

广义相对论的有核多层球的结构及其稳定性

方 励 之 向 守 平

(中国科学技术大学天体物理研究室)

1981年11月6日收到

提 要

有核结构(或有晕结构)是在许多不同类型的天体中都遇到的一种几何位形. 本文讨论了广义相对论中的有核多层球平衡结构位形及其稳定性. 与无核情况相比, 它具有许多独特的性质, 主要有: 1. 在中心核区附近, 物质密度分布迅速增加; 2. 只对满足一定条件的中心核才存在有限半径的稳定解; 3. 当多方指数 $n \geq 3$ 时, 也存在稳定的平衡解.

一、引 言

有核结构是近年来在许多不同类型的天体中都遇到的一种几何位形. 它的特征是, 在天体中心有一个致密核心, 核心的外部则分布着密度较小的天体物质.

例如, 在 NGC 6641, NGC 6624, Terzan 2 及 Liller 1 等球状星团中分别发现有爆发式的 X 射线源 4U1746-37, 4U1820-30, 4U1722-30 及 MXB1730-335 等^[1], 它的原因很可能是在这些球状星团的中心存在着质量较大的黑洞^[2].

又如, 在巨椭圆星系 M87 中发现, 它除了具有通常的星系核之外, 还有一个极亮的核心, 这个核心不仅亮度很大, 颜色发蓝, 而且似乎还有相当亮的喷流从核心射出. 在 M87 周围的三十多个椭圆星系中都没有发现相似的现象. 这也引起一种猜测: 在 M87 的中心也可能有一个大而致密的核心, 例如黑洞^[3].

有晕结构实际上也可以看成为有核结构. 因为晕总是围绕着中心天体存在的. 星系晕的可能存在, 早就提出了. 最近, 实验表明中微子的静质量可能不为零^[4], 这使晕的讨论更加具体化了. 星系或者星系团周围都可能存在着中微子晕, 或者也可以等效地说, 星系或星系团可能都是相应的中微子天体的核心.

关于有核结构的各种特征, Peebles, Bahcall 和 Wolf, Frank 以及 Rees, Ipser 还有 Huntley 等人已先后作过研究^[5-7]. 严格地说, 对于球状星团、星系及星系团问题, 应当采用统计分布方法来描写其中的星体体系. 但是, 采用流体力学模拟, 也是一种可行而有效的近似. 在这种近似中常常采用下列多方物态方程来描写星体系统:

$$P = k\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

其中 P, ρ 分别为压力及密度, n 为多方指数, k 是由化学成份与比熵所决定的常数.

Huntley 和 Saslaw 首先用有核多层球理论讨论具有核心结构(例如黑洞或重磁旋体)的星系核模型^[9]. 这种有核多层球解与一般的多层球解相比,有许多特别的性质,突出的一点是物质密度分布在中心附近有一明显的尖峰,此外,它的半径、质量、投影密度分布以及稳定性等也都与无核多层球有所不同. 然而, Huntley 和 Saslaw 的讨论是在经典引力理论中进行的,原则上说不适用于非常致密的核心情况. 本文的目的就是建立广义相对论中的有核多层球理论,以使这种模型具有更大的适用性.

二、基本方程组

对于球对称的有核体系,其基本方程与一般的球对称流体球是一样的,它的度规为

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2. \quad (2)$$

对于理想流体情况,即能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \rho)U_\mu U_\nu, \quad (3)$$

度规张量分量 $A(r)$, $B(r)$ 应当满足下列方程:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) = 1 - 8\pi G \rho r^2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dr} = - \frac{2}{P + \rho} \frac{dP}{dr}. \quad (5)$$

积分(4)式得到

$$\frac{r}{A} = r - 8\pi G \int_{r_0}^r \rho r'^2 dr' - 2GM_0, \quad (6)$$

其中 $2GM_0$ 是积分常数, 这里 M_0 及 r_0 的意义分别是标志核的质量及半径. (6) 式亦可改写成

$$A = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} M(r) &= M_1(r) + M_0, \\ M_1(r) &= \int_{r_0}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \end{aligned} \quad (8)$$

或者

$$\frac{dM}{dr} = \frac{dM_1}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (9)$$

利用(3), (5)等式, 即可由 Einstein 场方程推得星体结构方程为

$$-r^2 \frac{dP}{dr} = GM(r)\rho \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} \left(1 + \frac{P}{\rho} \right). \quad (10)$$

(9), (10) 式及物态方程(1)构成求解体系的平衡位形的基本方程组, 它与无核情况的方程形式上是完全一样的, 不同的一点是(10)式中的 $M(r)$ 现在应理解为(8)式, 而无核情况相当于 $M_0 = 0$. 现在积分的初条件为

$$\rho = \rho_c, \quad M = M_0 \quad \text{当 } r = r_0, \quad (11)$$

ρ_c 是核界面处的流体密度.

