

对头碰相对论电子束引起的不稳定性

郭 书 印

(中国西南物理研究所)

1981 年 3 月 13 日收到

提 要

本文在考虑到磁场和热压力的情况下,研究了对头碰相对论电子束在传输的过程中可能导致的几种电磁不稳定性,并给出了这些不稳定性出现的条件和增长率.利用不稳定性的激发条件,根据问题的要求可通过控制电子束的相对运动速度来激发或抑制这些不稳定性.

一、引 言

近年来相对论电子束在受控热核反应中的应用,再次受到了人们的重视,这主要是因为在惯性约束核聚变实验中,利用多股对头碰相对论电子束对热核聚变“燃料丸”进行迅速压缩以实现核聚变的方法,已经成功并得到了令人鼓舞的结果.同时人们也提出了在磁约束核聚变实验中,利用相对论电子束打“靶”以实现磁约束等离子体“引燃”的问题^[1,2].不论是哪一种应用方式,都存在着相对论电子束的传输($B_0 = 0$ 或 $B_0 \neq 0$)问题.本文研究了两股(对于多股情况,可按类似的方法多次处理)对头碰相对论电子束在传输的过程中所可能引起的几种电磁不稳定性,并给出了这些不稳定性出现的条件和增长率.作为一种较为普遍的结果,我们同时考虑了外磁场 B_0 和束的热压力 ∇P .

在以上所述的相对论电子束的两种应用中,这些不稳定性都是在必须克服之列,否则,未对“燃料丸”进行压缩或对磁约束等离子体打“靶”之前,由于激发这些不稳定性,电子束的能量已损失殆尽.当然,我们也不排除下面这种可能性,即在磁约束核聚变实验中利用对头碰相对论电子束所激发的不稳定性,实现对等离子体的反常加热.在不利的情况下,需要抑制这些不稳定性的出现,在有用的情况下,就需要激发这些不稳定性.不管是抑制或是激发,都必须掌握这些不稳定性发生的条件.这就是本文所要解决的问题.

关于相对论电子束激发不稳定性问题, Akhiezer 已给出了冷电子束所激发的静电纵波的色散关系^[3].对于非相对论冷电子束所激发的电磁不稳定性, Mikhailovskii^[4] 已进行了简单的研究.我们的结果除包括了磁场和热压力之外,还允许波矢量 k 与磁场 B_0 之间的夹角取任意值.所以,文献 [3] 和 [4] 的结果只是这里的特例.

二、色散方程

这里所处理的体系,是由两股密度相同,分别以速度 V_0 和 $-V_0$ 相互贯穿的相对论

电子束所构成。为了普遍性,假设两束处在外加磁场 $\mathbf{B}_0$ 中。若束的单能性较差,还必须考虑束的热压力。为便于处理,设体系是均匀的并且是等温过程,取 $\mathbf{V}_0 = V_0 \mathbf{z}$, 另一束则相反,其中 $\mathbf{z}$ 为 z 轴的单位矢量。当此体系中出现扰动之后,束的密度 n_α 和速度 $\mathbf{V}_\alpha$ 将满足线性方程

$$im\gamma(k_x V_{0\alpha} - \omega)v'_{x\alpha} = -eE'_x - \frac{e}{c}(B_0 v'_{\alpha y} - V_{0\alpha} B'_y) - ik_x \frac{\kappa T}{n_{0\alpha} \gamma} n'_\alpha, \quad (1)$$

$$im\gamma(k_x V_{0\alpha} - \omega)v'_{y\alpha} = -eE'_y - \frac{e}{c}(V_{0\alpha} B'_x - B_0 v'_x) - ik_y \frac{\kappa T}{n_{0\alpha} \gamma} n'_\alpha, \quad (2)$$

$$im\gamma^3(k_x V_{0\alpha} - \omega)v'_{x\alpha} = -eE'_x - ik_x \frac{\kappa T}{n_{0\alpha} \gamma} n'_\alpha, \quad (3)$$

$$i(k_x V_{0\alpha} - \omega)n'_\alpha + in_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'_\alpha = 0. \quad (4)$$

