

在地球引力场中进行广义相对论 第四类实验的可能性

张 元 仲

(中国科学院理论物理研究所)

1982 年 3 月 11 日收到

提 要

本文用广义相对论计算了引力场对干涉仪的影响。结果表明,如果象通常那样把物理长度定义为固有长度,那么当把干涉仪转动 90° 时条纹移动为 2.2×10^{-10} (其中取干涉仪臂长 1 m, 光波波长为 $1 \mu\text{m}$)。

广义相对论的第四类实验是所谓的雷达回波实验^[1]。这里我们将讨论的是在实验室中用干涉仪测量地球引力场的可能的效应。如图 1 所示,将干涉仪的一个臂(AC)沿地球径向放置,另一个臂(AB)沿水平放置¹⁾。应当强调的是,在实际中我们不可能知道坐标直线 AB,只能知道光线从 A 点到 B 点的轨迹 S。干涉仪的横向臂与光线轨道 S 重合。考虑到宏观相互作用是以电磁作用为主这个事实,上面的假设是合理的。因此所谓两臂互相垂直是指沿径向的光线(AC)与横向光线 S 在 A 点以直角相交。

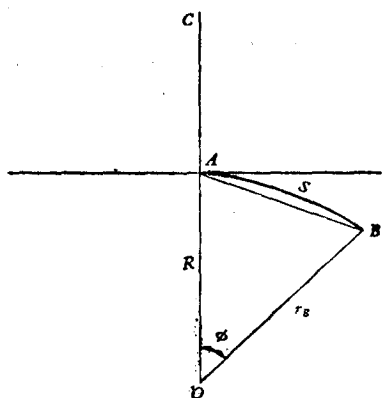


图 1 干涉仪实验

现在我们用广义相对论计算干涉仪在图 1 的平面内转动 90° 后的条纹移动。这种实验在原理上与雷达回波相同。

干涉条纹的位置由固有时间间隔的差值, $\Delta\tau = \Delta\tau_{ABA} - \Delta\tau_{ACA}$ 决定, 其中 $\Delta\tau_{ACA}$ 是光线从 A 点到 C 点再回到 A 点所用的固有时间隔, $\Delta\tau_{ABA}$ 是光线从 A 点到 B 点再返回 A 点所用的固有时间隔。下面我们在标准坐标中进行计算。地球引力场可近似用球对称静态的 Schwarzschild 度规描写。线元为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

取 $\theta = \pi/2$, 即光线在图 1 的平面内传播。在径向方向, 光线沿地球半径方向传播, 在其他方向, 光线的运动可由短程线方程和 $ds^2 = 0$ 解出

1) 以往曾有一些人建议用干涉仪测量地球的引力效应。但是并没有人用广义相对论进行过计算。

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \phi + \frac{m}{r_0^2} (2 - \cos \phi - \cos^2 \phi), \quad (2)$$

其中 r_0 是光线到地心的最短距离。对于图 1 所示的情况 r_0 就是地球的半径 R 。方程 (2) 只取到 m/r 的一阶项, 以下的计算都取 m/r 的一阶近似。由 $ds^2 = 0$, 利用方程 (1) 和光线传播的方程 (2) [光线从 A 到 C 沿半径方向传播] 可以算出光线在 A 和 C 以及 A 和 B 之间的传播时间(坐标时间隔)

$$\Delta t_{ACA} = 2 \int_R^{R+\Delta r} \frac{r dr}{r - 2m} = 2 \left(\Delta r + 2m \ln \frac{R + \Delta r}{R} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_{ABA} &= 2 \int_A^B \left\{ \left(1 + \frac{4m}{r} \right) dr^2 + r^2 \left(1 + \frac{2m}{r} \right) d\phi^2 \right\}^{1/2} \\ &= 2 \left[\sqrt{r_B^2 - R^2} + m \sqrt{\frac{r_B - R}{r_B + R}} + 2m \ln \frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - R^2}}{R} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

光线的弯曲效应不影响上述积分(到 m/r 的一阶近似)。事实上, 方程 (4) 中的积分沿直线 AB 和沿光线 S 进行所得结果是一样的^[2]。为了由方程 (3) 和 (4) 计算出两条光线重新会合后的时间差, 需要定义物理长度。在广义相对论中, 通常把物理长度定义为固有长度,

$$dl^2 = \left(-g_{ij} + \frac{1}{g_{00}} g_{i0} g_{j0} \right) dx^i dx^j. \quad (5)$$

正如文献 [2] 中证明的, 对于长度的积分光线的弯曲也只是 m/r 的二阶效应。因此在一阶近似下积分 (5) 式沿光线 S 与沿直线 AB 结果一样。由 (5) 式, 积分而得两臂的长度为

$$l_{AC} = \int_A^C dl = \Delta r + m \ln \frac{R + \Delta r}{R}, \quad (6)$$

$$l_{AB} = \int_A^B dl = \sqrt{r_B^2 - R^2} + m \sqrt{\frac{r_B - R}{r_B + R}} + m \ln \frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - R^2}}{R}. \quad (7)$$

将方程 (6) 和 (7) 代入 (3) 和 (4) 式, 并令 $l_{AB} = l_{AC} = l$, 即两臂长度相等, 考虑到干涉仪臂长 l 与地球半径 R 相比很小, 我们按 l/R 展开, 保留 l/R 的二阶项, 得到

$$\Delta t_{ACA} = 2 \left[l + m \ln \left(1 + \frac{l}{R} \right) \right] \simeq 2 \left[l + m \left(\frac{l}{R} - \frac{1}{2} \frac{l^2}{R^2} \right) \right], \quad (8)$$

$$\Delta t_{ABA} = 2 \left[l + m \ln \left(1 + \frac{l}{R} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{R^2} \right) \right] = 2 \left[l + m \left(\frac{l}{R} \right) \right]. \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式可得到两束光在 A 点重新会合的时间差为

$$\Delta \tau = \sqrt{g_{00}} (\Delta t_{ABA} - \Delta t_{ACA}) = m \frac{l^2}{R^2}. \quad (10)$$

方程 (10) 表明, 当把干涉仪转动 90° 时干涉条纹的移动量为

$$n = \frac{2ml^2}{\lambda R^2} = \frac{2GMl^2}{c^2 \lambda R^2}, \quad (11)$$

其中 G 为引力常数, λ 为光波的波长, M 是地球的质量。如果取干涉仪臂长 $l = 1\text{m}$, 光波

波长 $\lambda = 1\mu\text{m}$, 那么 (11) 式给出的条纹移动为 $n = 2.2 \times 10^{-10}$. 这样小的移动在现有的技术条件下是难于观察出来的.

参 考 文 献

- [1] I. I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 789.
- [2] 张元仲、邹振隆, 物理, **10**(1981), 527.

ON THE POSSIBILITY FOR A FOURTH TEST OF GENERAL RELATIVITY IN EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD

Zhang Yuan-zhong

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this work, the effect of Earth's gravitational field on a interferometer is calculated in general relativity. The result is that an expected fringe shift, about 10^{-10} , will occur when the interferometer is rotated through 90° if the length of arms are 1 meter and wavelength of light is $1\mu\text{m}$.