

Thom 系统标度性的证明

刘 建 民 龚 昌 德

(南京大学物理系)

1982 年 2 月 25 日收到

提 要

本文应用突变论 (catastrophe theory) 证得了 Thom 系统自由能函数族的普适的临界渐近形式, 并从它推导了临界指数公式, 标度律和标度假设.

一、引 言

磁相变, 汽液相变和超流 He 相变中的临界标度性早已有实验证实^[1,2]. 近来, 在超薄 ($\sim 30 \text{ \AA}$) 粒状硝酸铋的超导相变^[3], 非晶态磁相变^[4], 自旋玻璃铁磁相变^[5]中也发现有临界标度性. 这些相变系统除了均含一个序参量和两个场变量外, 很不相同. 这表明临界标度性同相变系统的具体物理机制关系不大, 是属一大类系统共有的特征.

二、Thom 系 统

设系统哈密顿量为 H , 序参量为 $\eta = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, 取

$$\begin{aligned} z &= \sum_{\text{all}} \langle |e^{-\beta H}| \rangle = e^{-N\beta f(t)} = \sum_{\eta} \sum_{(\eta)} \langle \eta | e^{-\beta H} | \eta \rangle \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{\eta} e^{-N\beta f(\eta, t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$t = t_1, t_2, \dots, t_r$ 为场变量, (η) 指 η 固定时系统所有的态.

$$f(\eta, t) = -\frac{1}{N\beta} \ln \sum_{(\eta)} \langle \eta | e^{-\beta H} | \eta \rangle \quad (2)$$

为表征系统的自由能函数族.

由最陡下降法^[6],

$$\sum_{\eta} e^{-N\beta f(\eta, t)} = \frac{A}{\sqrt{N}} e^{-N\beta f(\eta_0, t)},$$

η_0 为 $f(\eta, t)$ 的极小点, A 为同 N 无关的正数. 于是

$$f(t) = f(\eta_0, t) - \frac{\ln A}{N\beta} + \frac{\ln N}{2N\beta}.$$

在热力学极限下或对足够大的 N , 有

$$f(t) = f(\eta_0, t). \quad (3)$$

这样, 以 $f(\eta, t)$ 为自由能函数族的系统属突变论 (CT) 系统^[7,8]. 考虑到 CT 应用于

统计物理系统的特殊性,我们采纳 Maxwell 约定^[7,9-11],即系统稳恒态的序参量值由 $f(\eta, t)$ 的最小值决定.

当系统的 $f(\eta, t)$ 为结构(拓扑)稳定或在补充适当的场变量后为结构(拓扑)稳定时,我们称该系统为 Thom 系统.

按结构(拓扑)稳定的物理意义, Thom 系统是具有稳定相变和临界现象的系统: 各次实验中条件不可能完全相同,实验条件的小变化对应于系统 f 函数族的微扰;在条件有小变化的各次实验中,系统相变形貌和临界现象的结果不变,这对应了系统相变形貌和临界现象同 f 函数族的微扰无关,即结构(拓扑)稳定^[7,12,13].

判定一个函数族 f 是否结构(拓扑)稳定,有著名的充要定理——Thom 氏 T 交(transversality)定理^[7,12,14].

三、Thom 系统 f 函数族的临界渐近形式

假定有含一个序参量 η 和两个独立场变量 t_1, t_2 的 Thom 系统,其自由能函数族为 $f(\eta, t_1, t_2)$, $f(0, 0, 0) = 0$, 假定 $(0, 0, 0)$ 是此系统的临界点,并且 $f(\eta, 0, 0)$ 在此点的第一个不为零的导数是 x 阶,即 $(d^x f(\eta, 0, 0)/d\eta^x)_0 \neq 0$, x 有限.

可以把 $f(\eta, 0, 0)$ 写成 $f(\eta, 0, 0) = j^x f(\eta, 0, 0) + (\text{余项}) = A\eta^x + (\text{余项})$, (余项)为 order $(x+1)$ 的函数.

