

可调谐的低频连续引力波接收天线的研究

唐孟希 陈嘉言

(中山大学引力物理研究室)

1981年11月2日收到

提 要

我们设计制造了共振频率在 47.3 Hz 到 60.5 Hz 之间连续可调谐的低频引力波四极天线。天线的重量为 498 kg, 室温时在空气中加上调谐系统后 Q 值为 4.4×10^3 。本文把天线的振动简化为在自由端附有一刚性质量的悬臂梁的振动。代替弹性力学的繁复计算, 用材料力学的简单方法得到了可以满足要求的结果。本文对用机械方法调整频率的可能方案作了比较, 并对把四极天线用于探测更低频的引力波的可能性进行了探讨。

一、引 言

广义相对论证明了^[1], 任何系统中质量的非球对称的加速运动都会有引力辐射发生, 其四极辐射功率

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}^{kl} \ddot{Q}_{kl}, \quad (1)$$

其中 Q^{kl} 是系统的四极矩张量。在宇宙中就存在很多能产生引力辐射的物理过程。

目前世界上大多数的实验室都把工作对象选为超新星爆发所产生的引力波上。它的频率适中, 用韦伯型圆柱天线易于实现共振。为此, 大质量的铝天线^[2], 高 Q 值的蓝宝石天线^[3], 低噪声的低温天线^[4]以及各种类型的高灵敏度的换能器相继出现。

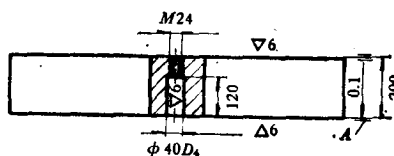
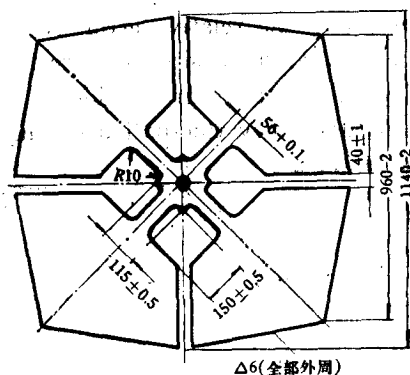


图1 技术条件

1. 各槽、筋不对称性角度偏差小于 10° ;
2. $\phi 40D_4$ 孔轴线对 A 面不垂直度不大于 0.05;
3. 各锐边倒角 $1 \times 45^\circ$;
4. 搬运、起吊应通过 $M 24$ 。

作为引力波探测的另一条道路,就是把注意力集中于中子星上.虽然中子星辐射的引力波到达地球的功率流密度较之超新星爆发为小,但前者较之后者有一种无法比拟的优越性,即中子星辐射的是连续的单色波,因而可以用同步积累等取样方法来提高信噪比.而超新星爆发是随机性的事件,我们无法事先预计它的发生,对它的探测便带有偶然性的因素.在为数众多的中子星中,我们较适合探测蟹状星云中子星 PSR0531 + 21 和船帆座中子星 PSR0833 - 45. 日本东京大学的方形天线 (1400 kg, 60.2 Hz)^[5] 就是这类探测器的典型代表.

为了研究 PSR0531 + 21 的引力辐射性质及该类型天线用于探测 PSR0833 - 45 的引力辐射的可能性,我们设计制造了可调谐的、频率为 60.2 Hz 附近的方形四极引力辐射接收天线 (图 1).

二、低频引力辐射天线与天线的调谐

韦伯型圆柱天线结构简单、工艺性强、易于设计,是中频段天线常用的结构型式.但这种天线不适用于低频段.若用锻铝作材料,要制造 $f = 60.2\text{Hz}$ 的圆柱天线,其长度要达四十多米.

对于四边有径向切槽的方形天线,在引力波“+”偏振态作用下将会发生绕节点的转动 (图 2). 与音叉的情况类似,只要增加悬臂部分的长度,或减少其宽度,就有可能在不增加其几何尺寸的前提下降低其自振频率.

