

变参数自由电子激光器中电子的随机运动

霍 裕 平

(中国科学院等离子体物理研究所)

1981年11月9日收到

提 要

本文讨论了变参数自由电子激光器中电子的运动,指出部分电子的轨道是非周期性,随机型的。随着参数变化率增大,随机轨道电子所占比例愈大。文中还提出了当随机运动较强时统计描述的方法,以及随机运动对效率的影响。

自由电子激光器是一种很有希望的高功率可调谐相干光源(见图1)。相对论电子束进入激光腔后与周期磁场作用产生受激发射。辐射频率为

$$\omega_s = \frac{2\pi c}{\lambda_m(1 - \beta_0)},$$

其中 $\lambda_m = 2\pi/k_m$ 是静周期磁场的波长, $c\beta_0$ 是电子速度^[1]。在低增益情况下,电子束流很小,由空间电荷场引起的集体效应可以忽略,激光过程可以由单电子图象讨论^[2]。

早先的讨论基于电磁波在电子上的受激散射(散射波频率即 ω_s)。在随电子运动的坐标系中,原来的静磁场相应于入射电磁波 ($\omega_q = \frac{2\pi c}{\lambda_m}$)。但是和一般激光器过程不同处在于这里反转数的概念是不清楚的,电子也有可能吸收电磁波 (ω_s) 的能量。实际上每个电子在腔中运动过程中,辐射和吸收两种过程是交替的。比较更细致的讨论是分析电子在周期磁场及电磁波场(激光产生的相干光场)联合形成的有质动力作用下的运动。如果电子能量减小,电磁波即被放大。考虑入射束流很细的情况,腔的边界效应可以忽略,周期磁场及电磁波场在 x, y 方向是均匀的,电磁矢势

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_s,$$

$$\mathbf{A}_m = A_m(z)(\mathbf{e}_- e^{i \int k_m(x') k_z z'} + \text{c. c.}),$$

$$\mathbf{A}_s = A_s(\mathbf{e}_- e^{-ik_s z + i\omega_s t} + \text{c. c.}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$, $\mathbf{e}_{x,y}$ 是 x, y 方向单位矢量, $k_s = \omega_s/c$ 。(1)式中,周期磁场的振幅及波长可随 z 改变,但 k_s 是常数(在低增益情况下,可以近似认为 A_s 与 z 无关)。



图1 自由电子激光器

相对论电子的哈密顿量为

$$H = mc^2 e = mc^2 \left[1 + \frac{1}{mc} (\mathbf{P}_\perp - q\mathbf{A}_\perp)^2 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2)$$

$\mathbf{P}_\perp$ 是运动不变量, 忽略电子的横向运动后为零, 即

$$e = \left[1 + \left(\frac{q}{mc} A \right)^2 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2')$$

为了使进一步的讨论更为直观, 我们以 z 为自变量, 电子运动状态用 $e(z)$ 及

$$\phi = \int_0^z k_m(z') dz' + k_s z - \omega t$$

描述. 运动方程

$$\frac{d}{dz} \phi = k_m + k_s - k_s (e^2 - s^2 + 2b \cos \phi)^{-1/2}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} e = -k_s b \sin \phi / (e^2 - s^2 + 2b \cos \phi)^{1/2}, \quad (4)$$

其中

$$s = \left[1 + \left(\frac{qA_m}{mc^2} \right)^2 + \left(\frac{qA_s}{mc^2} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$b = \left(\frac{q}{mc^2} \right)^2 A_m A_s.$$

由于 $\lambda_m \gg \lambda_s$, qA_m/mc^2 可以达到 1 的量级, 而 $|qA_s/mc^2| \ll 1$. 通常情况电子能量较大: $e^2 \gg s^2 \gg b$, 则 (3) 及 (4) 式可写为

$$\frac{d}{dz} e = -\frac{k_s}{e} b \sin \phi, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dz} \phi = k_m - \frac{k_s}{2e^2} (s^2 - 2b \cos \phi). \quad (6)$$

如果 A_m 及 k_m 都是常数 (简单自由电子激光器), 将 (5) 式及 (6) 式合并, 取到 b 的最低阶, 得到单摆方程为

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi = -\frac{k_s^2 s^2}{e^4} b \sin \phi. \quad (7)$$