为得到 (9), (10), (11) 及 (1) 式的无量纲形式, 现作下列变换:

$$r = a\xi, \quad (12)$$

$$\rho = \rho_c \vartheta^n, \quad (13)$$

$$M_1 = 4\pi\rho_c a^3 m(\xi), \quad (14)$$

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_c \lambda a^3 \xi_0^3, \quad (15)$$

其中有关的常数为

$$a = \left[\frac{(n+1)\sigma}{4\pi G \rho_c} \right]^{1/2}, \quad \sigma = \frac{k \rho_c^{1/n}}{c^2} = \frac{P_c}{\rho_c c^2}, \quad (16)$$

$$\xi_0 = r_0/a, \quad (17)$$

$$\lambda = \rho_0/\rho_c, \quad (18)$$

$$\rho_0 = 3M_0/4\pi r_0^3. \quad (19)$$

这里 P_c 是核界面处流体物质的压力, ρ_0 是核区物质密度的标志, σ 的物理意义是标志相对论性的大小. 在上述变换下, 基本方程组和边界条件化为

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \cdot \frac{1 - 2\sigma(n+1)[(\lambda\xi_0^3/3) + m(\xi)]/\xi}{1 + \sigma\vartheta} \\ + \frac{1}{3} \lambda \xi_0^3 + m(\xi) + \sigma \xi \vartheta \frac{dm}{d\xi} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{dm}{d\xi} = \xi^2 \vartheta^n, \quad (21)$$

$$\vartheta(\xi_0) = 1, \quad (22)$$

$$m(\xi_0) = 0. \quad (23)$$

当 $\xi_0 \rightarrow 0$ 时, 方程组就过渡为无核情况的相对论性 Emden 方程^[10]. 当光速 $c \rightarrow \infty$ 时, (20) 式中 $\sigma \rightarrow 0$, 它过渡为经典情况的有核多层球的方程. 所以, 方程组 (20), (21) 可称为有核情况的相对论性 Emden 方程.

现在求解 (5) 式, 注意到 (10) 式, 即得 $B(r)$ 的表达式为

$$B(r) = \exp \left\{ - \int_r^\infty \frac{2G}{r'^2} [M(r') + 4\pi r'^3 P(r')] \left[1 - \frac{2GM(r')}{r'} \right]^{-1} dr' \right\}, \quad (24)$$

其中已利用了 $B(\infty) = 1$ 这一条件. 为了化简 (24) 式, 将其指数中的积分分成球体内与球体外两部分, 即

$$- \int_r^\infty = - \int_r^R - \int_R^\infty, \quad (25)$$

其中 R 为平衡球的外边界的坐标半径. 在球体外, 有

$$M(r') = M(R), \quad P(r') = 0, \quad (26)$$

故

$$- \int_R^\infty = \ln \left[1 - \frac{2GM(R)}{R} \right]. \quad (27)$$

利用 (1), (20), (21) 等式, 可以得到

$$\begin{aligned}
 -\int_r^R &= -\int_{\xi}^{\xi_1} \frac{2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m + \xi^3 \sigma \vartheta^{n+1} \right) d\xi}{\xi^2 \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m \right) / \xi \right]} \\
 &= \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{2(n+1)\sigma \frac{d\vartheta}{d\xi} d\xi}{1 + \sigma \vartheta} = -2(n+1) \ln(1 + \sigma \vartheta(\xi)). \quad (28)
 \end{aligned}$$

这里 $\xi_1 = R/a$, 并注意在流体外边界处密度为零

$$\vartheta(\xi_1) = 0, \quad (29)$$

即流体球外边界相应于 Emden 函数 $\vartheta(\xi)$ 的第一个零点.

由 (27), (28) 式, 最终得到 (24) 式的无量纲参数形式为 (当 $\xi < \xi_1$)

$$B(\xi) = \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m(\xi_1) \right) / \xi_1 \right] [1 + \sigma \vartheta(\xi)]^{-2(n+1)}. \quad (30)$$

类似地 (7) 式可改写成

$$A(\xi) = \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m(\xi) \right) / \xi \right]^{-1}. \quad (31)$$

在球体外部, 即 $\xi > \xi_1$ 区域, 有

$$A(\xi) = B^{-1}(\xi) = \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m(\xi_1) \right) / \xi \right]^{-1}. \quad (32)$$

利用 (30) 式, 还可以求得球体内任一点的引力红移值为

$$\begin{aligned}
 z &= B^{-\frac{1}{2}}(\xi) - 1 \\
 &= \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m(\xi_1) \right) / \xi_1 \right]^{-\frac{1}{2}} [1 + \sigma \vartheta(\xi)]^{n+1} - 1. \quad (33)
 \end{aligned}$$

如果球体是由对光线透明的物质构成, 则这种引力红移在原则上是可以观测的.