因为 $\eta^{x+1} = \left(\frac{1}{xA} \eta^2 \right)^{j^{x+1} \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta, 0, 0)} \eta^2$, $\frac{1}{xA} \eta^2 \in I_1^2$, $f(\eta, 0, 0)$ 是 x 强定的. 又

因为 $\eta^{x-1} = \frac{1}{xA} j^{x-1} \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta, 0, 0)$, 即 $M_1^{x-1} \subset \Delta_{x-1} f(\eta, 0, 0)$, 有 $\text{cod } f(\eta, 0, 0) = x - 2$.

2. 余基可选为 $\eta, \eta^2, \dots, \eta^{x-2}$.

由 Thom 定理和场变量 t_1, t_2 的独立性, $v_1(\eta) = \frac{\partial}{\partial t_1} J^{x-2} f(\eta, t_1, 0)_0$, $v_2(\eta) = \frac{\partial}{\partial t_2} J^{x-2} f(\eta, 0, t_2)_0$ 都应含在 $f(\eta, 0, 0)$ 的余基空间 $\{\eta, \eta^2, \dots, \eta^{x-2}\}$ 中, 且彼此独立. 因此, 必有 $x-2 \geq 2$.

当 $x-2=2$ 时, $\{v_1(\eta), v_2(\eta)\} = \{\eta, \eta^2\}$, $\text{cod } f(\eta, 0, 0) = 2$, 按 Thom 定理, $f(\eta, t_1, t_2)$ 是 universal 族.

当 $x-2 > 2$ 时, 我们依下法扩充系统.

在余基空间 $\{\eta, \eta^2, \dots, \eta^{x-2}\}$ 中选取 $x-4$ 个矢 $v_3(\eta), \dots, v_{x-2}(\eta)$, 使

$$\{v_1(\eta), v_2(\eta), v_3(\eta), \dots, v_{x-2}(\eta)\} = \{\eta, \eta^2, \dots, \eta^{x-2}\}. \quad (4)$$

补充 $x-4$ 个场变量 $t_3, t_4, \dots, t_{x-2}$, 把系统扩充为

$$f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2}) = f(\eta, t_1, t_2) + t_3 v_3(\eta) + \dots + t_{x-2} v_{x-2}(\eta).$$

显然,

$$f(\eta, t_1, t_2, 0, \dots, 0) = f(\eta, t_1, t_2),$$

$$f(\eta, 0, \dots, 0) = f(\eta, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} f(\eta, t_1, 0, \dots, 0) &= f(\eta, t_1, 0), \\ f(\eta, 0, t_2, 0, \dots, 0) &= f(\eta, 0, t_2). \end{aligned} \quad (5)$$

利用(5)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} J^{x-2} f(\eta, t_1, 0, \dots, 0)_0 &= v_1(\eta), \\ \frac{\partial}{\partial t_2} J^{x-2} f(\eta, 0, t_2, 0, \dots, 0)_0 &= v_2(\eta), \\ \frac{\partial}{\partial t_i} J^{x-2} f(\eta, 0, 0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0)_0 &= v_i(\eta), \quad i = 3, 4, \dots, x-2 \end{aligned}$$

以及 $f(\eta, 0, \dots, 0)$ 的余基空间同于 $f(\eta, 0, 0)$ 的.

于是,由(4)式 $f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2})$ 族是结构稳定的,加上 $\text{cod } f(\eta, 0, \dots, 0) = x-2$, $f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2})$ 是 universal 族.

此外,(4)式左边各基可用右边各基表示出来,即

$$\begin{aligned} v_1(\eta) &= : \eta^{r_{11}} + \cdot \eta^{r_{12}} + \dots, \\ v_2(\eta) &= : \eta^{r_{21}} + \cdot \eta^{r_{22}} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6)$$

:是非零的数系数, $\cdot$ 是数系数, $r_{11} < r_{12} < \dots < r_{21} < r_{22} < \dots$.

