Bondi^[4] 不用任何 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式得到的公式完全相同,并证明辐射总功率是恒正的。但是,由郑玉昆的^[2] $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式得到的结果与 Bondi 的公式不一致,并表明辐射总功率不是恒正的。

一、引 言

用超势或无限小坐标变换的方法定义的引力场总能量动量赝张量密度 $\tau^{\alpha\beta}$ 都具有不确定性。因为在超势中可以附加一个四维散度为零的反对称仿射张量密度^[1], 无限小坐标变换中 δx^α 为任意的, 它们都会导致不同的 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式^[2]。但是, 这些不同的 $\tau^{\alpha\beta}$ 都能导致能量动量守恒定律, 即它们都满足

$$\frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

并得出封闭体系的能量动量(采用 $c = G = 1$ 的单位)

$$P^\alpha = \int \tau^{\alpha 0} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{常数}.$$

此外, 不同的作者还要求 $\tau^{\alpha\beta}$ 和 P^α 再满足某些其他的物理要求, 从而限制了这种不确定性。有的作者要求 P^α 对渐近洛伦兹变换为四维矢量^[3], 并要求在静止球对称情况下给出 $P^0 = m$ 。有的作者为了使有限空间区域中的引力场的能量有确定意义, 此能量的计算不依赖于空间坐标的选取, 从而要求 $\tau^{\alpha\beta}$ 对于纯空间坐标变换

$$x^{i'} = f^i(x^k) \quad i, k = 1, 2, 3.$$

具有适当的变换性质^[4]。

另一方面, 用一个合理的 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式计算引力辐射的结果, 应与用运动方程或其它不用 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式的方法计算的结果相一致。同时, 体系的引力辐射总功率应该为恒正的, 因为真实的引力波应该携带能量。这两点可以作为引力辐射方面对 $\tau^{\alpha\beta}$ 的两项物理要求。满足这方面要求的 $\tau^{\alpha\beta}$ 可能并不满足上述变换性质方面的要求, 反之, 满足变换性质方面

的要求可能不满足引力辐射方面的要求, 只有既满足变换性质方面要求又满足引力辐射方面要求的 $\tau^{\alpha\beta}$ 才是更为合理的引力场总能量动量张量密度的表达式.

本文用胡宁和郑玉昆最近提出的两个 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式和 Bondi 的柱面波解分别计算了轴对称体系的引力辐射总功率. 用胡宁的 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 得到的引力辐射总功率满足恒正的要求; 并与 Bondi 不用任何 $\tau^{\alpha\beta}$ 的表达式得到的辐射总功率公式完全一致. 相反, 郑玉昆的 $\tau^{\alpha\beta}$ 则不满足上述引力辐射方面的两项物理要求.

二、柱面波解

Bondi 用 Friedlander^[5] 的级数解法求出了在 $x^{\alpha'} = \{r, \theta, \varphi, u\}$ 坐标系中的向外柱面波解, 计算了体系在初末态为静态中间为有限辐射期情况下的引力辐射, 并得到了总辐射功率公式^[6]. 对于物质分布在有限范围的轴对称体系, Møller 采用了渐近洛伦兹坐标系 $x^{\alpha} = \{x, y, z, t\}$, 得到了 $1/r$ 的零次幂开始的级数形式的外向柱面波解. x^{α} 和 $x^{\alpha'}$ 坐标系之间的关系为

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, & t &= r + u. \end{aligned} \quad (1)$$

在 x^{α} 坐标系中, 向外柱面波解为^[7]

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} + z_{\alpha\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (2)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} r^{-1}, \quad z_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} r^{-2}, \quad (3)$$

$$\sqrt{-g} = e^{2\beta}, \quad \beta = -\frac{1}{4} C(\theta, u)^2 r^{-2} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4)$$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\gamma} \gamma_{\gamma}^{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (5)$$

(3) 式中

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} &= 2C(m_{\alpha}m_{\beta} - l_{\alpha}l_{\beta}) + 2M\mu_{\alpha}\mu_{\beta} \\ &\quad + (C_2 + 2C \cot \theta)(m_{\alpha}\mu_{\beta} + \mu_{\alpha}m_{\beta}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} &= 2C^2(m_{\alpha}m_{\beta} + l_{\alpha}l_{\beta}) + \frac{1}{2}C^2(\mu_{\alpha}n_{\beta} + n_{\alpha}\mu_{\beta}) \\ &\quad + (N_2 + N \cot \theta)\mu_{\alpha}\mu_{\beta} - (2N + CC_2)(m_{\alpha}\mu_{\beta} + \mu_{\alpha}m_{\beta}). \end{aligned} \quad (7)$$

