

黑洞能量涨落和黑洞视界邻近的 辐射气温度上限

周 敏 耀 陈 良 范

(上海师范学院物理系)

1981 年 10 月 26 日收到

提 要

本文应用弯曲时空正则量子化方法,在 $1+1$ 维情况下,证明了辐射气的温度分布函数为 $T(r)(g_{tt})^{1/2} = \text{常数}$. 进而讨论了 $1+1$ 维 Schwarzschild 黑洞情况下黑洞能量的涨落现象,并由此估计了辐射场温度的上限.

在 $1+1$ 维时空中,由无质量中性标量场所组成的热平衡体系,当温度为 T 时,其辐射能密度¹⁾

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p| dp}{e^{|p|/T} - 1} = \frac{\pi}{6} T^2, \quad (1)$$

将此辐射气置于一个线度为 l 的“盒子”内,则辐射气能量

$$E_r = \frac{\pi}{6} T^2 l, \quad (2)$$

辐射气熵

$$S_r = \frac{\pi}{3} T l. \quad (3)$$

$1+1$ 维静态时空的普遍线元形式为

$$ds^2 = F(r) dt^2 - G(r) dr^2, \quad (4)$$

度规是渐近平坦的,即当 $r \rightarrow \infty$ 时, $F(r)$ 和 $G(r)$ 都趋于 1. 无质量中性标量粒子满足最小耦合 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \phi = 0, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} g_{tt} &= F(r), & g_{rr} &= -G(r), \\ g^{tt} &= F(r)^{-1}, & g^{rr} &= -G(r)^{-1}, \\ \sqrt{-g} &= [F(r)G(r)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

引入新坐标 $\tilde{r}$, 其定义为

1) 本文采用普朗克单位制,即 $c = G = \hbar = k = 1$.

$$\frac{d\tilde{r}}{dr} = \left[\frac{G(r)}{F(r)} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

由(6)式和(7)式,可把(5)式改写为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{r}^2} = 0. \quad (8)$$

(8)式的正频解为

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}^{\text{in}} &= N_{\omega} \cdot e^{-i\omega(t+\tilde{r})} \\ \phi_{\omega}^{\text{out}} &= N_{\omega} \cdot e^{-i\omega(t-\tilde{r})}. \end{aligned} \quad (9)$$

$\phi_{\omega}^{\text{in}}$ 和 $\phi_{\omega}^{\text{out}}$ 分别是模式为 ω 的入射波函数和出射波函数, N_{ω} 为归一化常数. 场算符可展开为

$$\hat{\phi} = \sum_{\omega} (\hat{a}_{\omega}^{\text{out}} \phi_{\omega}^{\text{out}} + \hat{a}_{\omega}^{\text{in}} \phi_{\omega}^{\text{in}} + h.c.). \quad (10)$$

这里 $\hat{a}_{\omega}$ 是相应波函数所描写的粒子的湮灭算符. 能动张量 $\hat{T}_{tt}$ 分量的统计平均值为

$$\langle \hat{T}_{tt} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{T}_{tt}), \quad (11)$$

其中

$$\hat{\rho} = \sum_n |n\rangle W_n \langle n| \quad (12)$$

是统计算符.

$$\hat{T}_{tt} = \frac{1}{2} (\hat{\phi}_{,t} \hat{\phi}_{,t} + F(r) G(r)^{-1} \hat{\phi}_{,r} \hat{\phi}_{,r}). \quad (13)$$

将(12)和(13)式代入(11)式,并利用(10)式可算得

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{tt} \rangle &= \sum_{\omega} \sum_n W_n \langle n | N_{\omega}^2 \omega^2 (\hat{a}_{\omega}^{\text{out}} \hat{a}_{\omega}^{\text{out}+} + \hat{a}_{\omega}^{\text{out}+} \hat{a}_{\omega}^{\text{out}}) \\ &\quad + N_{\omega}^2 \omega^2 (\hat{a}_{\omega}^{\text{in}} \hat{a}_{\omega}^{\text{in}+} + \hat{a}_{\omega}^{\text{in}+} \hat{a}_{\omega}^{\text{in}}) | n \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式表明 $\langle \hat{T}_{tt} \rangle$ 是个常数,与 r, t 无关.

静止观察者测得的本征能密度

$$\rho(r) = \langle \hat{T}_{tt} \rangle \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = \langle \hat{T}_{tt} \rangle F(r)^{-1}. \quad (15)$$

这里已应用了(4)式的线元形式. 注意到 $r \rightarrow \infty$ 时, $F(r) \rightarrow 1$, 所以 $\langle \hat{T}_{tt} \rangle$ 就是渐近平坦区的能密度. 由(1)和(15)式即可得

$$T(r) F(r)^{1/2} = \text{常数} = T(\infty). \quad (16)$$

朗道^[1]曾用统计力学的方法得到过相同的结论.