电子的运动轨道分成两类, 一类电子被有质动力位势阱所约束, 相位 ϕ 只在 $[-\phi_0, \phi_0]$ 中振动, $\phi_0 = \pi$ 的约束轨道称为分界线; 另一类是非约束粒子, ϕ 随 z 单调增长. 如果令

$$e_r^2 = \frac{k_s}{2k_m} s^2, \quad (8)$$

$$\delta e = e - e_r$$

则与 (7) 式等效的哈密顿量 (以 $\delta e, \phi$ 为正则变量) 为

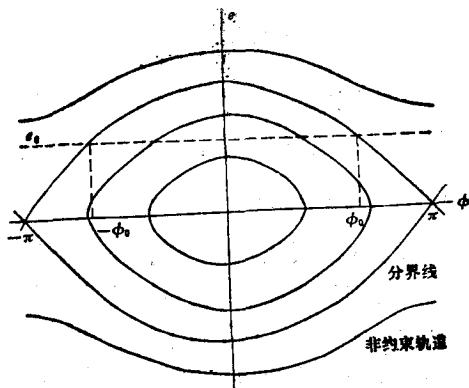


图 2 在简单自由电子激光器中电子在相空间 (e, ϕ) 的轨道

$$\frac{H_1}{mc^2} = \frac{k_m}{e_r} (\delta e)^2 - \frac{k_s b}{2e_r} \cos \phi. \quad (9)$$

粒子在 $(\delta e, \phi)$ 相空间轨道如图 2 所示, 约束轨道区(称为共振区)半宽度

$$\delta e_m = \frac{1}{\sqrt{2s}} e_r \sqrt{b}. \quad (10)$$

$e = e_r, \phi = 0$ 是不动点. 只有初始条件满足

$$\frac{k_m}{e_r} (\delta e_0)^2 - \frac{k_s b}{2e_r} \cos \phi_0 < \frac{k_s}{2e_r} b \quad (11)$$

的粒子才被约束. 主要是约束粒子和波场交换能量. 由于粒子是持续射入的, ϕ_0 均匀分布在 $[0, 2\pi]$ 内. 如果 $\delta e_0 > 0$, 图 2 中 $-\phi_{01} < \phi_0 < \phi_{01}$ 的粒子经过 $L_m \simeq \frac{s}{2\sqrt{b}} \lambda_m$ 后大部分都运动到 $\delta e < 0$ 位置, 而将最大可能的能量交给波场. 如果体系长度 $L > L_m$, 则粒子能量又要增加, 激光器的增益反而下降. 因而在通常情况下, 自由电子激光器的效率小于

$$\frac{\delta e_m}{e_r} \sim \frac{\sqrt{b}}{s} \ll 1.$$

实验上达到千分之几.

为了改善自由电子激光器的效率, Kroll 等人^[3]提出了变参数的方案, 认为可使效率超过 10%. 仍由 (5) 及 (6) 式出发, λ_m 及 A_m 是 z 的慢变函数, 因而 k_m, s^2, b 都与 z 有关. 定义

$$e_r^2(z) = \frac{k_s}{2k_m(z)} s^2(z) \quad (8)'$$

以及由

$$\frac{d}{dz} e_r^2 = -2k_s b \sin \phi_r \quad (12)$$

所定义的 ϕ_r , 则 $\delta e = e - e_r(z)$ 及 ϕ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \delta e &= -\frac{k_s}{e_r} b (\sin \phi - \sin \phi_r), \\ \frac{d}{dz} \phi &= \frac{k_s}{e_r^3} s^2 \delta e. \end{aligned} \quad (13)$$

对应的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{mc^2} &= \frac{H_1}{mc^2} + \phi \frac{d}{dz} e_r \\ &= \frac{k_m}{e_r} \delta e^2 - \frac{k_s}{e_r} b (\cos \phi + \phi \sin \phi_r). \end{aligned} \quad (14)$$

其等效位势如图 3 所示, 是倾斜的余弦曲线. 随着 $\phi_r \approx 0$, 被约束粒子比例要有所下降. 但这些粒子一旦被约束后, 其周期运动的平

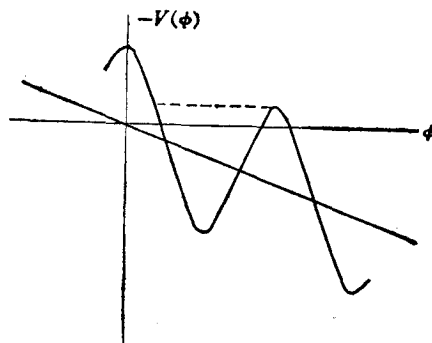


图 3

均能量将随 e_r 而绝热地变化. 因而只要 e_r 随 z 而下降, 激光效率是可以显著提高的. 由 (8)' 式可以看出, 要使 $e_r(z)$ 是降函数或者 $k_m(z)$ 是常数而令 $A_m(z)$ (因而 $s^2(z)$) 随 z 而减小; 或者 A_m 不变, $k_m(z)$ 随 z 而增加, 即静磁场波长随 z 减小. 当然, 非约束粒子还是很少与波场交换能量.