因为 $f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2})$ 是 universal, $f(\eta, 0, \dots, 0)$ 是 x 强定的,又因为 $(0, \dots, 0)$ 是 $f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2})$ 的临界点,容易验证 $M_i^{-1} \subset \Delta_{x+1} f(\eta, 0, \dots, 0)$ 成立,故存在一个 $(0, \dots, 0)$ 的邻域,其中有强同胚等价关系

$$\begin{aligned} f(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2}) &\stackrel{\cong}{\sim} j^{x-3} f(y, 0, \dots, 0) + s_1 v_1(y) \\ &+ \dots + s_{x-2} v_{x-2}(y), \end{aligned}$$

其中不变原点的强同胚为

$$\begin{aligned} y &= y(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2}), \\ s_1 &= s_1(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2}), \\ &\dots\dots\dots \\ s_{x-2} &= s_{x-2}(\eta, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{x-2}), \end{aligned}$$

它满足

$$\begin{aligned} 0 &= y(0, \dots, 0), \\ 0 &= s_1(0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= s_{x-2}(0, \dots, 0) \end{aligned}$$

和

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial t_{x-2}} \\ \frac{\partial s_1}{\partial \eta} & \frac{\partial s_1}{\partial t_1} & \frac{\partial s_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial t_{x-2}} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial s_{x-2}}{\partial \eta} & \frac{\partial s_{x-2}}{\partial t_1} & \frac{\partial s_{x-2}}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial s_{x-2}}{\partial t_{x-2}} \end{pmatrix} (\eta, t_1, t_2, \dots, t_{x-2}) = E, \text{ 单位矩阵.}$$

$$= (0, \dots, 0).$$

因为我们只研究系统在临界点处的渐近,即无穷小邻域中的行为,可以取这强同胚变换的线性部分

$$y = \eta, s_1 = t_1, \dots, s_{x-2} = t_{x-2}.$$

按函数族同胚等价的定义,在不变原点的情况下,有

$$f(\eta, t_1, t_2, \dots, t_{x-2}) = j^{2x-3}f(\eta, 0, \dots, 0) + t_1 v_1(\eta) + \dots + t_{x-2} v_{x-2}(\eta).$$

令 $t_3 = t_4 = \dots = t_{x-2} = 0$, 利用 (6) 式并略去高阶无穷小项, 最后得到, 在 $(0, 0, 0)$ 点的无穷小邻域中,

$$\begin{aligned} \lim_{(\eta, t_1, t_2) \rightarrow 0} A s y f(\eta, t_1, t_2) &= \lim_{(\eta, t_1, t_2) \rightarrow 0} A s y f(\eta, t_1, t_2, 0, \dots, 0) \\ &= A \eta^x + B t_1 \eta^y + C t_2 \eta^z, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 x 为 $f(\eta, 0, 0)$ 的强定数, A 为 $j^2 f(\eta, 0, 0)$ 的系数, B, C 分别为 $v_1(\eta), v_2(\eta)$ 的最低次幂系数, y, z 分别为相应幂次.

由证明过程知,

$$x - 2 \geq y, \quad x - 2 \geq z. \quad (8)$$

系统的空间维度 d , 序参量的分量数 n 和相互作用因子会出现在系统的 f 函数族中, 从而也含在 A, B, C, x, y 和 z 中.

上面的论证可以推广到三个或更多场变量的 Thom 系统中去.

由 (7) 式可见, 含一个序参量和两个独立场变量 t_1, t_2 的 Thom 系统, 其自由能函数族在 $(\eta, t_1, t_2) \rightarrow 0$ 时的临界渐近形式有显殊的共性, 首先它呈三项式, 其次场变量 t_1, t_2 均以一次幂方式出现. 对物理机制不同的系统, 或者同一系统的不同近似情况, 可以有不同的 f 函数族, 在临界渐近形式中可以有不同的 A, B, C, x, y, z 值, 但却恒有上述共性. 正是这种共性导致了临界标度性同系统具体物理机制无关这一经验事实.

四、临界指数与标度律

为了使讨论有明确的物理意义, 以铁磁系统为例讨论临界指数和标度律, 即取 $\eta = L$,

$$LR0, \quad t_1 = t = \frac{T}{T_c} - 1, \quad t_2 = h = \mu H_k, \quad \text{并规定 } h \text{ 取 } 0_+, \text{ 从而 } 0 \leq L \leq 1.$$

因为 f 中有一 $-Lh$ 项, 由前关于 z 的含义, $z = 1$.

系统平衡态序参量值由方程

$$AxL^{x-1} + BytL^{y-1} + Ch = 0 \quad (9)$$

给出的根, 同 $0, 1$ 一起, 依自由能最小定出.