而

$$\begin{aligned} n_{\alpha} &= \frac{\partial r}{\partial x^{\alpha}} \\ &= \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta, 0\}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$m_{\alpha} = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta, 0\}, \quad (8b)$$

$$l_{\alpha} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0\}, \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}} = -(\eta_{\alpha 0} + n_{\alpha}) \\ &= \{-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta, 1\}. \end{aligned} \quad (8d)$$

$y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$, n_α , m_α , l_α 和 μ_α 等的指标用 $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 来上升和下降. C, N, M 为波动解中三个积分函数 $C(\theta, u)$, $N(\theta, u)$ 和 $M(\theta, u)$ 的简写, 而 C_α, N_α 和 M_α 则分别表示 C, N 和 M 对 $x^{\alpha'}$ 的微商. $M(\theta, u)$ 与体系的质量有密切关系, 在静止情况下等于体系的静质量, $N(\theta, u)$ 和 $C(\theta, u)$ 分别与体系的物质分布偶极矩和四极矩有密切关系. C, N 和 M 之间有一定的关系, 已知 C 和初始条件就可以决定体系的行为. 由对称轴上柱面波解的正则性要求可知^[6] $C(\theta, u)$ 有如下的极限行为:

$$C \simeq K(u) \sin^2 \theta \quad \text{当 } \sin \theta \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

且从 C, N 和 M 的关系可得

$$\int_0^\pi A \sin \theta d\theta = 0, \quad (9a)$$

$$A = [C_2 \sin \theta + 2C \cos \theta]_2 / \sin \theta, \quad (9b)$$

$$M_0 = -C_0^2 + \frac{1}{2} A_0. \quad (10)$$

以下的计算虽然在 x^α 坐标系中进行, 但是仍用 $x^{\alpha'}$ 坐标系的各量表示 x^α 坐标系中的量. 为此须用有关 $\phi(r, \theta, \varphi, u)$ 的微商的关系式

$$\begin{aligned} \phi_{,\alpha} &= \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta'}} \\ &= \phi_0 \mu_\alpha + \phi_1 n_\alpha + \phi_2 m_\alpha / r + \phi_3 l_\alpha / r \sin \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

分别令 $\phi = y_{\alpha\beta}$ 和 $z_{\alpha\beta}$ 就有

$$\begin{aligned} y_{\alpha\beta,\gamma} &= \frac{(a_{\alpha\beta})_0}{r} \mu_\gamma \\ &+ \frac{1}{r^2} [-a_{\alpha\beta} n_\gamma + (a_{\alpha\beta})_2 m_\gamma + (a_{\alpha\beta})_3 l_\gamma / \sin \theta] + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$z_{\alpha\beta,\gamma} = (b_{\alpha\beta})_0 \mu_\gamma / r^2 + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (13)$$

再推出一些计算中有用的公式. 显然, 由 (8) 式有

$$n_\alpha n^\alpha = m_\alpha m^\alpha = l_\alpha l^\alpha = 1, \quad \mu^\alpha \mu_\alpha = 0; \quad (14)$$

$$n_\alpha m^\alpha = n_\alpha l^\alpha = m_\alpha l^\alpha = m_\alpha \mu^\alpha = l_\alpha \mu^\alpha = 0,$$

$$n_\alpha \mu^\alpha = -1; \quad (15)$$

$$(n_\alpha)_2 = m_\alpha, (m_\alpha)_2 = -n_\alpha, (l_\alpha)_2 = 0,$$

$$(\mu_\alpha)_2 = -m_\alpha; \quad (16)$$

$$(n_\alpha)_3 = \sin \theta l_\alpha, (m_\alpha)_3 = \cos \theta l_\alpha,$$

$$(l_\alpha)_3 = -(\cos \theta m_\alpha + \sin \theta n_\alpha), (\mu_\alpha)_3 = -\sin \theta l_\alpha. \quad (17)$$

由 (14)–(17) 式可以证明

$$\begin{aligned} a_\alpha^\alpha &= 0, \quad a^{\alpha\beta} \mu_\beta = 0, \quad (a^{\alpha\beta})_0 \mu_\beta = 0, \\ (a_{\alpha\beta})_0 (a^{\alpha\beta})_0 &= 8C_0^2, \quad a^{\alpha\beta} n_\beta = a^{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$b_\alpha^\alpha = 3C^2, \quad b^{\alpha\beta} \mu_\beta = -\frac{C^2}{2} \mu^\alpha,$$

$$(b^{\alpha\beta})_0 \mu_\beta = -CC_0 \mu^\alpha. \quad (19)$$

还可以证明

$$a^{\alpha 0} = -2M\mu^{\alpha} - (C_2 + 2C \cot \theta)m^{\alpha}, \quad (20)$$

$$(a^{\alpha\beta})_2 m_{\beta} + \frac{1}{\sin \theta} (a^{\alpha\beta})_3 l_{\beta} = a^{\alpha 0} + (A - 2M)\mu^{\alpha}. \quad (21)$$