二

实际上, 在变参数自由电子激光器中, 电子的运动远较上述图象为复杂. 从 (5) 及 (6) 式出发可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \phi = & \frac{d}{dz} k_m + \frac{k_m - \frac{d}{dz} \phi}{s^2} \frac{d}{dz} s^2 \\ & - \frac{k_m - \frac{d}{dz} \phi}{s^2} \left(2k_m - \frac{d}{dz} \phi \right) 2bsi\phi. \end{aligned} \quad (15)$$

在振荡项(右方第三项)中, b 及 k_m 都与 z 有关. 若对之作傅氏展开, 则电子所受的作用是很多周期相近的周期势叠加, 或者 A_m 的空间频谱有一带宽 Δk_m

$$\Delta k_m \sim \frac{1}{A_m} \frac{d}{dz} A_m \quad \text{或} \quad \frac{1}{k_m} \frac{d}{dz} k_m.$$

由于这些余弦势周期很靠近, 因而它们相应的共振区相互重叠. 近年来, 有关具有多个共振频率非线性系统的动力学分析及数值模拟表明, 当不同频率的共振区有重叠时, 系统的运动就不再具有明显的周期性, 而似乎是在不同周期轨道间无规行走, 出现了随机轨道^[4]. 在我们的情况下, 如果 Δk_m 很小, 则大部分电子运动仍接近单波情况. 但只要 $\Delta k_m \neq 0$, 在共振区边缘(交叉线)就已经有一个很薄的区域中轨道不再是周期的了(随机轨道). 随着 Δk_m 增加, 这个区域向内扩大. 当 Δk_m 很大, 轨道完全是无规的, 这类似于准线性理论^[4]所讨论的情况. 显然, 完全无规化的条件应该是共振区宽度与谱宽可以相比. 由 (8) 式

$$\delta k_m / k_m \sim -2\delta e_r / e_r,$$

取 $\delta e_r \sim \delta e_m$, 则得

$$\Delta k_m \lesssim \frac{2k_m}{s} \sqrt{b}.$$

我们注意到, $s/2k_m\sqrt{b}$ 差不多就是约束电子运动的空间周期 L_m . 因此上述完全随机性出现的条件, 是和 A_m 或 k_m 变化很快, 从而不能将其与周期运动分开 (W. K. B 近似条件) 是一致的. 在实际情况下, $\sqrt{b}$ 接近 10^{-2} , 因而要在现实可能的长度范围内得到较高的效率 (e_r 下降很大), 随机运动的出现是不可免的.

在动力系统理论中, 随机运动的出现始终是一个很有趣的问题. 我们将更具体地讨论随机轨道的出现及性质. 取一种简单变参数情况

$$A_m(z) = \frac{A_m}{2\Delta k} \int_{k_m-\Delta k}^{k_m+\Delta k} e^{ik'z} dk' + c. c.$$

$$= A_m \frac{\sin \Delta k z}{\Delta k z} e^{ik_m z} + c. c.$$

用数值方法求积 (5) 和 (6) 式. 图 4 是给定参数 ($b = 0.01$, $e_0^2 = 25$, $e_r^2 = 23.5$, $k_m L = 200$) 不同 Δk_m ($0.001 k_m$ 及 $0.02 k_m$) 对应的随机区. 图 5 是 $\phi_0 = 0$ 不同 Δk_m , $e(z)$ 的变化及相空间轨道 $e(\phi)$. 在此情况下

$$\delta e_m / e_r \sim 0.05, \text{ 而 } \delta e_0 \sim 0.03,$$

$\phi_0 = 0$ 在共振区中部, $\Delta k_m / k_m = 0.001$ 时轨道是周期性的, 但能量下降很少; $\Delta k_m / k_m = 0.02$ 时, 轨道变为非周期性的, 能量下降很大. 图 6 给出了在另一组参数下随机轨道出现的细致情况. 图 7 给出了 Δk_m 比较大时不同 ϕ_0 ($0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 及 π) 的轨道. 约束轨道 ($\phi_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$) 都是随机的, 但非约

