

离子温度梯度不稳定性的解析理论

郭世宠 沈解伍

(中国科学院物理研究所)

陈 骝

(美国普林斯敦大学等离子体物理实验室)

蔡诗东

(中国科学院物理研究所)

1981年4月25日收到

提 要

本文用解析方法分别研究了在平板和环形模型中离子温度梯度不稳定性的阈值和等离子体温度参数的关系。发现当离子温度远大于电子温度时,阈值会有明显的升高;而且在两种几何模型中阈值随离子温度变化的趋势是相同的,这一结论与 PLT 的实验结果是符合的。解析结果与数值计算结果也符合得很好。

一、引 言

在 PLT 托卡马克实验中曾发现^[1],用高功率中性粒子注入方式加热等离子体时,如果离子温度 T_i 高于某一值(例如 $T_i > 4\text{keV}$),就有较大的低频等离子体密度涨落信号出现,人们认为这种信号很可能是离子温度梯度驱动的漂移不稳定性所致。然而,在 PLT 最近的实验中却发现^[2],当离子温度继续升高到大约 $T_i > 7\text{keV}$ 时,这种涨落信号反而消失了。这表明,如果密度涨落的确是由离子温度梯度不稳定性引起,(以下我们把这种不稳定性简称为“ η_i 模”, $\eta_i = \frac{d \ln T_i}{d \ln n}$ 是标志离子温度梯度的特征量)那么这种 η_i 模的不稳定性的阈值可能与离子的温度有密切的关系。这方面的问题以前已用数值计算做过研究^[3]。本文的目的是用解析的方法求出 η_i 模临界稳定的阈值 η_{ic} ,并研究它与等离子体参数 τ ($\tau = T_e/T_i$, T_e 为电子温度), b_i/τ (它表示离子的拉摩半径与角向的波长之比的平方)的关系。

在离子温度梯度不稳定性中,离子的 Kinetic 效应起了很重要的作用,这种效应决定了它的阈值。本文从动力论方程出发,把离子朗道阻尼效应做为无碰撞的耗散机制。解析和数值计算的两种结果都表明,当离子温度远大于电子温度时, η_i 模不稳定性的阈值会有明显的升高。在环形中阈值 η_{ic} 与 τ 的关系和平板中有类似的趋势。这一结果使我们可以对 PLT 的实验现象作出定性的解释。同时,我们对 η_i 模所作的“强气球模”近似的描述^[3],也与实验观察相符合^[2]。

二、平板模型

1. 本征方程

在平板模型中假设等离子体密度和温度的不均匀性只在 x 方向, 平衡状态的磁场表示为 $\vec{B} = B_0 \left(\vec{e}_x + \frac{x}{L_x} \vec{e}_y \right)$, 其中 B_0 为常数, 每一个扰动量可以表示为

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi}(x) e^{iK_y y - i\omega t}.$$

在推导 η_i 模的本征方程时应用了标准的 gyrokinetic 方程的方法^[4]. 此外, 在平板模型中忽略了磁场梯度引起的漂移; 在推导离子密度的扰动量时假设了 $K_\perp^2 \rho_i^2 \ll 1$, 即离子的拉摩半径远小于 η_i 模在垂直于磁场方向的波长; 又因为 η_i 模是与离子的漂移波有关的不稳定性, 电子的非绝热效应对它的贡献是很小的, 所以认为电子密度的扰动满足玻耳兹曼分布; 最后利用准中性条件, 得出了如下的方程:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + Q(t, Q) \right] \phi(t) = 0, \quad (2.1)$$

其中

$$Q = -b_i + \tau \frac{\tau + 1 + \left(\tau + \frac{1}{Q} - \frac{\eta_i}{2Q} \right) Z_i \xi_i + \left(\frac{\eta_i}{Q} \right) \xi_i^2 (1 + Z_i \xi_i)}{\left(\tau + \frac{1}{Q} + \frac{\eta_i}{2Q} \right) Z_i \xi_i + \frac{\eta_i}{Q} \xi_i^2 (1 + Z_i \xi_i)},$$

$$t \equiv x/\rho_i, \quad \rho_i^2 \equiv \frac{1}{2} \rho_i^2, \quad \tau \equiv \frac{T_e}{T_i}, \quad b_i \equiv K_y^2 \rho_i^2,$$

$$Q \equiv \frac{\omega}{\omega_{*e}}, \quad \xi_i \equiv \frac{-t_i}{|t|}, \quad t_i \equiv -Q \left(\frac{\tau}{2} \right)^{1/2} \frac{L_s}{L_n}, \quad \omega_{*e} = \frac{K_y V_{Te}}{2L_n Q_{ce}}.$$

式中 ρ 为带电粒子的拉摩半径, T 表示温度, V_T 为热速度, Z 为等离子体色散函数, L_n 为等离子体密度梯度的特征长度, L_s 为剪切磁场的特征长度, Q_e 表示带电粒子的拉摩频率, K 是波矢, ω 是 η_i 模的频率, 下标 i, e 分别代表离子和电子.

2. 流体近似下的结果

首先叙述流体近似条件 $\left(\left| \frac{\omega}{K_y V_{Ti}} \right|^2 \gg 1 \right)$ 下, 求解本征方程的结果, 以便从物理上判断引入 Kinetic 效应后的情形.