三、数值结果及讨论

在表 1 中给出一些典型的平衡位形的数值积分结果, 有关的参数分别取 $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$; $\sigma = 0$ (即 $c \rightarrow \infty$), $0.1, 0.6, 1.0$; 且 $\xi_0 = 0.01$. 表 1 中列出的物理量 (均取无量纲形式) 计有

- 1) 多层球的坐标半径 ξ_1 ;
- 2) 核外球体的质量 $m(\xi_1)$;
- 3) 核表面处的密度 ρ_c 与核外流体物质的平均密度 $\bar{\rho}$ 之比, 即

$$\rho_c / \bar{\rho} = \rho_c \cdot \frac{4\pi}{3} (R^3 - r_0^3) / M_1(R) = (\xi_1^3 - \xi_0^3) / 3m(\xi_1); \quad (34)$$

- 4) 核表面处的引力红移 z :

$$z = \left[1 - 2(n+1)\sigma \left(\frac{\lambda}{3} \xi_0^3 + m(\xi_1) \right) / \xi_1 \right]^{-\frac{1}{2}} (1 + \sigma)^{n+1} - 1. \quad (35)$$

从这些结果, 我们可以看到相对论性有核多层球有以下一系列特征.

表 1 有核多层球的典型数值计算结果

$$n = 1.5 \quad \xi_0 = 0.01$$

σ	λ	ξ_1	$m(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	z
0 ($c \rightarrow \infty$)	10	3.6540	2.7135	5.993	0
	100	3.6567	2.7073	6.020	0
	1000	3.6843	2.6450	6.303	0
	10000	4.0362	1.9921	11.00	0
	29790	9.9825	0.03666	9045	0
0.1	10	3.0388	1.4822	6.311	0.4594
	100	3.0428	1.4809	6.341	0.4589
	1000	3.0833	1.4672	6.659	0.4538
	10000	3.6583	1.2479	13.08	0.3938
	22650	10.906	0.02631	16430	0.2700
0.6	10	2.2196	0.3506	10.40	3.464
	100	2.2237	0.3510	10.44	3.463
	1000	2.2684	0.3557	10.94	3.451
	9000	9.2354	0.1227	2140	2.306
1.0	10	2.1603	0.2052	16.38	6.806
	100	2.1636	0.2055	16.43	6.807
	1000	2.2018	0.2093	17.00	6.815
	5810	17.132	$6.628 \cdot 10^{-3}$	$2.529 \cdot 10^5$	4.664

$$n = 2.0 \quad \xi_0 = 0.01$$

σ	λ	ξ_1	$m(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	z
0 ($c \rightarrow \infty$)	10	4.3535	2.4107	11.41	0
	100	4.3600	2.4070	11.48	0
	1000	4.4267	2.3693	12.20	0
	10000	5.3242	1.9558	25.72	0
	29970	121.78	0.01450	$4.152 \cdot 10^7$	0
0.1	10	3.6998	1.2987	13.00	0.4981
	100	3.7074	1.2986	13.08	0.4977
	1000	3.7859	1.2977	13.94	0.4935
	10000	5.0415	1.2399	34.45	0.4419
	21765	169.72	0.01264	$1.289 \cdot 10^8$	0.3310
0.6	10	3.3996	0.3201	40.91	4.038
	100	3.4048	0.3208	41.02	4.039
	1000	3.4639	0.3279	42.25	4.046
	7840	412.63	0.01078	$2.172 \cdot 10^9$	3.096
1.0	10	4.2026	0.2030	121.9	8.493
	100	4.2008	0.2034	121.5	8.498
	1000	4.1878	0.2079	117.7	8.551
	4921	100.41	0.09503	$3.551 \cdot 10^6$	7.023