在线性化的过程中已用到 $n_\alpha = n_{0\alpha} + n'_\alpha$, $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_{0\alpha} + \mathbf{V}'_\alpha$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ (即无外加电场), 及 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}$ 。式中 $\alpha = 1$ 和 2 时分别表示两电子束的相应量,

$$\gamma = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

为相对论修正因子, e 为电荷, m 为质量, T 是两束的温度, 假设是相同的, 在磁场 $\mathbf{B}_0$ 较弱 ($\omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2 \ll 1$) 的情况下, 其各向异性是可以忽略的。

利用上面所作的有关假设并考虑到在垂直于电子束的平面上的对称性, 由麦克斯韦方程得

$$\frac{ik_x c}{\omega} (k_x E'_x - k_x E'_x) = \frac{4\pi e}{c} n_0 (v'_{1x} + v'_{2x}) - \frac{i\omega}{c} E'_x, \quad (5)$$

$$- \frac{i(k_x^2 + k_z^2)c}{\omega} E'_y = \frac{4\pi e}{c} n_0 (v'_{1y} + v'_{2y}) - \frac{i\omega}{c} E'_y, \quad (6)$$

$$- \frac{ik_x c}{\omega} (k_x E'_x - k_x E'_y) = \frac{4\pi e}{c} (V_{01} n'_1 + n_0 v'_{1x} - V_{02} n'_2 + n_0 v'_{2x}) - \frac{i\omega}{c} E'_x. \quad (7)$$

在导出(5)–(7)式的过程中已假设体系存在着固定的均匀电中性本底。利用(1)–(4)式求解出 n'_α 和 $\mathbf{v}'_\alpha$, 然后代入(5)–(7)式, 经过整理之后即得电分量 $\mathbf{E}'$ 所满足的方程

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

由此方程具有非零解的条件

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

可得普遍色散方程。其中各矩阵元的定义为

$$M_{11} = \frac{i\omega}{c} - \frac{ik_x^2 c}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left[\frac{iW_+^2 \Phi_+}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+hc}^2} + \frac{iW_-^2 \Phi_-}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{+hc}^2} \right],$$

$$M_{12} = - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left[\frac{\omega_{Be} W_+ (k_x^2 V_{+hc}^2 - \gamma W_+^2)}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+hc}^2} + \frac{\omega_{Be} W_- (k_x^2 V_{+hc}^2 - \gamma W_-^2)}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{+hc}^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
M_{13} &= \frac{ik_x k_z c}{\omega} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left[\frac{ik_x W_+^2 (W_+ V_0 - k_z V_{+he}^2)}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+he}^2} + \frac{ik_x W_-^2 (W_- V_0 - k_z V_{-he}^2)}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{-he}^2} \right], \\
M_{21} &= -M_{12}, \\
M_{22} &= \frac{i\omega}{c} - \frac{i(k_x^2 + k_z^2)c}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left\{ \frac{iW_+^2 [\gamma W_+^2 - (\gamma^2 k_x^2 + k_z^2) V_{+he}^2]}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+he}^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{iW_-^2 [\gamma W_-^2 - (\gamma^2 k_x^2 + k_z^2) V_{-he}^2]}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{-he}^2} \right\}, \\
M_{23} &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left[\frac{k_x \omega_{Be} W_+ (W_+ V_0 - k_z V_{+he}^2)}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+he}^2} + \frac{k_x \omega_{Be} W_- (W_- V_0 - k_z V_{-he}^2)}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{-he}^2} \right], \\
M_{31} &= -M_{13}, \quad M_{32} = -M_{23}, \\
M_{33} &= \frac{i\omega}{c} - \frac{ik_x^2 c}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left\{ \frac{iV_0 (k_x \omega \Psi_+ - k_x^2 W_+^2 V_0) - iW_+ (\omega \Psi_+ - W_+ \gamma k_x^2 V_{+he}^2)}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 W_+^2 k_x^2 V_{+he}^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{iV_0 (k_x \omega \Psi_- - k_x^2 W_-^2 V_0) - iW_- (\omega \Psi_- - W_- \gamma k_x^2 V_{-he}^2)}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 W_-^2 k_x^2 V_{-he}^2} \right\},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
W_{\pm} &= (k_z V_0 \pm \omega), \\
\Psi_{\pm} &= (k_x V_0 \pm \omega)^2 - \omega_{Be}^2 = W_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2, \\
\Phi_{\pm} &= \gamma (k_x V \pm \omega)^2 - k_z^2 v_{+he}^2 = \gamma W_{\pm}^2 - k_z^2 V_{\pm he}^2.
\end{aligned}$$