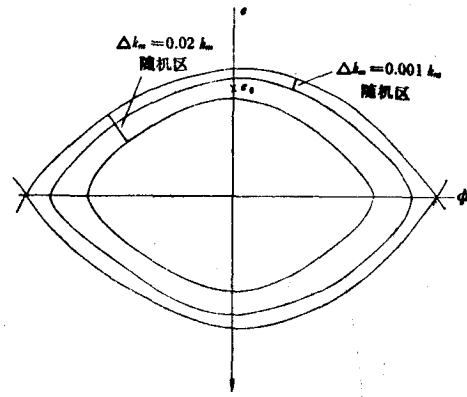
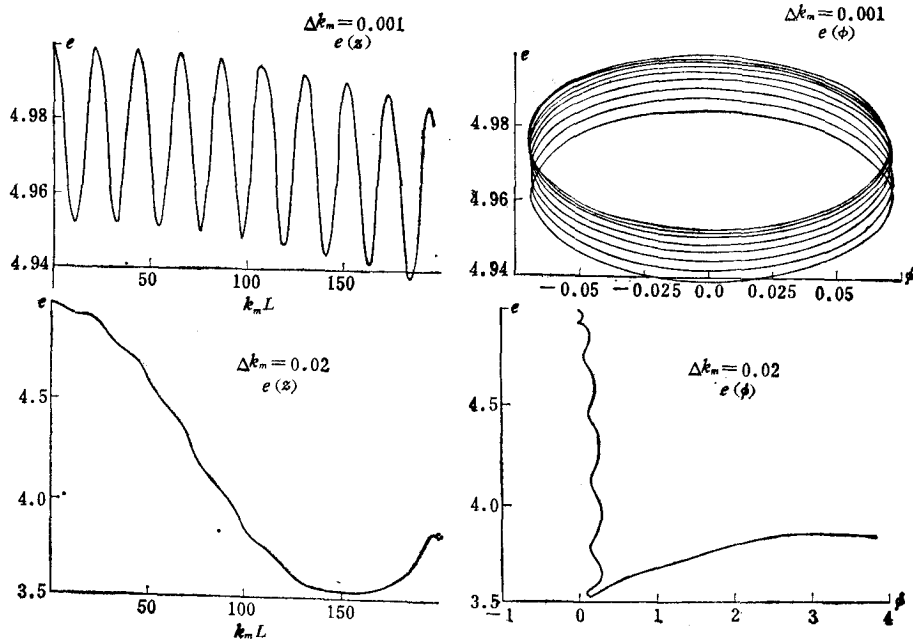
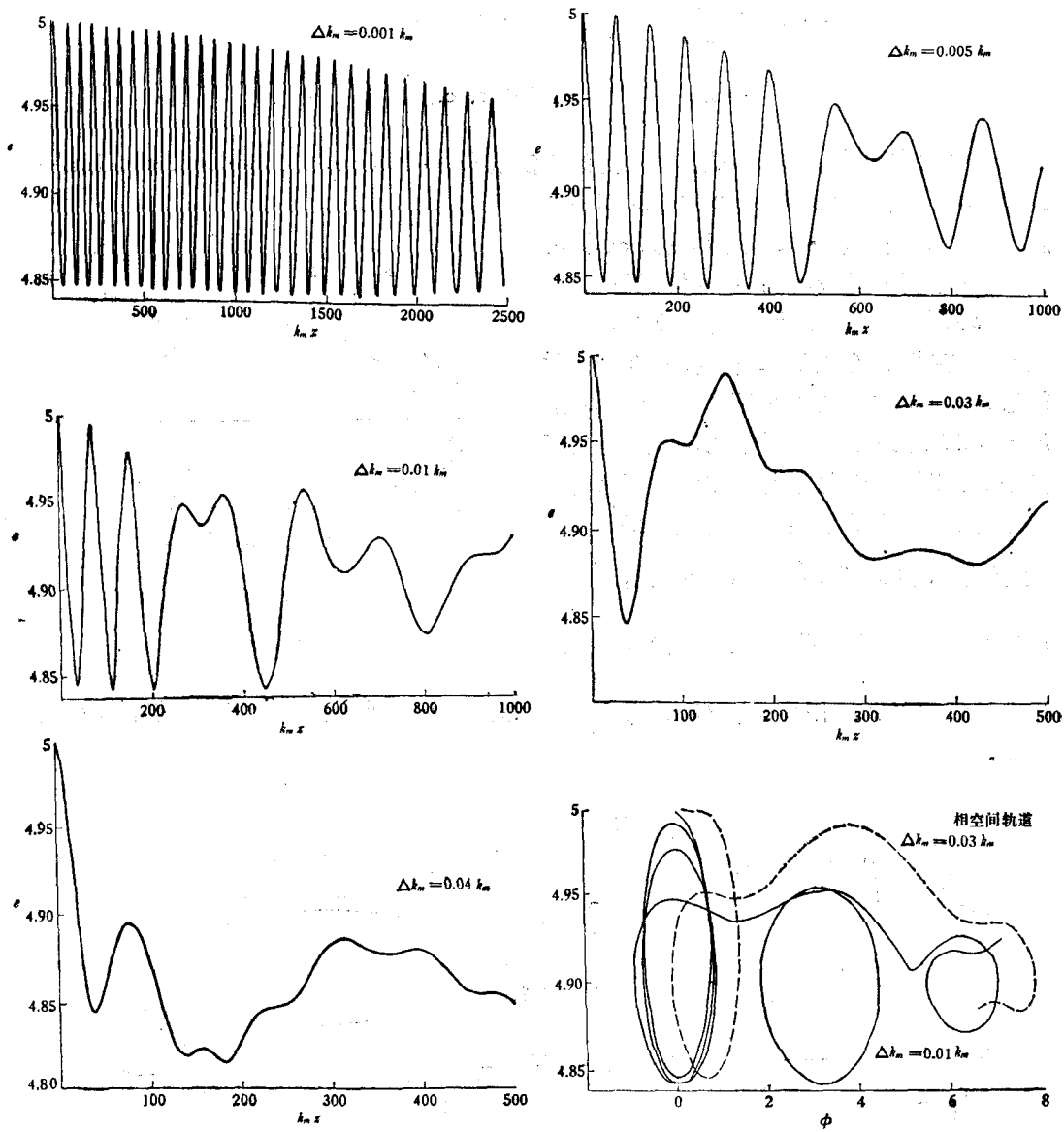