$n = 2.5 \quad \xi_0 = 0.01$

续表 1

σ	λ	ξ_1	$m(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	z
0 ($c \rightarrow \infty$)	10	5.3564	2.1870	23.42	0
	100	5.3685	2.1853	23.60	0
	1000	5.4929	2.1674	25.49	0
	10000	7.2580	1.9622	64.95	0
	29990	86770	$6.332 \cdot 10^{-3}$	$3.439 \cdot 10^{16}$	0
0.1	10	4.7831	1.1693	31.20	0.5333
	100	4.7960	1.1702	31.42	0.5330
	1000	4.9310	1.1794	33.89	0.5299
	10000	7.3430	1.2725	103.7	0.4895
	20860	6719.7	0.1716	$5.894 \cdot 10^{11}$	0.3960
0.6	10	7.7263	0.3202	480.1	4.701
	100	7.7131	0.3209	476.6	4.703
	1000	7.5899	0.3288	443.2	4.729
	6880	9217.3	0.1725	$1.513 \cdot 10^{12}$	4.181
1.0	10	18.215	0.2575	7823	10.92
	100	18.086	0.2573	7665	10.92
	1000	16.653	0.2557	6020	10.98
	4250	94567	0.1748	$1.613 \cdot 10^{12}$	10.31

 $n = 3.0 \quad \xi_0 = 0.01$

σ	λ	ξ_1	$m(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	z
0 ($c \rightarrow \infty$)	10	6.8988	2.0182	54.23	0
	100	6.9197	2.0181	54.73	0
	1000	7.1359	2.0168	60.06	0
	10000	10.367	2.0035	185.4	0
	29990	$2.924 \cdot 10^6$	1.9736	$4.222 \cdot 10^{18}$	0
0.1	10	6.8279	1.0786	98.37	0.5664
	100	6.8494	1.0803	99.15	0.5663
	1000	7.0759	1.0979	107.6	0.5644
	10000	11.603	1.3444	387.3	0.5373
	20000	$7.150 \cdot 10^4$	1.9884	$6.127 \cdot 10^{13}$	0.4641
0.6	10	90.922	0.4492	$5.578 \cdot 10^5$	5.633
	100	89.146	0.4476	$5.276 \cdot 10^5$	5.634
	1000	71.421	0.4335	$2.801 \cdot 10^5$	5.651
	6100	12586	2.004	$3.316 \cdot 10^{11}$	5.556
1.0	10	183.75	0.6370	$3.148 \cdot 10^6$	15.23
	100	184.95	0.6360	$3.215 \cdot 10^6$	15.23
	1000	200.23	0.6416	$4.170 \cdot 10^6$	15.21
	3726	134.98	1.4220	$5.765 \cdot 10^5$	15.72

$n = 3.5 \quad \xi_0 = 0.01$

续表 1

σ	λ	ξ_1	$m(\xi_1)$	$\rho_c/\bar{\rho}$	z
0 ($c \rightarrow \infty$)	10	9.5392	1.8907	153.0	0
	100	9.5757	1.8920	154.7	0
	1000	9.9538	1.9052	172.6	0
	10000	15.918	2.0777	647.1	0
	29990	$1.708 \cdot 10^7$	33.617	$4.940 \cdot 10^{19}$	0
0.1	10	11.889	1.0209	548.7	0.5986
	100	11.925	1.0233	552.3	0.5985
	1000	12.304	1.0482	592.4	0.5981
	10000	21.056	1.4619	2129	0.5860
	19190	$4.840 \cdot 10^4$	16.473	$2.295 \cdot 10^{18}$	0.5356
0.6	10	1642.6	1.8370	$8.042 \cdot 10^8$	7.315
	100	1669.6	1.8425	$8.420 \cdot 10^8$	7.315
	1000	2038.4	1.9081	$1.480 \cdot 10^8$	7.311
	4615	$2.949 \cdot 10^6$	19.554	$4.371 \cdot 10^{17}$	7.290
1.0	10	1543.7	1.6180	$7.581 \cdot 10^8$	21.73
	100	1545.2	1.6210	$7.586 \cdot 10^8$	21.73
	1000	1580.1	1.6657	$7.894 \cdot 10^8$	21.74
	3258	$4.495 \cdot 10^7$	36.540	$8.287 \cdot 10^{20}$	21.63

1. 密度剖面中的尖峰

在经典有核多层球模型中, 就已经注意到这种平衡位形的一个特征就是当接近核表面时, 物质密度有迅速的增长. 在密度-半径图(即密度剖面图)上呈尖峰状.

在相对论情况中, 这种尖峰结构依然存在, 而且比经典情况更加明显. 图 1 是几个典型的有核多层球的密度剖面图. 从中可以清楚地看到, 有核多层球似乎可以分成内外两个部分, 即内部的尖峰区, 外部的缓坡区. 尖峰区的密度变化远大于无核多层球, 缓坡区则又小于相应的无核多层球. 两区域之间的过渡部分很窄, 该处的密度变化率很快地从高值变到低值.