PSR0531 + 21 已被证认为快速旋转的中子星. 由于它的高速自转,加上星体对转轴的不对称,因而会产生随时间而变的四极矩,辐射出引力波. 根据观测数据及理论计算^[6],它有如下的性质:

与地球的距离 $d(\text{pc})$	2×10^3 ;
转动惯量 $I(\text{g} \cdot \text{cm}^2)$	4×10^{44} ;
引力辐射频率 $f(\text{Hz})$	60.2;
引力辐射功率 $L_{\text{GW}}(\text{erg/sec})$	5×10^{32} ;
无量纲振幅 h	1×10^{-27} .

由于 PSR0531 + 21 在自转中不断辐射能量以致本身的自转减慢. 观测到的自转周期变率 $\frac{dP}{dt} = 4.23 \times 10^{-13}$, 相当于频率变化 $\frac{df}{dt} = -0.024 \text{ Hz/year}$.

另一方面由于地球绕太阳公转引起的多普勒效应,使每年引力波频率在 0.025 Hz 范围内作周期性的变化^[7]. 由于天线的 Q 值较高,共振曲线的带宽仅为 $10^{-2} - 10^{-3} \text{ Hz}$ 量级,要使天线能长期工作于谐振状态,就要求在一定范围内对天线进行调谐.

使用可在较大范围调谐的天线为用同一根天线去研究两个或两个以上的中子星的引力辐射性质提供了可能性,这样做无疑是有经济意义的.

另外由于材质的不均匀,计算方法的误差,加工的不准确等原因也要求天线能改变其

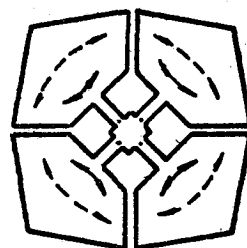


图 2

● 为节点; $\longleftrightarrow$ 为引力波力线; $\longleftrightarrow$ 为天线横振动方向

谐振频率。若能实现方便的双向调谐,对简化设计计算、加工及使用上无疑是大有好处的。当然,这种调谐应以 Q 值不致降低太多为前提。

目前,对天线进行调谐的方法^[7-9]有修正天线的动力学性质,即附加或除去质量,用控温的方法来改变杨氏模量,用加入机电弹簧来改变等效力常数,用电路负反馈的方法降低 Q 值来增加带宽等。我们尝试用不同于上述的方法,在 Q 值不降低太多的前提下,用机械的方法对天线在较大的范围内进行调谐。

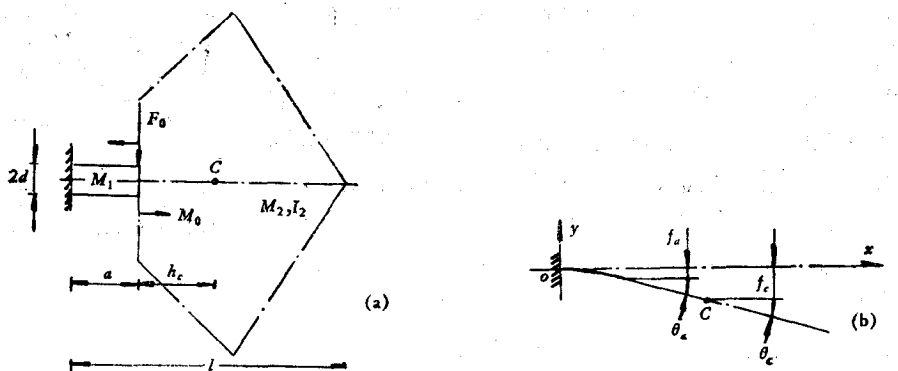
三、天线频率的计算

由弹性力学^[5,10]可以导出天线满足的运动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

其中 μ, λ 是天线材料的拉梅系数, $\mathbf{u}$ 是天线的位移矢量场。求解 (2) 式,经过繁复的计算,可以得到天线的自振频率。

由于我们考虑了在较大范围内对天线实现调谐,就可以用近似的方法对天线的振动作动力学计算。天线的四分之一在引力波“+”偏振态作用下的运动可以简化为在自由端附有一刚性质量的悬臂梁的振动(图 3)。