以下具体考虑 1 + 1 维 Schwarzschild 黑洞,其线元为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (17)$$

黑洞质量和黑洞温度仍满足^[2]

$$T_{bh} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (18)$$

Hawking^[3] 指出辐射场与黑洞热平衡时,必须满足辐射熵与黑洞熵取极大的条件,即

$$\begin{aligned}\delta(S_r + S_{bh}) &= 0, \\ \delta^2(S_r + S_{bh}) &< 0.\end{aligned}\quad (19)$$

这里 S_{bh} 是黑洞的熵, 它与黑洞能量 E_{bh} 的关系为

$$S_{bh} = 4\pi E_{bh}^2. \quad (20)$$

(19) 式的计算结果为

$$T(\infty) = T_{bh}, \quad (21)$$

$$l < 192\pi M^3 \equiv l_{\max}. \quad (22)$$

当“盒子”线度 l 大于 $l_{\max}$, 体系无法达到热平衡.

利用 (21) 和 (17) 式, (16) 式可改写为

$$T(r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} = T_{bh}. \quad (23)$$

上式表明, 当 $r \rightarrow 2M$ 时, $T(r)$ 发散. 下面我们用黑洞能量的涨落现象来处理发散困难.

当体系处于热平衡时, 黑洞能量不是一个确定的值, 黑洞处于能量为 E_{bh} 的几率为

$$p(E_{bh}) = C \cdot e^{S(E, l, E_{bh})} \quad (24)$$

这里 E 和 S 分别是体系的总能量和总熵, 即

$$S = S_r + S_{bh} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} (E - E_{bh})^{1/2} l^{1/2} + 4\pi E_{bh}^2, \quad (25)$$

$$E = E_r + E_{bh}, \quad (26)$$

C 是归一化常数.

在 $E_{bh} = \bar{E}_{bh}$ 附近展开 (25) 式到二阶项, 把计算结果代入 (24) 式可得

$$p(E_{bh}) = C' \cdot e^{-4\pi\eta(E_{bh} - \bar{E}_{bh})^2}. \quad (27)$$

这里 C' 是新的归一化常数, $\eta \equiv l_{\max}/l$. 当盒子线度远小于 $l_{\max}$ 时, $\eta \gg 1$, 上式已利用了这一条件. (27) 式是一个高斯型分布, 其能量涨落为

$$[(\bar{E}_{bh} - E_{bh})^2]^{1/2} = (8\pi\eta)^{-1/2}. \quad (28)$$

黑洞能量涨落将导致黑洞视界发生模糊, 造成视界具有一定的“宽度”, 为使黑洞“外”这个词具有确切的含义, $r_{\min}$ 应取在视界宽度的“外侧”,

$$r_{\min} = 2[M + (8\pi\eta)^{-1/2}]. \quad (29)$$

对黑洞外观察者有意义的 M 值应是 $\bar{E}_{bh}$. 将 (29) 式代入 (23) 式, 便可得黑洞“外”辐射场温度的上限

$$T_{\max} = T_{bh} \left\{ 1 - \frac{2\bar{E}_{bh}}{2[\bar{E}_{bh} + (8\pi\eta)^{-1/2}]} \right\}^{-1/2}. \quad (30)$$

以 $1/\eta$ 为小量展开 (30) 式, 并利用 η 的定义和 (22) 式, 最后可计算得到

$$T_{\max} = A \bar{E}_{bh}^{1/4}, \quad (31)$$

其中 $A = \left(\frac{3}{8\pi^2 l}\right)^{1/4}$.

取 $\bar{E}_{bh}$ 为太阳质量的量级 $M_\odot \sim 10^{38}$, l 为可观察宇宙的线度 $l_c \sim 10^{29}$ (此时相应的 $l_{\max} = 10^{116}$, $\eta = 10^{57} \gg 1$), 则有

$$T_{\max} \sim 10^{-6}.$$

化为国际单位制, $T_{\max} \sim 10^{27}\text{K}$, 相应的能标为 10^{14}GeV , 已接近大统一理论所要求的能量.

参 考 文 献

- [1] Л. Д. 朗道, 《统计物理学》1964年版, 21页.
- [2] S. M. Christensen and S. A. Fulling, *Phys. Rev. D*, **15** (1977), 2088.
- [3] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **13** (1976), 191.

THE FLUCTUATION OF BLACK HOLE'S ENERGY AND THE UPPER BOUND TO THE TEMPERATURE OF THE RADIATION IN THE VICINITY OF BLACK HOLE

Zhou Ming-yao Chen Liang-fang

(Department of Physics, Shanghai Normal College)

ABSTRACT

The distribution function of the temperature in the case of static 1+1 dimensions have been obtained by using canonical method of quantum field in curved space-time. We then estimate the upper bound to the temperature of the radiation in 1 + 1 dimensional Schwarzschild space-time by calculating the fluctuation of black hole's energy.