相对论性越强, 即 σ 越大, 则密度峰越锐. 这一点可以用下列方法定性地看到. 由方程 (20), (21) 以及初条件 (22), (23) 式推知, 当 $\xi \rightarrow \xi_0$ 时, 有

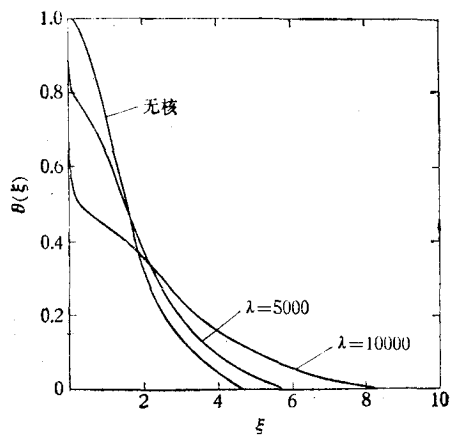


图 1

 $n = 2.5; \sigma = 0.2; \xi_0 = 0.01$

$$\frac{d\rho}{d\xi} \rightarrow - \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma(n+1)\lambda\xi_0^2/3} \left(\frac{\lambda}{3} + \sigma \right) \xi_0. \quad (36)$$

所以,一般地说, σ 的增加是使 $\left| \frac{d\vartheta}{d\xi} \right|$ 变大,即使峰变得更陡.

由(36)式也可以看到,尖峰区的密度梯度也随着 λ , ξ_0 和 n 的增加而增加.

2. 对核的限制条件

现在来讨论对于怎样的核才可能存在有限的解. 由(36)式可以得知,使得 $\frac{d\vartheta}{d\xi} < 0$ 必须有

$$2\sigma(n+1)\lambda\xi_0^2/3 < 1. \quad (37)$$

否则,多层球中将存在一个 $\frac{d\vartheta}{d\xi} > 0$ 或为无穷的区域,而这种解是非物理的. (37)式就是对核的参数 λ 及 ξ_0 的一个禁戒范围.

实际上限制条件(37)式只是下列条件的一个特殊情况(即相应于 $\xi \rightarrow \xi_0$):

$$2\sigma(n+1)\left(\frac{\lambda}{3}\xi_0^3 + m(\xi)\right)/\xi < 1. \quad (38)$$

若此条件不满足,则由(30), (31)及(32)式可知, $A(r)$, $B(r)$ 将成为负、零或无穷,故也是非物理解. 如果不用无量纲量,而用更熟知的形式, (37)式实际就是

$$\frac{2GM_0}{c^2 r_0} < 1. \quad (39)$$

这就是说,如果中心核是一个黑洞,那么,原则上就不存在平衡的多层球解. 这是合理的,因为黑洞界面处物体不可能处于静态,必定有吸积过程存在. 为了求以黑洞为核心的有核位形,原则上要用流动的边界条件,而不能用静态的.

对核的限制还有另外一种类型. 如果在方程(20)中忽略含 σ 的项,即相当于取非相对论极限,再忽略掉 $m(\xi)$ 项,即相当于忽略核外物质的自引力,则方程变为

$$\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{1}{3} \lambda \xi_0^3 = 0, \quad (40)$$

满足条件(22)式的解为

$$\vartheta = 1 + \frac{1}{3} \lambda \xi_0^3 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_0} \right) = 1 - \frac{1}{3} \lambda \xi_0^3 \cdot \frac{\xi - \xi_0}{\xi}. \quad (41)$$

当 ξ 在 $\xi_0 \ll \xi < \xi_*$ 范围时(这里 ξ_* 是 m 的贡献可以与核的贡献相比之处), (41)式近似为

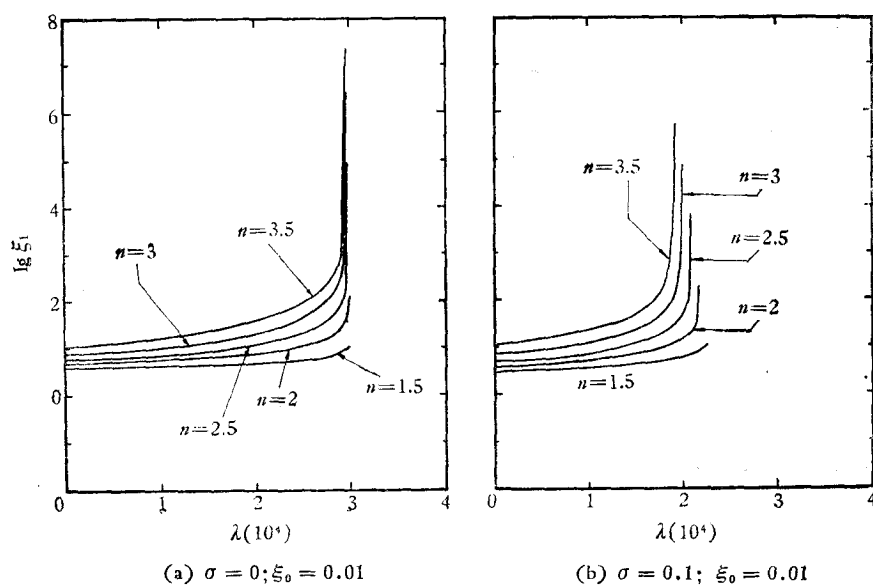
$$\vartheta \simeq 1 - \frac{1}{3} \lambda \xi_0^3. \quad (42)$$