(a) 天线的简化模型左端是一等截面梁,右端用一集中力 F_0 和集中力矩 M_0 来等效

(b) 天线在简化模型 (a) 下的挠曲线

图 3

我们选悬臂梁与刚性质量连接处的挠度 f_a 和转角 θ_a 为广义坐标。刚性质量对悬臂梁的作用可用一集中力 F_0 和一集中力偶矩 M_0 来代替。这时若用广义坐标 f_a 和 θ_a 来表示梁的挠曲线,则有

$$y = a \left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} \right) \theta_a + \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3} \right) f_a. \quad (3)$$

天线作横振动时,其势能为 $[0, a]$ 段的弹性势能。其动能由三部分组成: $[0, a]$ 段的振动动能、刚体的平动动能以及刚体绕其质心的转动动能。因此,我们可以写出:

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^a \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{2EJ}{a^3} (a^2 \theta_a^2 + 3f_a^2 - 3af_a \theta_a),
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$T = \int_0^a \frac{M_1}{2a} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{M_2}{2} \left(\frac{\partial f_c}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_2}{2} \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial t} \right)^2, \quad (5)$$

其中 E 为材料的杨氏模量, J 为梁对中性轴的惯性矩, M_1 , M_2 分别为梁和刚性部分的质量, f_c 和 θ_c 分别是刚体质心的挠度和转角, I_2 为刚体对其质心的转动惯量. 由于 M_2 的刚性比 M_1 大得多, 我们可以认为振动时 M_2 的轴线保持直线并在 a 点与 M_1 的挠曲线保持相切. 这样, 我们有

$$f_c = f_a + h_c \theta_a, \quad \theta_c = \theta_a, \quad (6)$$

其中 h_c 是 M_2 质心到 a 点的距离. 由(3)–(6)式可以得到系统的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}
 L &= \left(\frac{M_1 a^2}{210} + \frac{M_2 h_c^2}{2} + \frac{I_2}{2} \right) \left(\frac{\partial \theta_a}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{13M_1}{70} + \frac{M_2}{2} \right) \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)^2 \\
 &\quad + \left(M_2 h_c - \frac{11M_1 a}{210} \right) \frac{\partial f_a}{\partial t} \frac{\partial \theta_a}{\partial t} - \frac{2EJ}{a^3} (a^2 \theta_a^2 + 3f_a^2 - 3af_a \theta_a).
 \end{aligned} \quad (7)$$

系统的欧拉方程为

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{M_1 a^2}{105} + M_2 h_c^2 + I_2 \right) \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} + \left(M_2 h_c - \frac{11M_1 a}{210} \right) \frac{d^2 f_a}{dt^2} \\
 &\quad + \frac{4EJ}{a} \theta_a - \frac{6EJ}{a^2} f_a = 0, \\
 &\left(M_2 h_c - \frac{11M_1 a}{210} \right) \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} + \left(\frac{13}{35} M_1 + M_2 \right) \frac{d^2 f_a}{dt^2} \\
 &\quad - \frac{6EJ}{a^2} \theta_a + \frac{12EJ}{a^3} f_a = 0.
 \end{aligned} \quad (8)$$

若记

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{13}{35} M_1 + M_2, \quad M_r = M_2 h_c - \frac{11}{210} M_1 a, \\
 MR^2 &= \frac{M_1 a^2}{105} + M_2 h_c^2 + I_2, \quad f_0^2 = \frac{2EJ}{Ma^3},
 \end{aligned} \quad (9)$$

则(8)式可以写成

$$\begin{pmatrix} R^2 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{f}_a \end{pmatrix} = f_0^2 \begin{pmatrix} -2a^2 & 3a \\ 3a & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ f_a \end{pmatrix}, \quad (10)$$

即

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{f}_a \end{pmatrix} = \frac{f_0^2}{R^2 - r^2} \begin{pmatrix} -2a^2 - 3ar & 3a + 6r \\ 2a^2 r + 3aR^2 & -3ar - 6R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ f_a \end{pmatrix}. \quad (11)$$