有了这些,再求出引力场的能量动量赝张量密度就可以计算引力辐射。

三、轴对称体系的引力辐射

由胡宁提出的引力场总能量动量赝张量密度为^[8]

$$t^{(n)\alpha\beta} = \frac{1}{2K} [h^{\alpha\beta\sigma}(-g)^n]_{,\sigma} \quad (22)$$

和引力场方程 $G^{\alpha\beta} = KT^{\alpha\beta}$, 用分解爱因斯坦张量 $G^{\alpha\beta}$ 的方法可以求出胡宁的引力场能量动量赝张量为

$$t^{(n)\alpha\beta} = t_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{n}{K} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\alpha} h^{\alpha\beta\lambda}, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} t_{(0)}^{\alpha\beta} = & \frac{1}{2K} (g_{,\rho}^{\alpha\lambda} g_{,\lambda}^{\beta\rho} - g_{,\lambda}^{\alpha\lambda} g_{,\rho}^{\beta\rho}) \\ & + \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right)_{,\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right)_{,\rho} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda} \\ & + \left(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \right) (\Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$h^{\alpha\beta\lambda} = g^{-1} (g g^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} - g g^{\alpha\lambda} g^{\sigma\beta})_{,\sigma}. \quad (25)$$

郑玉昆的引力场能量动量赝张量为^[9]

$$t^{\alpha\beta} = t_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2K} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\alpha} h^{\alpha\beta\lambda} + \frac{1}{\sqrt{-g}} S^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda}, \quad (26)$$

其中

$$S^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} = -U^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} + V^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} - W^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda}, \quad (27)$$

$$U^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} [g^{\alpha\beta}(-g g^{\lambda\sigma})_{,\sigma} - g^{\alpha\lambda}(-g g^{\beta\sigma})_{,\sigma}] \right\}_{,\lambda}, \quad (28)$$

$$V^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} = \frac{1}{2K} \{ \sqrt{-g} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\sigma,\mu} - g_{\rho\mu,\sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{,\lambda}, \quad (29)$$

$$W^{\alpha\beta\lambda}_{,\lambda} = \frac{1}{K} \{ \sqrt{-g} g^{\alpha i} (g_{i\sigma,\mu} - g_{i\mu,\sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{,\lambda}. \quad (30)$$

对于物质分布比较集中的体系,引力辐射决定于远处引力场能量动量赝张量密度的性质. 由于 $t^{0k} n_k$ 为径向引力场的能量流, n_k 方向上单位时间单位立体角中的辐射能量为 $t^{0k} n_k r^2$, 因而体系的引力辐射的总功率可以写为波区中的如下的积分:

$$-dE/dt = \int t^{0k} n_k r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (31)$$

现在来计算 $t^{(n)\alpha\beta}$. 利用(12)式可以写出

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2r} (a_{\mu,0}^{\lambda} \mu_{\nu} + a_{\nu,0}^{\lambda} \mu_{\mu} - a_{\mu\nu,0} \mu^{\lambda}) + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

由此式和(18)式可知

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} = o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

注意到 $t^{(n)\alpha\beta}$ 各项和各因子的量级, 利用(24), (3), (5), (12), (14) 和(18)式可得

$$t_{(0)}^{\alpha\beta} = \frac{2C_0^2}{Kr^2} \mu^{\alpha} \mu^{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (32)$$

由于 $\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}$ 为二级小量, 所以由(23)式可知, 胡宁的引力场能量动量赝张量为

$$t^{(n)\alpha\beta} = t_{(0)}^{\alpha\beta} = \frac{2C_0^2}{Kr^2} \mu^{\alpha} \mu^{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (33)$$

再来计算 $t^{\alpha\beta}$. 利用(5)和(11)式,

$$\begin{aligned} g_{,\gamma}^{\alpha\beta} = & -\frac{(a^{\alpha\beta})_0}{r} \mu_{\gamma} - \frac{1}{r^2} [-a^{\alpha\beta} n_{\gamma} + (a^{\alpha\beta})_2 m_{\gamma} + (a^{\alpha\beta})_3 l_{\gamma} / \sin \theta] \\ & - \frac{(b^{\alpha\beta})_0 \mu_{\gamma}}{r^2} + \frac{1}{r^2} [(a^{\alpha\delta})_0 (a_{\delta}^{\beta}) \mu_{\gamma} + (a^{\alpha\delta}) (a_{\delta}^{\beta})_0 \mu_{\gamma}] + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