由密度恒正的要求得到非相对论极限下的限制条件为

$$\frac{1}{3} \lambda \xi_0^3 < 1. \quad (43)$$

(43)式与(37)式的形式是相似的,对于 σ 小的情况, (43)式比(37)式的限制更强.

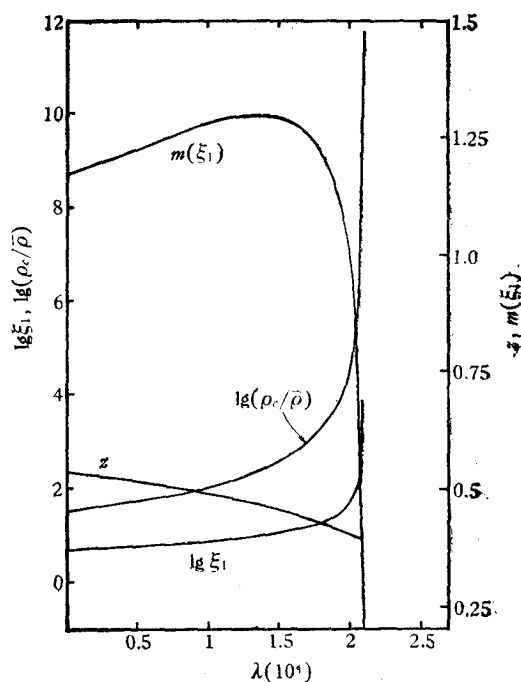
由于限制条件(37), (38), (43)式对某些核来说,多层流体球可能没有有限的平衡解. 图2给出了严格计算的结果. 我们看到,对于非相对论情况(图2(a)), ξ_1 在临界值

图2 $\lg \xi_1 - \lg \lambda$ 曲线与 n, σ 关系

$\frac{1}{3} \lambda \xi_0^2 \sim 1$ 附近趋于无限. 而在相对论情况, 这个临界值不但与 λ, ξ_0 有关, 而且也与 n, σ 有关. 图3中给出典型情况下平衡解的各种参数随 λ 的变化. 在核的临界值附近, 质量 $m(\xi_1)$ 迅速下降, 红移值 z 则趋于裸的核体的表面红移值.

3. 稳定性

有核情况的稳定性问题与无核情况有很大的差别. 一种平衡解是不稳定的, 其含义是, 当这种解受到扰动后, 它会发生无限的坍缩或瓦解. 然而, 在有核情况中核本身是不受扰动影响的. 因此, 在这种外加的环境中, 物质体系不可能发生无限的坍缩或瓦解. 当然, 这并不是说, 任何一个有核多层球的平衡位形都是稳定的, 而是说, 受到扰动后它或者回到原来的状态(对于稳定的平衡解)或过渡到另一个稳定解. 这样, 有核多层球就应当有下列一个特点: 在无核情况, 对于 $n \geq 3$ 的物质不存在稳定的多层球, 但在有核情况, 对任何的 n 值都应存在稳定的多层球.

图3 $n = 2.5; \sigma = 0.1; \xi_0 = 0.01$

我们更定量地来说明上述论点. 与无核情况相同, 多层流体球的平衡稳定性条件可

由下式表述:

$$\frac{\partial M_1(R)}{\partial \rho_c} > 0, \quad (44)$$

由于 $\rho_c = \left(\frac{\sigma}{k} c^2\right)^n$, 且 $n > 0$, 这一条件等价于

$$\frac{\partial M_1(R)}{\partial \sigma} > 0 \quad (45)$$

或用无量纲参数形式

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} [\sigma^{(3-n)/2} m(\xi_1)] > 0. \quad (46)$$