图 4

束轨道影响很小. 由于 Δk_m 很大, $k_m L > 20$ 以后, A_m 太小, 运动就不在我们讨论范围内了.

图 5 不同 Δk 电子的轨道

$$b = 0.01; k_m L = 200; e_0^2 = 25; e_r^2 = 23.5; \phi_0 = 0$$

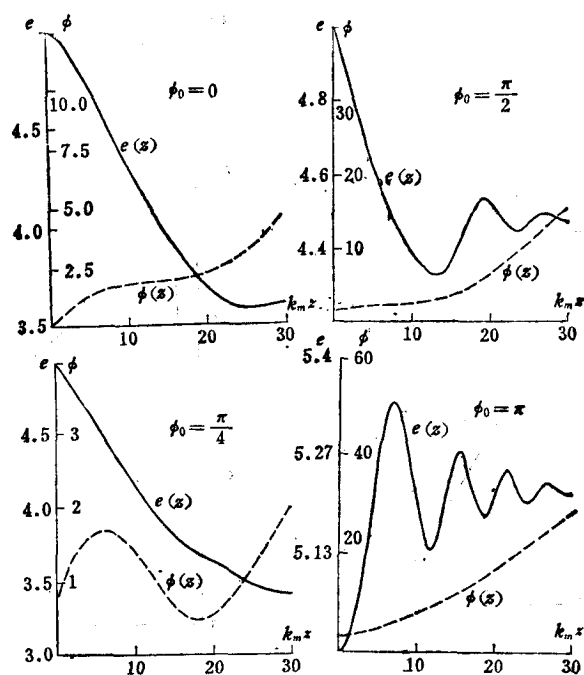
图6 不同 Δk_m 粒子的运动轨道

$b = 0.005$; $c_0^2 = 25$; $k_z/k_m = 46.54$

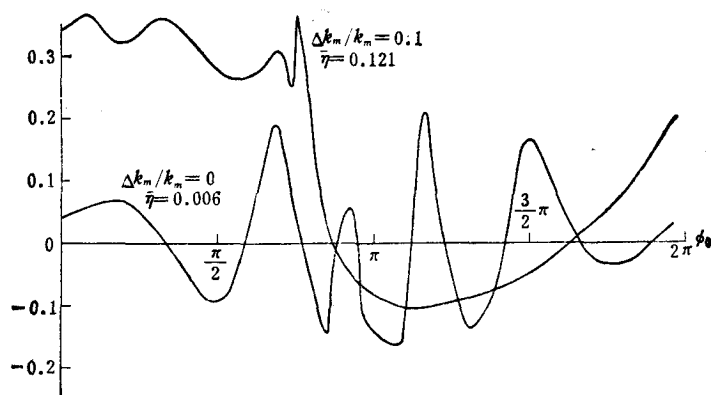
为了计算自由电子激光器的效率,我们在 $[0, 2\pi]$ 间取了 200 个均匀分布的 ϕ_0 , 计算 $e(L, \phi_0)$,