$V_{+he} = \sqrt{\frac{\kappa T}{\gamma m}}$ 为电子热速度, $\omega_{Be} = \left| \frac{e B_0}{\gamma m c} \right|$ 为电子回旋频率. 其它量都具有通常的意义.

三、色散方程的解析结果

由于色散方程 (9) 的复杂性, 在一般情况下解析求解是不可能的, 为了获得有意义的物理结果, 就以下几种简单情况加以分析.

1. $k_x = 0$; $k_z \approx 0$

在这种情况下我们所研究的是沿磁场方向传播的纵波和横波的性质.

(1) 若 $E'_x \approx 0$, 则得色散关系

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^3 (k_x V_0 + \omega)^2 - \gamma^2 k_z^2 V_{+he}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^3 (k_x V_0 - \omega)^2 - \gamma^2 k_z^2 V_{-he}^2} = 0. \quad (10)$$

这是在考虑到热运动的情况下, 相对论电子束所导致的静电纵波的色散关系, 在 $V_{+he} = 0$ 时, 简化为 Akhiezer^[3] 的结果. 由方程 (10) 可得这种不稳定性的激发条件为

$$V_0^2 > \frac{1}{\gamma} \left[2 \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^2 k_z^2} + V_{+he}^2 \right]. \quad (11)$$

(2) 若 $E'_x \approx 0$, $E'_y \approx 0$, 则由色散关系 (9) 式得

$$M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} = 0. \quad (12)$$

由矩阵元的表达式可以看出, 在 $k_x = 0$ 时 $M_{11} = M_{22}$, 根据 M_{12} 和 M_{21} 之间的反对称关系, 可得右旋波 $E'_x = -iE'_y$ 的色散关系

$$1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \gamma} \frac{k_z V_0 + \omega}{(k_z V_0 + \omega) + \omega_{Be}} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \gamma} \frac{k_z V_0 - \omega}{(k_z V_0 - \omega) + \omega_{Be}} = 0. \quad (13)$$

和左旋波 $E'_x = iE_y$ 的色散关系

$$1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 j} \frac{k_z V_0 + \omega}{(k_z V_0 + \omega) - \omega_{Be}} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \gamma} \frac{k_z V_0 - \omega}{(k_z V_0 - \omega) - \omega_{Be}} = 0. \quad (14)$$

在低频 ($\omega \ll \omega_{pe}$) 假设下, 由 (13) 和 (14) 式得

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c^2 \gamma (k_z V_0 + \omega_{Be})^2 + k_z V_0 \omega_{pe}^2 (k_z V_0 + \omega_{Be})}{2\omega_{pe}^2 + k_z^2 c^2 \gamma}$$

和

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c^2 \gamma (k_z V_0 + \omega_{Be})^2 + 2k_z^2 V_0^2 \omega_{pe}^2 - k_z V_0 \omega_{pe}^2 \omega_{Be}}{2\omega_{pe}^2 + k_z^2 c^2 \gamma}.$$

由此可见右旋波为稳定的, 在 $\omega_{pe} > \omega_{Be}$ 而 $\omega_{Be} > k_z c$ 的条件下左旋波可以成为不稳定的, 其不稳定性判据为

$$V_0 > \gamma \frac{k_z V_A^2}{\omega_{Be}}, \quad (15)$$

其中 $V_A^2 = \frac{c^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2}$ 为阿耳芬速度, 不稳定性增长率为

$$\omega_i = \left(\frac{\omega_{Be}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[k_z V_0 - \gamma \omega_{Be} \left(\frac{k_z c}{\omega_{pe}} \right)^2 \right], \quad (16)$$

其中 $\omega = \omega_r + i\omega_i$.