核本身不受扰动影响的含义是, 核的质量 M_0 及半径 r_0 总保持不变, 或等价地 $\nu = \frac{2GM_0}{c^2 r_0}$ 与 r_0 都保持不变. 由 (15)–(17) 式, 这一要求相当于

$$\nu = 2\sigma(n+1)\lambda\xi_0^3/3 = \text{常数} \quad (47)$$

以及

$$(n+1)^{\frac{1}{2}}\sigma^{(1-n)/2}\xi_0 = \text{常数}, \quad (48)$$

并且由 (39) 式应有 $0 \leq \nu < 1$. (48) 式亦可改写成

$$\xi_0 = \delta \cdot \sigma^{(n-1)/2}, \quad (49)$$

其中 δ 为常数. 显然, 只有当 $n=1$ 时, ξ_0 与 σ 无关. 由 (49) 及 (47) 二式得到, 核不变时, λ 与 σ 之间应有下列关系:

$$\lambda = \frac{3\nu}{2(n+1)\delta^2\sigma^n}. \quad (50)$$

核的质量 M_0 在以 ν, δ 为参数时可表为

$$M_0 = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}G^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\nu\delta}{2}, \quad (51)$$

其无量纲参数形式为

$$m_0 = \frac{1}{3}\lambda\xi_0^3 = \frac{\nu\delta}{2(n+1)}\sigma^{(n-3)/2}. \quad (52)$$

从 (49), (50) 式可知, 由 (43) 式所表示的在非相对论情况下对核的限制条件现应为

$$\frac{\nu}{2(n+1)\sigma} < 1. \quad (53)$$

当 ν 一定时, (53) 式给出 σ 的下限

$$\sigma > \frac{\nu}{2(n+1)}. \quad (54)$$

这就是说, 只有当 $\nu \ll 1$ 才可能有 $\sigma \ll 1$, 即只有当核的引力场很弱时才能够取非相对论极限 $\sigma \rightarrow 0$ ($c \rightarrow \infty$). 这是合理的, 因为当

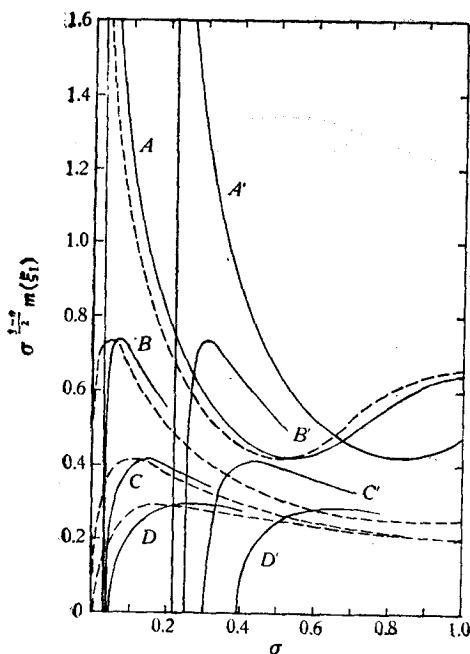


图4 虚线表示无核情况; A, B, C, D 与 A', B', C', D' 分别表示 $\nu=0.2$ 与 $\nu=0.8$; 各曲线所代表的多方指数是 $n=3$ (A, A'), $n=2.5$ (B, B'), $n=2$ (C, C'), $n=1.5$ (D, D'); $\delta=0.01$

表 2 稳定平衡区域所对应的参数值(取 $\delta = 0.01$)

n	ν	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$z_{\max}$
1.5	0 (无核)	0	0.20	0.97
	0.2	0.04	0.25	1.17
	0.8	0.16	0.66	3.42
2.0	0 (无核)	0	0.10	0.50
	0.2	0.033	0.14	0.66
	0.8	0.13	0.44	2.36
2.5	0 (无核)	0	0.04	0.20
	0.2	0.029	0.07	0.32
	0.8	0.11	0.31	1.70
3.0	0 (无核)	—	—	—
	0.2	0.025	0.029	0.12
	0.8	0.10	0.22	1.24

核的引力场较强时, 必须考虑流体的相对论性特征.

图 4 中给出了当中心核固定时的 $M_1(R) - \rho_c$ 关系的无量纲形式, 即 $\sigma^{3-n/2} m(\xi_1) - \sigma$ 图. 计算中取 $\delta = 0.01$, ν 分别取为 0.2 和 0.8. 由图 4 中可以看出, $\nu = 0.8$ 的曲线族向右移动到相对论性较强(密度较高)的区域. 对于这两族曲线, 当 σ 较小时所有的多方指数下都存在满足 (46) 式的区域, 即稳定平衡区域, 并且 n 越大, 这一区域也越窄(曲线越陡). 某些典型情况下稳定平衡区域所对应的 σ 的下限 $\sigma_{\min}$, 上限 $\sigma_{\max}$ 以及最大中心(核表面)红移值 $z_{\max}$ 的计算结果列于表 2.

表 2 的结果表明, ν 越大, 稳定区域越宽, 并且 $z_{\max}$ 也越大.