$$\eta = \frac{1}{200} \sum_{\phi_0} \frac{c_0 - e(L, \phi_0)}{c_0}.$$

图8是不同 Δk_m $\eta(\phi_0) = (c_0 - e(L, \phi_0))/c_0$ 随 ϕ_0 的变化. $\Delta k_m = 0$, $\eta(\phi_0)$ 强烈依赖于 ϕ_0 , 这是由于 $L > L_m$ 之故. 当 Δk_m 较大 $\eta(\phi_0)$ 除在 $\phi_0 \sim \pi$ 附近外, 变化就比较平缓了. 图9给出了 η 与 $\Delta k_m/k_m$ 的关系. 当 Δk_m 很小时, 效率很低, 随着 Δk_m 增大平均

图7 Δk_m 较大时不同 ϕ_0 的轨道

$b = 0.01$; $k_m L = 30$; $e_0^2 = 25$; $e_f^2 = 20$; $\Delta k_m / k_m = 0.1$

图8 不同 Δk_m 的 $\eta(\phi_0) = \frac{e_0 - e(L, \phi_0)}{e_0}$

$b = 0.02$; $e_f^2 = 22$; $e_0^2 = 25$; $k_m L = 100$

效率增大,在 $\Delta k_m / k_m$ 略小于 $\sqrt{b}$ 处达到极大 ($\bar{\eta}$ 在 10% 以上). 较大 Δk_m 引起 $\bar{\eta}$ 下降的主要原因是体系的等效长度(即 A_m 较大区域)太短之故. 在 $\bar{\eta}$ 极大处,已经有很大一部分轨道是无规的了. 图 10 给出了类似的 $\bar{\eta}(\Delta k_m / k_m)$ 曲线, 只是 $b = 0.005$, 因而 $\bar{\eta}$ 极大值随 $\sqrt{b}$ 一齐向小 Δk_m 方向推移.

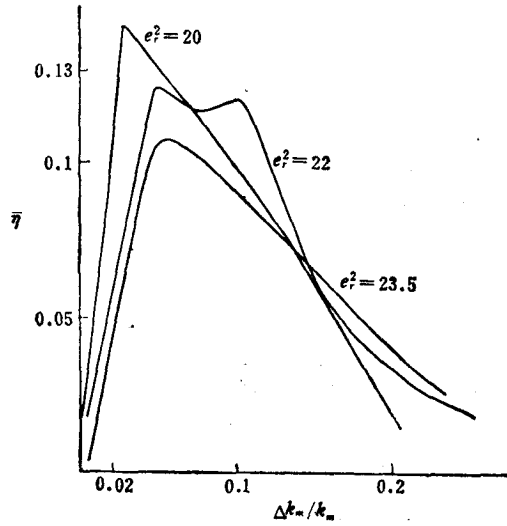


图9 平均效率 \$\bar{\eta}\$ 与 \$\Delta k_m\$ 关系
\$b = 0.02\$; \$k_m L = 100\$; \$e_0^2 = 25\$

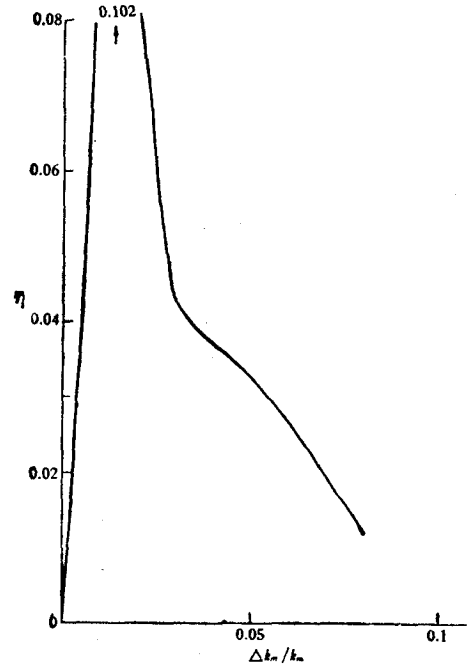


图10 平均效率 \$\bar{\eta}\$ 与 \$\Delta k_m\$ 关系
\$b = 0.005\$; \$e_0^2 = 25\$; \$k_m L = 100\$