2. 线偏振波

1) $E'_x = E'_y = 0, E'_z \neq 0$ 这时色散关系为

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta + \frac{\omega_{pe}}{\omega^2} \frac{k V_0 \omega \Psi_+ \cos \theta + k^2 V_0^2 \gamma^2 \bar{W}_+^2 \sin^2 \theta - \bar{W}_+ \omega \Psi_+ - \bar{W}_+^2 k^2 V_{+hc}^2 \gamma^2}{\gamma^2 \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^3 \bar{W}_+^2 k^2 V_{+hc}^2 \sin^2 \theta} + \frac{\omega_{pe}}{\omega^2} \frac{k V_0 \omega \Psi_- \cos \theta + k^2 V_0^2 \gamma^2 \bar{W}_-^2 \sin^2 \theta - \bar{W}_- \omega \Psi_- - \bar{W}_-^2 k^2 V_{+hc}^2 \gamma^2}{\gamma^2 \Psi_- \Phi_- - \gamma^3 \bar{W}_-^2 k^2 V_{+hc}^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (17)$$

其中

$$\bar{W}_{\pm} = (\omega \pm k V_0 \cos \theta),$$

$$\Psi_{\pm} = (\omega \pm k V_0 \cos \theta)^2 - \omega_{Be}^2 = \bar{W}_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2,$$

$$\Phi_{\pm} = \gamma(\omega \pm k V_0 \cos \theta)^2 - k^2 V_{+hc}^2 \cos^2 \theta = \gamma \bar{W}_{\pm}^2 - k^2 V_{+hc}^2 \cos^2 \theta,$$

θ 是 $\mathbf{k}$ 与磁场 $\mathbf{B}_0$ 之间的夹角, $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. 对于以下三种特殊情况可以求解:

$\theta = 0^\circ$ 这时即得色散关系 (10) 式.

$\theta = 90^\circ$ 则得色散关系

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{(\omega_{Be}^2 - \omega^2) + k^2 (V_{+hc}^2 - \gamma V_0^2)}{\gamma^2 [\omega^2 - \omega_{Be}^2 - k^2 V_{+hc}^2]} = 0. \quad (18)$$

这是沿垂直于磁场方向传播而振动方向平行于磁场的横波色散关系, 在低频 ($\omega \ll \omega_{pe}$) 条件下其解为

$$\omega^2 = \omega_{Be}^2 + k^2 V_{+hc}^2 - 2\omega_{pe}^2 \frac{\gamma (V_0/c)^2}{\gamma^3 + 2(\omega_{pe}/k c)^2}. \quad (19)$$

于是不稳定性激发条件为

$$\frac{(V_0/c)^2}{r^3 + 2(\omega_{pe}/kc)^2} > \frac{\omega_{pe}^2 + k^2 V_{+he}^2}{2\omega_{pe}^2 r}. \quad (20)$$

在 $V_{+he} = 0$ 和 $r = 1$ 的情况下, (19) 和 (20) 式简化为 Mikhailovskii^[4] 的结果.

在 $B_0 = V_{+he} = 0$ 的条件下, 色散方程变为

$$1 - \left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k^2 V_0^2 (\omega^2 - k^2 V_0^2 \cos^2 \theta)}{(\omega^2 - k^2 V_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \sin^2 \theta - 2 \frac{\omega_{pe}^2 (\omega^2 + k^2 V_0^2 \cos^2 \theta)}{r^3 (\omega^2 - k^2 V_0^2 \cos^2 \theta)^2} = 0. \quad (21)$$

在 $\omega_{pe} \gg kc$ 时得

$$\omega^2 = \begin{cases} \left[\frac{2r^3 k^2 c^2}{2\omega_{pe}^2 + r^3 k^2 c^2 \sin^2 \theta} + \frac{r^2 \omega_{pe}^2}{2r^3 k^2 c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2\omega_{pe}^2 (r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \right] \cdot k^2 V_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2 k^2 V_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2\omega_{pe}^2 + r^3 k^2 c^2 \sin^2 \theta} & \text{当 } \theta \approx 0^\circ \text{ 或 } 90^\circ \text{ 时;} \\ - \frac{\omega_{pe}^2 r^2 k^2 V_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{2r^3 k^2 c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \omega_{pe}^2 (r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} & \text{当 } \theta \text{ 处在 } 0-90^\circ \text{ 之间时.} \end{cases} \quad (22)$$