图 4 中, $n = 3$ 的无核情况(虚线)及有核情况下当 σ 较大时都满足 (46) 式, 但这时体系仍然不稳定. 理由是, 这时体系处于较高的能量的平衡态, 它可能在受到扰动后向较低能量的平衡态过渡. 而后者又是不稳定的^[10]. 我们对此作一简要分析.

有核时体系的总能(包括物质静能, 内能与引力能)为

$$E = Mc^2 = 4\pi\rho_c c^2 a^3 (m_0 + m(\xi_1)), \quad (55)$$

其中 m_0 由 (52) 式给出. 流体物质的固有静能为

$$E_{0g} = 4\pi \int_{r_0}^R \rho_g c^2 A^{-\frac{1}{2}}(r) r^2 dr$$

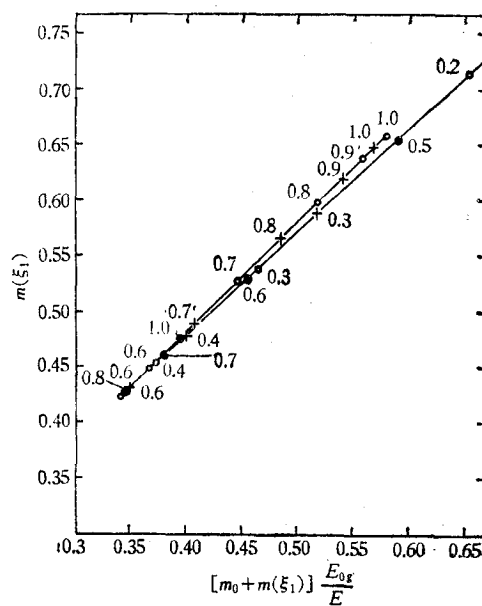


图 5 纵轴表示流体总能; 横轴表示流体固有静能;

○为无核; +为 $\nu = 0.2$; ●为 $\nu = 0.8$;
 $n = 3$; $\delta = 0.01$

$$= 4\pi\rho_g c^2 a^3 \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{9^n \xi^2 d\xi}{(1 + \sigma\theta)^n [1 - 2\sigma(n+1)(m_0 + m(\xi))/\xi]^{1/2}}, \quad (56)$$

其中 ρ_g 为流体的固有静质量密度.

图 5 中给出了核不变时, $n = 3$, $\delta = 0.01$ 时的 $E-E_{0g}$ 关系, 并采用无量纲形式标度, 即 E 由 $m(\xi_1)$ 标度(为便于不同 ν 值的比较, 我们均由 E 中扣除了核的贡献), E_{0g} 由 $(m_0 + m(\xi_1))E_{0g}/E$ 标度. 图 5 表明, 当 σ 较大时(对应于图 4 曲线的上升部分)体系处于较高的能态, 而它下方, 具有相同静能(粒子数)的较低能态对应的 σ 都较小, 它们恰恰处于图 4 曲线的不稳定区.

参 考 文 献

- [1] 方励之, A. Qadir, R. Ruffini, *Physics and Contemporary Needs*, Vol. 5 (1981). ed. Riazuddin.
- [2] J. N. Bahcall and J. P. Ostriker, *Nature*, **256**(1975), 23.
- [3] W. L. W. Sargent, P. J. Young, *Astrophysical J.*, **221**(1978), 731.
- [4] F. Reines, H. W. Sobel, E. Pasierb, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 1307; V. A. Lyubimov *et al.*, *Phys. Lett. B*, **94**(1980), 266.
- [5] P. J. E. Peebles, *Astrophysical J.*, **178**(1972), 371.
- [6] J. N. Bahcall, R. A. Wolf, *Astrophysical J.*, **209**(1976), 214.
- [7] J. Frank, M. J. Rees, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **176**(1976), 633.
- [8] J. R. Ipser, *Astrophysical J.*, **222**(1978), 976.
- [9] J. M. Huntley, W. C. Saslaw, *Astrophysical J.*, **199**(1975), 328.
- [10] R. F. Tooper, *Astrophysical J.*, **140**(1964), 434.

THE STRUCTURE AND STABILITY OF THE RELATIVISTIC POLYTROPES WITH A COMPACT CORE

FANG LI-ZHI XIANG SHOU-PING

(Astrophysics Research Division, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

The objects with core (or with halo) are typical configuration in various astrophysical problems. The equilibrium and stability of the relativistic polytropes with a compact core have been discussed in this paper. Comparing with the normal polytropes, the relativistic loaded polytropes have many unique properties, some primary ones are:

1. The distribution of density has a steep spike near the centre.
2. The stable solution of polytropes with finite radius may exist only when the core satisfy some restricted conditions.
3. When the polytropic index $n \geq 3$, the stable solution of equilibrium can also exist.