按临界指数定义, 各临界指数借 x, y 表示的公式为

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{x-y}, \quad \delta = x-1, \quad r' = \frac{x-2}{x-y}, \\ \alpha' &= 2 - \frac{x}{x-y}, \quad (x \geq 2y), \\ \nu' &= \frac{1}{d} \frac{x}{x-y}, \quad \eta = 2 - \frac{d(x-2)}{x}, \end{aligned} \quad (10)$$

并且,若存在 γ, α, ν , 还有 $\gamma = \gamma', \alpha = \alpha', \nu = \nu', d$ 是系统的空间维度.

由 (10) 式获标度律

$$\begin{aligned} \alpha' + 2\beta + \gamma' &= 2, \quad \alpha' = 2 - d\nu', \\ \eta &= 2 - \frac{d(\delta - 1)}{\delta + 1}, \quad \gamma' = \beta(\delta - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

若存在 γ, α, ν , 还有 $\gamma = \gamma', \alpha = \alpha', \nu = \nu'$.

从 (10) 式可以看出,从物理上讲, (7) 式渐近形式的自由能函数族是合理的,它恰给出了两个独立的临界指数. (8) 式和 (10) 式中的 $x \geq 2y$ 保证了系统的磁化率及比热有奇异性.

五、推导 Scaling 假设

把关联长度 ξ 的临界指数定义: $h = 0, A_{sy} \xi = |t|^{-\nu'}$ 代入 (10) 式的

$$\begin{aligned} A_{sy} X &= \lim_{h \rightarrow 0} (A_{sy} X_h) = |t|^{-\frac{x-2}{x-y}}, \\ A_{sy} C &= \lim_{h \rightarrow 0} (A_{sy} C_h) = |t|^{-\frac{x-2y}{x-y}} \end{aligned}$$

两式中,得到

如果 $\nu' > 0$, 则

$$\begin{aligned} A_{sy} X &= \xi^{\frac{x-2}{x-y} \frac{1}{\nu'}}, \\ A_{sy} C &= \xi^{\frac{x-2y}{x-y} \frac{1}{\nu'}} \quad x \geq 2y. \end{aligned} \quad (12)$$

按 (8) 式和 (10) 式, $\nu' > 0$ 确成立. 因此,由 (8) 式和 (12) 式,在临界点处系统的 $\xi \rightarrow \infty$, 并且系统的奇异性由 $\xi \rightarrow \infty$ 唯一决定.

$$\text{由 (9) 式, } h = -\frac{Ax}{C} L^{x-1} - \frac{Byt}{C} L^{y-1} = L^{x-1} \left(-\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} \frac{t}{L^{x-y}} \right).$$

利用 (10) 式,得

$$h = L^{\delta} \left(-\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} \frac{t}{L^{1/\beta}} \right),$$

此即 Widom 的标度假设^[15].

让 $L(t, h)$ 是 (9) 式的解,则由 (7) 式,系统平衡态自由能的渐近式为

$$f(t, h) = AL^x(t, h) + BtL^y(t, h) + ChL(t, h). \quad (13)$$

我们取两个数

$$a = \frac{x-y}{x}, \quad b = \frac{x-1}{x}, \quad (14)$$

那么,对任意正数 λ , $\lambda^{\frac{1}{x}} L(t, h)$ 必是方程

$$AxL^{x-1} + Byt\lambda^a L^{y-1} + Ch\lambda^b = 0 \quad (15)$$

的解. 事实上, 把 $\lambda^{\frac{1}{x}}L(t, h)$ 代进 (15) 式左边, 有

$$\begin{aligned} & Ax\lambda^{\frac{x-1}{x}}L^{x-1}(t, h) + Byt\lambda^{(a+\frac{y-1}{x})}L^{y-1}(t, h) + Ch\lambda^b \\ &= \lambda^{\frac{x-1}{x}}[AxL^{x-1}(t, h) + BytL^{y-1}(t, h) + Ch] = 0. \end{aligned}$$