三

如果 \$\Delta k_m\$ 很大, 轨道基本上是随机的, 我们可以应用类似于准线性近似的统计方法来讨论电子束的变化. 引入分布函数 \$f(e, \phi, z)\$, 满足刘维方程

$$\frac{\partial}{\partial z} f + \frac{de}{dz} \frac{\partial}{\partial e} f + \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial}{\partial \phi} f = 0. \quad (16)$$

而

$$\frac{d}{dz} e = -\frac{k_z}{e} b a(z) \sin \phi, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} \phi = k_w - \frac{k_z}{2e^2} s(z)^2 + \frac{k_z}{e^2} b a(z) \cos \phi. \quad (18)$$

将 \$f\$ 作傅氏展开

$$f(e, \phi, z) = \sum_n e^{in\phi} f_n(e, z),$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f_n + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial e} (f_{n-1} - f_{n+1}) + i n g_0 f_n \\ + \frac{i}{2} g_1 [(n-1)f_{n-1} + (n+1)f_{n+1}] = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}h &= -k_s \frac{2b}{e} a(z), \\g_0 &= k_m - \frac{k_s}{2e^2} s(z)^2, \\g_1 &= \frac{k_s}{e^2} b a(z), \\a(z) &= \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{ik'z} a(k') dk' .\end{aligned}$$

我们取 $a(z) = \sin(\Delta k z)/\Delta k z$, 相当于 $a(k') = 1$.

如果 $|b| \ll 1$, $e^2 \gg 1$, 则可以忽略 f_2 对 f_1 的影响

$$\frac{\partial}{\partial z} f_1 + i g_0 f_1 + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial e} f_0 = 0,$$

可以解出

$$f_1 = -\frac{i}{2} \frac{b}{e} k_s \int_0^z e^{-iG(z, z_1)} a(z_1) \frac{\partial}{\partial e} f_0(z_1) dz_1,$$

代入 f_0 的方程, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} f_0 - \frac{b^2 k_s^2}{2} a(z) \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{e^2} \int_0^z \cos G(z, z_1) \\ a(z_1) \frac{\partial}{\partial e} f_0(z_1) dz_1 = 0,\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$G(z, z_1) = \int_{z_1}^z g_0(z') dz'.$$

方程(20)中 g_0 在共振点附近很小, 余弦因子的变化不一定比 $a(z_1)$ 变化快很多, 因而第二项很难象通常准线性近似那样写成在 e 空间扩散项形式.

如果入射粒子束能量有一定分布宽度, 可以近似将 f_0 写成高斯型

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi D(z)}} e^{-(e - \bar{e}(z))^2/D^2},$$

则 $\bar{e}(z)$ 及 $D^2(z)$ 满足方程

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \bar{e} &= \int e \frac{\partial}{\partial z} f_0 \\ &= -\frac{b^2 k_s^2}{2} a(z) \int \frac{de}{e^2} \int_0^z \cos G(z, z_1) a(z_1) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial e} f_0(z_1) dz_1, \\ \frac{d}{dz} D^2 &= \frac{d}{dz} \int (e - \bar{e})^2 f_0(e) de \\ &= \int (e - \bar{e})^2 \frac{\partial}{\partial z} f_0 de\end{aligned}\tag{21}$$

$$= -\frac{b^2 k_z^2}{2} a(z) \int \frac{2(c - \bar{e})}{e^2} de \int_0^z \cos G(z, z_1) a(z_1) \frac{\partial}{\partial e} f_0(z_1) dz_1. \quad (22)$$

也可以直接计算波从粒子束中得到的能量. 对于一个粒子

$$\begin{aligned} \Delta e &= \int -j \cdot E dt \\ &= i \int_0^z \frac{2q^2}{c^2 m} \frac{1}{e} A_m A_s \frac{dz}{v_s} \\ &\simeq \int_0^z \frac{k_z}{e} b a(z) \sin \phi dz, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} \int \frac{\Delta E}{mc^2} f_0 de d\phi \\ &= \frac{1}{2i} \int \frac{k_z}{e} b a(z) (f_{-1} - f_1) de \\ &= -\frac{d}{dz} \bar{e}. \end{aligned}$$