系统的主振频率 f 与(11)式右边系数矩阵的本征值 λ 存在关系

$$\lambda = -4\pi^2 f^2, \quad (12)$$

由此我们得到系统的频率方程

$$\left| \begin{array}{cc} -\frac{2a^2 + 3ar}{R^2 - r^2} f_0^2 + 4\pi^2 f^2 & \frac{3a + 6r}{R^2 - r^2} f_0^2 \\ \frac{2a^2 r + 3aR^2}{R^2 - r^2} f_0^2 & -\frac{3ar + 6R^2}{R^2 - r^2} f_0^2 + 4\pi^2 f^2 \end{array} \right| = 0. \quad (13)$$

解(13)式,得到

$$f = \frac{f_0}{2\pi} \sqrt{\frac{(a^2 + 3ar + 3R^2) \mp \sqrt{(a^2 + 3ar + 3R^2)^2 - 3a^2(R^2 - r^2)}}{R^2 - r^2}}. \quad (14)$$

进行无量纲处理,令

$$\alpha = r/a, \quad \beta = R/a, \quad (15)$$

则(14)式可改写为

$$f = \frac{K_f f_0}{2\pi}, \quad (16)$$

其中

$$K_f = K_f(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{(1 + 3\alpha + 3\beta^2) \mp \sqrt{(1 + 3\alpha + 3\beta^2)^2 - 3(\beta^2 - \alpha^2)}}{\beta^2 - \alpha^2}}. \quad (17)$$

K_f 只与天线的形状有关,当各部分尺寸相对比例确定了, K_f 也就确定了,我们不妨把 K 称为天线的形状系数.

考虑到

$$J = \frac{2}{3} H d^3, \quad (18)$$

最后可以得到天线自振频率的表示式

$$f = \frac{K_f}{2\pi} \sqrt{\frac{4EH}{3M}} r^3, \quad (19)$$

其中

$$r = d/a. \quad (20)$$

由(19)式可以看出各部分比例为一定的天线,其自振频率与尺度成反比.

对于我们的天线,可以求得 $M = 1.200 \times 10^5 \text{g}$, $\alpha = 1.2906$, $\beta = 1.8622$, $r = 0.1867$, 由(17),(19)式得

$$K_{f_1} = 0.3143, \quad K_{f_2} = 4.105,$$

对应的 $f_1 = 50.3 \text{ Hz}$, $f_2 = 657 \text{ Hz}$.

我们应用的就是天线的第一基频 f_1 .

四、天线的结构和性能

按图 1 加工出来的天线,重量为 498kg,共振频率为 $f = 47.3 \text{ Hz}$,衰减时间 $\tau_0 = 295 \text{ sec}$, 对应的 $Q = 8.7 \times 10^4$.

要把共振频率调整到 PSR0531+21 发射的引力波的频率, 必须把频率提高。由第三部分的讨论, 采取下面任一方法 (图 4) 都可以实现这个目的: (1) 从外缘除去部分质量; (2) 在 $[0, a]$ 段两侧附加金属; (3) 在 $[0, a]$ 段增加 H ; (4) 用机械的方法夹固悬臂部分长度以减少 a 。

在这四种方法中, 前三种都不易做到双向可逆调谐。而方法 (4) 在不破坏天线的情况下, 只要改变夹固点的位置, 就可以连续、双向、可逆地调整频率。我们采用的就是这种方法。