于是不稳定性增长率为

$$\omega_i = \frac{r \omega_{pe} k V_0 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2} [r^3 k^2 c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \omega_{pe}^2 (r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{当 } \theta \text{ 处在 } 0-90^\circ \text{ 之间时;} \quad (24)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{2}} k V_0 \quad \text{当 } \theta = 0^\circ; \quad (25)$$

$$\omega_i = \sqrt{2} \omega_{pe} \frac{r(V_0/c)}{\sqrt{r^3 + 2(\omega_{pe}/kc)^2}} \quad \text{当 } \theta = 90^\circ. \quad (26)$$

(24) 式是纵-横混合波的增长率, (25) 式是静电纵波的最大增长率, 与 Mikhailovskii^[5] 的结果是一致的. (26) 式是横波的增长率, 在 $r=1$ 的条件下即为 Mikhailovskii^[4] 的结果.

2) $E'_x \approx 0$, $E'_z = E'_y = 0$ 这时得色散关系

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\bar{W}_+^2 \Phi_+}{r^2 \Psi_+ \Phi_+ - r^3 \bar{W}_+^2 k^2 V_{+he}^2 \sin^2 \theta} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\bar{W}_-^2 \Phi_-}{r^2 \Psi_- \Phi_- - r^3 \bar{W}_-^2 k^2 V_{+he}^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (27)$$

$\theta = 0^\circ$ 时上式变成

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{(k V_0 + \omega)^2}{r [(k_z V_0 + \omega)^2 - \omega_{Be}^2]} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{(k V_0 - \omega)^2}{r [(k_z V_0 - \omega)^2 - \omega_{Be}^2]} = 0. \quad (28)$$

这是沿磁场方向传播的横波色散关系, 热运动的作用已不出现. 在低频 ($\omega \ll \omega_{pe}$) 以及 $\omega_{pe}^2 \gg r k^2 c^2$ 的情况下得不稳定性条件

$$\frac{\omega_{Be}^2}{k^2} > V_0^2 > \frac{\omega_{Be}^2}{k^2} \frac{\gamma k^2 c^2}{2\omega_{pe}^2 + \gamma k^2 c^2}. \quad (29)$$

$\theta = 90^\circ$ 时色散关系 (28) 式变成

$$1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\gamma(\omega^2 - \omega_{Be}^2) - \gamma^2 k^2 V_{+he}^2} = 0. \quad (30)$$

显然这种波是稳定的, (30) 式表明了相对论效应和热运动对高混杂波的影响.

在 $V_{+he} = 0$ 的条件下色散关系 (27) 式变为

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[\frac{\bar{W}_+^2}{\gamma^2 \Psi_+} + \frac{\bar{W}_-^2}{\gamma^2 \Psi_-} \right] = 0. \quad (31)$$

在低频 ($\omega \ll \omega_{pe}$) 和 $\omega_{pe} \gg kc$ 的假设下得不稳定性判据为

$$V_0^2 > \gamma^2 V_A^2, \quad (32)$$

其增长率是

$$\omega_i = \frac{kV_0}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{c}{V_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^2 \right] \cos \theta. \quad (33)$$

在导出 (33) 式的过程中我们同样用到了 $\omega_{pe} \gg \omega_{Be} > kc$ 的假设.

3) $E_y \approx 0$, $E_x = E_z = 0$ 这是一种横波, 其色散关系为

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[\frac{\bar{W}_+^2 (\Phi_+ - k^2 V_{+he}^2 \gamma^2 \sin^2 \theta)}{\gamma \Psi_+ \Phi_+ - \gamma^2 k^2 V_{+he}^2 \bar{W}_+^2 \sin^2 \theta} + \frac{\bar{W}_-^2 (\Phi_- - k^2 V_{+he}^2 \gamma^2 \sin^2 \theta)}{\gamma \Psi_- \Phi_- - \gamma^2 k^2 V_{+he}^2 \bar{W}_-^2 \sin^2 \theta} \right] = 0. \quad (34)$$

$\theta = 0^\circ$ 时即得色散关系 (28) 式, 这是由于前面已提到的体系的对称性所致.