因而

$$\eta = [\bar{e}(0) - \bar{e}(L)] / \bar{e}(0). \quad (23)$$

(21), (22) 式可以用数值方法求解, 从而得到激光器的效率. 图 10 给出一组参数

$$b = 0.01, \quad \bar{e}_0 = 5, \quad \Delta k_m / k_m = 0.03, \quad e_r^2 = 23.5$$

下, 不同 $D(0)$ 的结果. 前面轨道分析已表明在这种情况下电子轨道并不完全是随机的. 计算结果表明 (图 11), 当入射粒子能量分布宽度较大时, $\bar{e}$ 及 D 曲线都比较平滑, 而得到的平均效率与前面对 200 个 ϕ 计算的平均结果是一致的. 当 $D(0)$ 较小时, $D(z)$ 及 $\bar{e}(z)$ 曲线起伏太大是不合理的. 这说明, 当 $D(0)$ 很小时, 随机运动并不完全, 取高斯近

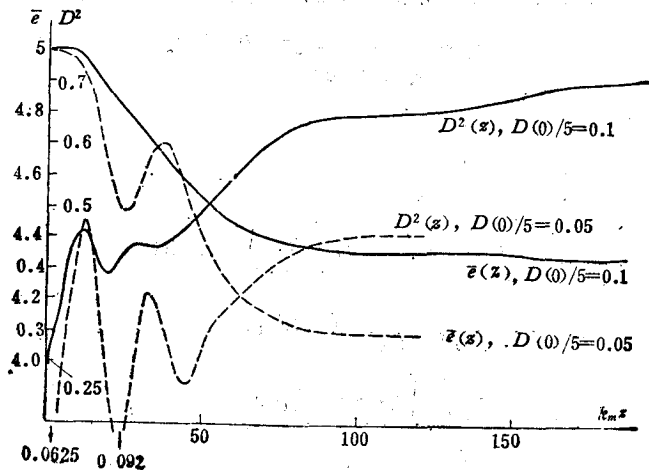


图 11

似是不合适的。

四

我们看到,只要周期磁场的参数在空间变化,总有一部分电子在自由电子激光器中的轨道是随机的。随着参数变化愈快,这部分电子所占的比例就愈大。一般说来,适当地采用变参数磁场,效率是可以明显提高的。随机运动部分的加强将使出射电子束有较大的能散,并限制了效率的提高。

如果 c_r 在空间变化很慢,电子能量的运动方程可写成

$$\frac{d}{dz} \delta c = -\frac{k_z}{c_r} b \sin \phi - \frac{d}{dz} c_r. \quad (24)$$

为了避免随机轨道的出现,以及由于参数变化使体系长度受到限制 ($L \sim 1/\Delta k$),可以在 (24) 式中将 $-\frac{d}{dz} c_r$ 改成由均匀电场引入的项 $-qE$ 。即在普通的自由电子激光器腔中加一纵向电场,这样整个体系在 z 方向仍是均匀单周期性的,因而运动总是周期性的。被约束在有质动力势谷中的电子随着波谷的移动,将所得的静电能转换成波能。这就和行波管中的过程很类似了。

本工作主要部分是作者在美国普林斯顿高等研究院访问工作期间完成的,作者特别感谢 M. N. Rosenbluth 教授的热情支持与帮助。感谢与陈骝、李一群所作的多次有益讨论。

参 考 文 献

- [1] R. B. Palmer, *J. Appl. Phys.*, **43**(1972), 3014; A. T. Lin and J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **18**(1975), 201; J. M. J. Madey, *J. Appl. Phys.*, **42**(1971), 1906; L. R. Elias *et al.*, *Phys. Rev. Letters.*, **36**(1976), 717.
- [2] W. H. Louisel *et al.*, *Phys. Rev. A*, **19**(1979), 288.
- [3] N. M. Kroll, P. Morton and M. N. Rosenbluth, JSR-79-01, (1980).
- [4] G. M. Zaslavskii and B. V. Shirikov, *Usp. Fiz. Nauk.*, **105**(1971), 3.

THE STOCHASTIC BEHAVIOR OF ELECTRONS IN FREE ELECTRON LASERS WITH VARIABLE PARAMETER WIGGLERS

Ho Yu-ping

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

ABSTRACT

In this article, the motion of electrons in free electron lasers with variable parameter wigglers is discussed. It is pointed out that, the more quickly the parameter varies, the more trapped electrons move stochastically. The influences of such stochastic motion on laser efficiency have been analyzed numerically. A statistical method to describe the beam behavior in strong stochastic limit has also been developed.