如同 (9) 式左边由 $\underset{(L,t,h) \rightarrow 0}{\text{Asy}} f(L, t, h)$ 得来一样, (15) 式左边由 $\underset{(L,t,h) \rightarrow 0}{\text{Asy}} f(L, \lambda^a t, \lambda^b h)$

得来. 把 $\lambda^{\frac{1}{x}}L(t, h)$ 代入 $\underset{(L,t,h) \rightarrow 0}{\text{Asy}} f(L, \lambda^a t, \lambda^b h) = AL^x + Bt\lambda^a L^y + Ch\lambda^b L$ 得

$$\begin{aligned} \underset{(L,t,h) \rightarrow 0}{\text{Asy}} f(\lambda^a t, \lambda^b h) &= A\lambda L^x(t, h) + Bt\lambda^{(a+\frac{y}{x})}L^y(t, h) \\ &+ Ch\lambda^{(b+\frac{1}{x})}L(t, h) = \lambda \underset{(L,t,h) \rightarrow 0}{\text{Asy}} f(t, h). \end{aligned}$$

此结果表明, Thom 系统平衡态自由能的临界渐近式是场变量的广义齐次函数 (GHF)^[16].

(14) 式之逆为

$$x = \frac{1}{1-b}, \quad y = \frac{1-a}{1-b}. \quad (16)$$

把 (16) 式代入 (10) 式中, 可得用 a, b 表示的各临界指数公式, 例如 $\beta = (1-b)/a$, $\delta = b/(1-b)$, $a' = 2 - (1/a)$ 等. 这些公式与通常的公式相同^[17].

六、结论和讨论

我们似乎证明了, Thom 系统, 即实验上有稳定的相变和临界现象的系统, 其必有标度性, 其临界态方程必取 Widom 形式, 其平衡态自由能渐近地是场变量的 GHF.

有两点值得讨论. 1. 本文结论对 Thom 系统成立. 因此, 适用范围不只是平衡态统计系统. 2. 因为证明中用到的是 “jet” 运算下的 CT 定理, 结论受到了 x, y 取正整数的限制. 我们期望适当改进论证以给出更一般的结果.

参 考 文 献

- [1] L. P. Kadanoff *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, 39(1967), 395.
- [2] Ed. H. E. Stanley, “Cooperative Phenomena near Phase Transitions”, the MIT Press (1973), p. 91, p. 98 and etc.
- [3] S. A. Wolf *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 324.
- [4] P. Gaunt *et al.*, *Phys. Rev.*, 23(1981), 251.
- [5] Y. Yeshurum *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 45(1980), 1366.
- [6] H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, *Method of Mathematical Physics*, Cambridge Univ. (1956), p. 503.
- [7] René Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin-Wesley, (1975).
- [8] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, (1978).
- [9] D. E. G. Williams, *Am. J. Phys.*, 47(1979), 156.
- [10] K. Keller, G. Dangelmayr and H. Eikemeier, *Phase Diagrams and Catastrophes*, in “Structural Stability in Physics”, Springer, (1979), ed. W. Güttinger and H. Eikemeier.
- [11] L. S. Schulman and M. Revzen, *Collective Phenomena*, 1(1972), 43.
- [12] M. Golubitsky, *SIAM. Rev.*, 20(1978), 352.

- [13] A. J. Coleman and D. O'Shea, *Phys. Rev. B*, **22**(1980), 3428.
- [14] Yung Chen Lu, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, Springer, (1976).
- [15] B. Widom, *J. Chem. Phys.*, **43**(1965), 3898.
- [16] A. Hankey and H. E. Stanley, *Phys. Rev. B*, **6**(1972), 3515.
- [17] M. Vicentini-Missoni, *Equilibrium Scaling in Fluids and Magnets*, in "Phase Transitions and Critical Phenomena", vol. 2, ed. C. Domb and M. S. Green, Academic Press, (1972).

A JUSTIFICATION FOR THE SCALING OF THE THOM-SYSTEM

LIU JIAN-MIN GONG CHANG-DE

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

In the present paper, we discuss the critical behavior of Thom-system using Catastrophe Theory. The universal critical asymptotic form of the family of free energy functions for Thom-system with one order parameter and two field parameters is obtained. The expressions of critical exponents, the scaling laws, the scaling hypotheses, all are derived from this universal asymptotic form.