由(18), (19), (21) 和(34)式,

$$g_{,\alpha}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{r^2} \{A - 2M - CC_0\} \mu^{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (35)$$

再用(11), (19) 和(35)式

$$g_{,\alpha\gamma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2} (-C_0^2 + CC_{00}) \mu^{\beta} \mu_{\gamma} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (36)$$

由(36)式还有

$$g_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} = o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

另外由(4)式和(11)式,

$$(-g)_{,\alpha} = -\frac{2CC_0}{r^2} \mu_{\alpha} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (37)$$

$$(-g)_{,\alpha\beta} = -\frac{1}{r^2} (C_0^2 + CC_{00}) \mu_{\alpha} \mu_{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (38)$$

先把 $U^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}}$ 对 x^{λ} 的微分运算展开, 由(35)–(38)式可知各项的量级, 再利用(36), (14) 和(38)式算出到 $o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ 的各项便有

$$U^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2Kr^2} (3C_0^2 + CC_{00}) \mu^{\alpha} \mu^{\beta} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (39)$$

用类似的方法把 $V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}}$ 对 x^{λ} 的微分运算展开, 并计算到 $o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ 的各项. 对于其中含 $(g_{\rho\sigma,\mu\lambda} - g_{\rho\mu,\sigma\lambda})$ 因子的项, 可用由(11), (1), (16) 和(17)式得到的

$$g_{\rho\sigma,\mu\lambda} = \frac{1}{r} (a_{\rho\sigma})_{00} \mu_{\mu} \mu_{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \{ -(a_{\rho\sigma})_0 (\mu_\mu n_\lambda + \mu_\lambda n_\mu) + (a_{\rho\sigma})_{02} (\mu_\mu m_\lambda + \mu_\lambda m_\mu) \\
& + (a_{\rho\sigma})_{03} (\mu_\mu l_\lambda + \mu_\lambda l_\mu) / \sin \theta \\
& - (a_{\rho\sigma})_0 m_\mu m_\lambda - (a_{\rho\sigma})_0 l_\mu l_\lambda \} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned} \quad (40)$$

和(14), (15), (18)及(21)式进行计算, 其结果为

$$V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{Kr^2} C_0^2 \mu^\alpha \mu^\beta + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (41)$$

由(28)和(29)式可以写出

$$\begin{aligned}
V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} - W^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} &= -V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} \\
&+ \frac{1}{K} \{ \sqrt{-g} g^{\alpha 0} (g_{0\sigma, \mu} - g_{0\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda}.
\end{aligned} \quad (42)$$

用计算 $V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}}$ 同样的方法可得

$$\{ \sqrt{-g} g^{\alpha 0} (g_{0\sigma, \mu} - g_{0\mu, \sigma}) g^{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \}_{, \lambda} = \frac{1}{r^2} 2 C_0^2 \eta^{\alpha 0} \mu^\beta + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (43)$$

从而由(42), (41)和(43)式得

$$V^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} - W^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} = -\frac{1}{Kr^2} C_0^2 \mu^\alpha \mu^\beta + \frac{1}{Kr^2} 2 C_0^2 \eta^{\alpha 0} \mu^\beta + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (44)$$

根据(27)和(42)式,

$$S^{\alpha\beta\lambda}_{\sqrt{\lambda}} = -\frac{1}{2Kr^2} [(5C_0^2 + CC_{00}) \mu^\alpha \mu^\beta - 4C_0^2 \eta^{\alpha 0} \mu^\beta] + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (45)$$

再由(26), (32)和(45)式, 得到郑玉昆的引力场能量动量赝张量

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{2Kr^2} \{ 4\eta^{\alpha 0} C_0^2 \mu^\beta - (C_0^2 + CC_{00}) \mu^\alpha \mu^\beta \} + o\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (46)$$

最后将(33)式所示的胡宁的 $t^{(n)\alpha\beta}$ 表达式代入(31)式, 得到轴对称体系的引力辐射总功率为

$$-dE/dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi C_0^2 \sin \theta d\theta. \quad (47)$$

而用郑玉昆的 $t^{\alpha\beta}$ 则得引力辐射总功率为

$$-dE/dt = \frac{1}{8} \int_0^\pi (3C_0^2 - CC_{00}) \sin \theta d\theta. \quad (48)$$