$\theta = 90^\circ$ 时色散关系 (31) 式变为

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \gamma k^2 V_{+he}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2 - \gamma k^2 V_{+he}^2} = 0. \quad (35)$$

在 $kc \gg \omega_{pe}$ 的条件下, 可得不稳定性出现的条件

$$\left(\frac{c}{V_{+he}} \right)^2 \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^2 + \gamma \left(\frac{kc}{\omega_{pe}} \right)^2 > 2. \quad (36)$$

当 $V_{+he} = 0$ 时色散方程 (34) 变成

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[\frac{\bar{W}_+^2}{\gamma \Psi_+} + \frac{\bar{W}_-^2}{\gamma \Psi_-} \right] = 0. \quad (37)$$

在低频 ($\omega \ll \omega_{pe}$) 以及 $\omega_{pe} > \omega_{Be} > kc$ 的条件下, 可得这种波的不稳定性判据

$$\left(\frac{V_0}{c} \right)^2 \cos^2 \theta > 2\gamma \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^2 \quad (38)$$

或

$$V_0^2 \cos^2 \theta > \gamma V_A^2. \quad (39)$$

而不稳定性增长率为

$$\frac{\omega_i}{\omega_{pe}} \approx \frac{kV_0}{\omega_{pe}} \left[1 - \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{c}{V_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^2 (1 + \sin^2 \theta) \right]. \quad (40)$$

四、总 结

通过上面的分析可以看出,两股对头碰相对论电子束在传输的过程中,可以导致静电不稳定性及电磁不稳定性,在一般情况下相对于静电不稳定性而言,电磁不稳定性是弱的,这点可根据静电力与电磁力的大小,得出两种不稳定性增长率的比值,即

$$\omega_{\text{电磁}}/\omega_{\text{静电}} \approx \frac{V_0}{c} \ll 1.$$

但是,在相对论的情况下,电磁不稳定性的作用也是重要的,所以,本文除了给出静电不稳定性的判据和增长率之外,对不同形式的电磁不稳定性也进行了较全面的研究,并把文献[3—5]中已获得的结果作为特例而包括了进来. 在这些电磁不稳定性中,首先应该注意的是由判据(15), (20)和(32)式所示的三种. 这是因为它们出现的条件即 V_0 与其它量之间的关系比较容易得到满足. 这样,在实验工作中可根据实验要求,等离子体(或束)的参数以及磁场的强弱,适当调整束的速度 V_0 来激发或抑制这些电磁不稳定性及静电不稳定性.

本文的结果很容易推广到其它离子束对头碰的情况.

丁厚昌同志仔细阅读了本文,并提出了宝贵意见,特致谢意.

参 考 文 献

- [1] Gerold Yonas, *Scientific American*, 239(5) (1978).
- [2] Johna Halbleib, Sr. and Thomasp. Wright, *The Physics of Fluids*, V. 23, 1612, (1980).
- [3] A. I. Akhiezer and the Others, *plasma Electrodynamics*, Pergamon Press (1975), V. 1, p. 339.
- [4] A. B. Mikhailovskii, *Reviews of plasma physics*, Consultants Bureau. New York-London (1975), V. 6, p. 87, p. 85.
- [5] A. B. Mikhailovskii, *Theory of plasma instabilities*, Consultants Bureau. New York-London (1974), V. 1, p. 12.

INSTABILITIES EXCITED BY HEAD-ON COLLISIONS OF TWO RELATIVISTIC ELECTRON BEAMS

KOU SHU-YING

(Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China)

ABSTRACT

In this paper, we studied the instabilities excited by head-on collision of two relativistic electron beams in transporting, taking account of the magnetic field B_0 and the thermal pressure ∇p of the beams. The conditions under which the instabilities occur and the growth rate of instabilities are obtained. The results show that these instabilities can be excited or inhibited by controlling the velocity of the beams.