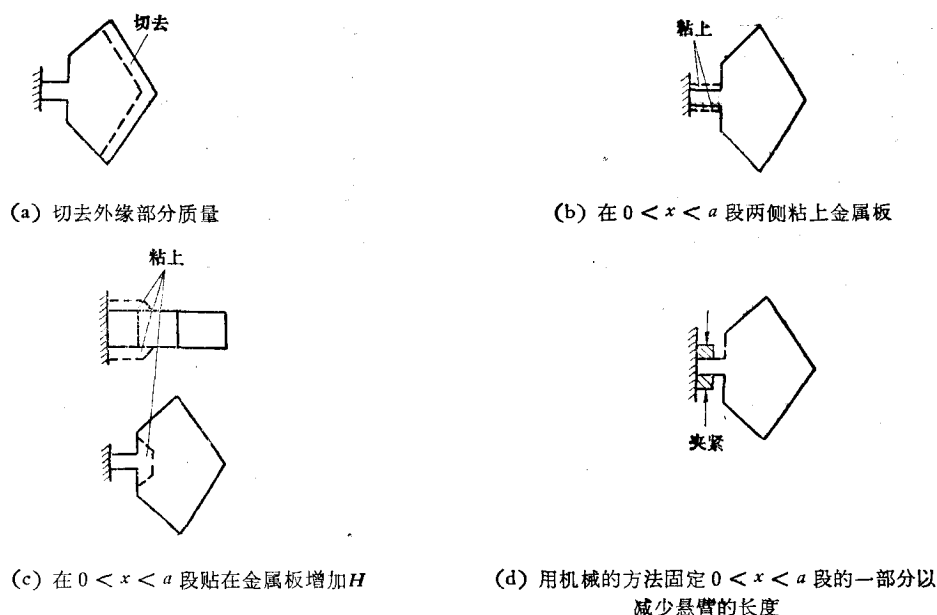


图 4. 几种使天线频率升高的可能方案

天线在振动时, $[0, a]$ 段是弹性势能的主要贮存部分, M_2 部分是动能的主要贮存部分。方法 (2) 和 (3) 都是在弹性势能贮存部分附加金属。但由于粘结剂不可能使金属材料之间完全粘结, 且粘结剂的强度与金属部分的强度、天线本身与附加的金属单独存在时的固有频率之间都有相当大的差别, 所以粘结后天线在振动时就会使各层金属间产生相对滑移, 这就大大增加了内耗。而在方法 (4) 中, 夹持零件与天线被夹持的部分相对运动较小, 故内耗应比用方法 (2) 及 (3) 时的小得多。

在天线的上下两端面各放置一块固定板, 上面各固定有十二个双头螺栓, 八块调整板和四块楔块就固定在上面。调整板的一侧做成 45° 与天线相配, 另一侧有 5° 的斜度与楔块相配。调整楔块在双头螺栓上的位置以达到调整频率的目的。

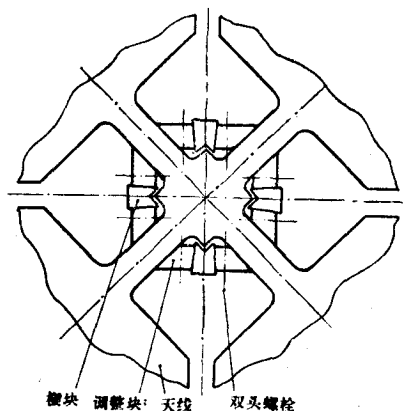


图 5 天线调谐部分的结构

若需要更大范围地调整频率,可以改变楔块或调整块的尺寸(图5).

实验结果表明,天线的频率可以从 47.3 Hz 到 60.5 Hz 之间连续地调整,加入调谐系统后天线的衰减时间 $\tau = 11.5 \text{ sec}$, 对应的 $Q = 4.4 \times 10^3$. 并测得调整到使 $a = 6.5 \text{ cm}$ 时, $f = 60.2 \text{ Hz}$.

五、方形四极天线用于探测更低频的引力波的可能性

到 1978 年为止,人们已发现了 300 多颗中子星. 其中自转周期最短的是 PSR0531+21, 其次 PSR0833-45 发射的引力波频率为 $f = 22.4 \text{ Hz}$, $h = 5 \times 10^{-26}$, 也适合探测. 我们认为,把我们的天线略加修改便可以用于探测它.

由于材料力学方法的局限性,方程(8)的结果是近似的,其误差与长径比 $\lambda = a/2d$ 有关. 当 λ 越大时,结果越准确. 若定义改正系数 K_c

$$K_c = \text{实测频率 } f_m / \text{计算频率 } f_c = K_c(\lambda). \quad (21)$$

则当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $K_c \rightarrow 1$. 当 $\lambda = 15/2 \times 2.8 = 2.7$ 时, $K_c(\lambda) = 47.3/50.3 = 0.940$. 为了把天线的共振频率变成 $f_m = 22.4 \text{ Hz}$, 必须在我们天线的基础上减少 d , 即增加 λ . 所以,我们可以预言,当 $f_m = 22.4 \text{ Hz}$ 时,有

$$0.940 < K_c < 1.$$

由于 $\frac{M_1 a^2}{105} \ll M_2 h_c^2 + I_2$, $\frac{13 M_1}{35} \ll M_2$, $\frac{11 M_1 a}{210} \ll M_2 h_c$, 我们可以近似地认为,当 a 变化时, M, r, R 保持不变,因而 K_r 亦保持不变. 由(16)式并考虑改正系数 K_c , 可以得

$$d = \left(\frac{3\pi^2 f_c^2 M a^3}{K_r^3 K_c^2 E H} \right)^{1/3}. \quad (22)$$