此外, 封闭体系的四维总动量为 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 对全空间的积分. 利用高斯定理可以写出

$$P^\alpha = \frac{1}{2K} \int (-g)^n g^{-1} (g g^{\alpha 0} g^{\lambda 0} - g g^{\alpha\sigma} g^{\lambda 0})_{, \lambda} n_\sigma r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

利用(37), (14), (15), (20)和(35)式可得

$$P^\alpha = \frac{-1}{2} \int [(4M - A) \mu^\alpha + (C_2 + 2C \cot \theta) m^\alpha] \sin \theta d\theta d\varphi.$$

注意到对称轴上正则性的要求和 M , A 和 C 与 φ 无关, 并利用(8)和(9)式, P^α 可以写为

$$P^\alpha = \left(0, 0, \frac{1}{2} \int M \sin \theta \cos \theta d\theta, \frac{1}{2} \int M \sin \theta d\theta\right). \quad (49)$$

若用郑玉昆的 $\tau^{\alpha\beta}$ 进行计算, 则得

$$P^\alpha = \frac{1}{K} \int \eta^{\alpha 0} a_0^0 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (50)$$

同样可以写出

$$P^\alpha = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \int M \sin \theta d\theta\right). \quad (51)$$

四、结 语

由胡宁的 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 得到的引力辐射总功率(47)式与 Bondi 不用任何 $\tau^{\alpha\beta}$ 表达式所得的结果是完全一致的。(47)式就是 Bondi 的引力辐射总功率公式^[6]。由(47)式可知, 只要 C_0 不为零, 则引力辐射总功率是恒正的。因此, $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 满足上述引力辐射方面对于合理的引力场总能量动量赓张量密度的两项要求。Bondi 发现 C 与四极矩有密切关系, 而且在准静和弱场情况下, C_0 与四极矩有简单的关系, 因而从(47)式也可以知道引力辐射仅与物质分布的四极矩有关。此外, 从(47)和(49)式还可以看到, 引力辐射总功率和封闭体系的总能量均与 n 无关, 即与引力场的能量分布无关。(47)式与 Bondi 公式的一致, 这不仅表明了 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 所具有的合理性方面, 同时也从理论上验证了 Bondi 对于柱面引力波及其辐射功率所作的论断。用郑玉昆的 $\tau^{\alpha\beta}$ 得到引力辐射总功率(48)式, 与 Bondi 不用 $\tau^{\alpha\beta}$ 得到的结果并不一致, 而且由于(48)式中 CC_{00} 项的出现, 而不能保证引力辐射总功率恒正。因此 $\tau^{\alpha\beta}$ 不能满足上述引力辐射方面对引力场的总能量动量赓张量密度的两项物理要求。不难看到, 这是由于 $\tau^{\alpha\beta}$ 的定义式中有一个求和指标只取零值^[9], 因而不是仿射张量所致。

参 考 文 献

- [1] 朗 道, 栗弗席兹, 场论, 袁炳南译, 人民教育出版社, §11—9 (1959).
- [2] 韦 伯, 广义相对论与引力波, 陈凤至、张大卫译, 科学出版社, §6.2 (1977).
- [3] C. Møller, The Theory of Relativity, (1955), p. 342.
- [4] C. Møller, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, **1**(10) (1961).
- [5] F. G. Friedlander, *Proc. Roy. Soc. A*, **269**(1962), 53.
- [6] H. Bondi *et al.*, *Proc. Roy. Soc. A*, **269**(1962), 21.
- [7] C. Møller, *Kgl. Dan. Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd.*, **34**(3) (1964).
- [8] 胡 宁, 中国科学, (3) (1977), 210.
- [9] 郑玉昆, 物理学报, **30**(1981), 46.

THE ENERGY-MOMENTUM PSEUDOTENSOR OF THE GRAVITATIONAL FIELD AND THE GRAVITATIONAL RADIATION EMITTED BY AN AXISYMMETRIC SYSTEM

WANG YOU-TANG

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

In this paper, we have calculated the total gravitational radiation emitted by an axisymmetric system per unit time. Direct calculation using Hu Ning's expression^[8] for the $\tau^{(\ast)\alpha\beta}$ and Bondi's cylindrical wave solution has led to $-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^\pi c_0^2 \sin\theta d\theta$.

This result is identical with Bondi's formula^[6] that has been obtained without using any expression for the $\tau^{\alpha\beta}$ and shows that the total power radiated is always positive. The result obtained from Zheng Yu-kun's expression^[9] for the $\tau^{\alpha\beta}$, however, does not agree with Bondi's formula and indicates that total power radiated is not always positive.