对我们的天线,可以求出,当 $f_c = 22.4 \text{ Hz}$ 时,

$$1.63 \text{ cm} < d < 1.70 \text{ cm}.$$

用材料力学的方法,可以算出天线外缘处的挠度为 $|f_l| < 2 \times 10^{-3} \text{ cm}$,

$$|f_l|/l < 3 \times 10^{-5} < [f_l/l],$$

其中 $[f_l/l]$ 为许用相对挠度. 对于精密机械上的梁,通常限制

$$[f_l/l] = 10^{-4}.$$

需要进一步降低频率时,还可以进一步减少 d , 同时增加 H . 当然频率不能无限制地降低,当 d 减少到一定程度时,天线在自重作用下将由于失稳而出现侧弯曲和扭转,以致失效.

六、结 论

1. 方形四极天线对于探测短周期的中子星是一种可能的方案,并且还有可能进一步降低其频率.

2. 若把天线的振动简化为在自由端附有一刚性质量的悬臂梁的振动,用材料力学的方法计算频率,方法较简单,精度亦令人满意.

3. 与日本东京大学的天线^[5,7-9]比较, 我们的天线有如下的特点:

(1) 可以在较大的范围内作机械的双向连续调谐。

(2) 在几何尺寸较小的前提下可以做到较低的频率。

(3) 接入调谐装置后, 在空气中测得的 Q 值接近于东京大学接入负反馈电路的天线在真空中的 Q 值。

4. 由于我们的调谐装置只在两侧夹紧, 在底面支承, 而在顶面没有约束。节线与底面可能会出现不垂直的情况以致噪音有所增加。若在顶面相应位置增加四个夹紧的约束, 估计情况将有所改善。

日本东京大学平川浩正教授 1980 年访问中国期间与作者作过有益的讨论, 作者向他表示感谢。

参 考 文 献

- [1] L. Landau and E. Lifshitz, *Field Theory*.
- [2] W. Fairbank, Paper presented at GRG6, (Copenhagen, 1971).
- [3] International Symposium on Experimental Gravitation, (Italy, 1976).
- [4] S. Boughn, *Phys. Rev. Lett.*, 38(1977), 454.
- [5] H. Hirakawa, *Japan. J. Appl. Phys.*, 15(1976), 833.
- [6] M. Zimmermann, *Nature*, 271(1978), 524.
- [7] K. Oide, *Phys. Rev. D*, 10(1979), 2480.
- [8] H. Hirakawa, *Phys. Rev. D*, 17(1978), 1919.
- [9] Y. Ogawa, *Japan. J. Appl. Phys.*, 18(1979), 1565.
- [10] L. Landau and E. Lifshitz, *Elastic Mechanics*.

RESEARCH ON TUNABLE ANTENNA TO DETECT CONTINUOUS GRAVITATIONAL WAVE AT LOW FREQUENCY

Tang Meng-xi Chen Jia-yan

(Gravitational Physics Laboratory, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

A quadrupole antenna has been designed and manufactured, Weight of the antenna is 498 kg. Having added the tuning equipment to the antenna, in room temperature and in the air, the Q value is 4.4×10^3 . Resonant frequency of the antenna can be tuned continuously from 47.3 Hz to 60.5 Hz. Each quarter of the antenna is simplified by representing it as a cantilever beam with a rigid body in the free end. We calculate the resonant frequency by simple method of material mechanics instead of the complicated method of elastic mechanics and obtain a satisfactory result. Several possible mechanical means to adjust the frequency are compared. In addition, we investigate the possibility of using this type of antenna to detect gravitational wave at lower frequencies.