在流体近似下, 本征方程(2.1)式可简化为

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + Q_0 - \frac{L_n^2 (A - 1)}{L_s^2 Q^2} t^2 \right] \phi(t) = 0. \quad (2.2)$$

这里

$$Q_0 \equiv -b_i + \frac{\tau(1 - Q)}{Q\tau + 1 + \eta_i}, \quad (2.3)$$

$$A \equiv \frac{(1 - Q)(Q\tau + 1 + 2\eta_i)}{(Q\tau + 1 + \eta_i)^2}. \quad (2.4)$$

这是标准的 Weber 方程, 由该方程的本征值条件可以给出色散关系

$$-\mathcal{Q} \left[\frac{\tau(1-\mathcal{Q})}{\mathcal{Q}\tau + 1 + \eta_i} - b_i \right] = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{L_n}{L_s} (A-1)^{1/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

注意式中 $b_i \sim \frac{L_n}{L_s} \ll 1$.

1) 当 $\tau \gg b_i$ 时, 我们得出一般流体理论下的结果^[5]

$$\mathcal{Q} \simeq i \frac{L_n}{L_s \tau} (1 + \eta_i)(1 - A)^{1/2}. \quad (2.6)$$

这是一支不稳定的根, 且 $|\mathcal{Q}| \ll 1$.

2) 当 $\tau < 2b_i$ 时, 有一个临界稳定的根, 且 $|\mathcal{Q}| \gg 1$. 可以近似求得

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1, \quad (2.7)$$

其中

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{-b_i(1 + \eta_i)}{\tau(1 + b_i)}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{1 + b_i} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{L_n}{L_s \tau} \frac{(\mathcal{Q}_0 \tau + 1 + \eta_i)(A-1)^{1/2}}{\left(\mathcal{Q}_0 + \frac{1}{1 + b_i} \right) (1 + b_i)}. \quad (2.9)$$

以上两支解都在 $\eta_i \gg 1$ 时满足流体近似条件.

3. 不稳定性的阈值和相应的本征频率

以下分三种参数范围进行讨论

1) $\tau < 2b_i$

在这种参数范围内, η_i 模在流体近似下是临界稳定的, 它的增长和阻尼完全由离子的 Kinetic 效应决定, 以下我们考虑这一效应, 以便进一步考查 η_i 模的性质. 将函数 $\mathcal{Q}$ 中的等离子体色散函数做大宗量展开, 并保留其虚部, 得到

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_r + i\mathcal{Q}_i, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{Q}_r \simeq \mathcal{Q}_0 + \frac{\tau}{2\xi_i^2} (1 - A); \quad \mathcal{Q}_i \simeq \tau \frac{(a-b)c}{b^2} \sqrt{\pi} \xi_i^3 e^{-\xi_i^2},$$

其中

$$a = 1 - \frac{1}{\mathcal{Q}}, \quad b = -\left(\tau + \frac{1}{\mathcal{Q}} + \frac{\eta_i}{\mathcal{Q}} \right), \quad c = -\frac{\eta_i}{\mathcal{Q}},$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_r + i\mathcal{Q}_i, \quad \text{而且 } |\mathcal{Q}_i| \ll |\mathcal{Q}_r|.$$

可以看出 $|\mathcal{Q}_i| \ll |\mathcal{Q}_r|$, $\mathcal{Q}_r$ 正是流体近似下函数 $\mathcal{Q}$ 的形式. 由于 Kinetic 效应在这时是相当弱的, 所以我们用微扰法处理; 将流体近似下的结果做为零级近似解, 将 $\mathcal{Q}_i$ 看做一级微扰, 可以求出本征值的虚部 $i\mathcal{Q}_i$. 发现当 $(a-b) < 0$ 时, $\mathcal{Q}_i > 0$; 而当 $(a-b) > 0$ 时, $\mathcal{Q}_i < 0$; 使 $\mathcal{Q}_i = 0$ 的条件只有 $(a-b) = 0$, 由此得出

$$\eta_{ic} = -\mathcal{Q}(1 + \tau). \quad (2.11)$$

若令

$$\eta_{ic} = \eta_0 + \eta_1, \quad (2.12)$$

而

$$\eta_0 = -\Omega_0(1+\tau); \quad \eta_1 = -\Omega_1(1+\tau). \quad (2.13)$$

联立(2.8)式和(2.13)式得出

$$\Omega_0 = \frac{-b_s}{\tau - b_s}; \quad \eta_0 = \frac{b_s}{\tau - b_s}(1+\tau). \quad (2.14)$$

再由(2.12)和(2.13)式可以求出 $\eta_{ic}(b_s, \tau)$ 和相应的 $\Omega(b_s, \tau)$ 的解析表达式. 图 1 和图 2 中分别用曲线 A 表示 η_{ic} 和 Ω 与 τ 的关系. 很明显, 当 τ 接近于 b_s 时, $\eta_{ic} \rightarrow \infty$. 这表明当离子温度上升时, η_i 模有稳定化的趋势.

$$2) \quad \tau \gg b_s \left(b_s \sim \frac{L_n}{L_s} \right)$$

这时 η_i 模在流体近似下几乎是纯增长的, 只有离子的朗道阻尼效应才能起稳定性作用. 很明显, 临界稳定的状态已经不能再用流体近似的理论来描述, 而应该考虑

$$\left| \frac{\omega}{K_{\parallel} T_i} \right| \lesssim 1$$

的情形.

下面用 W. K. B. 近似方法计算 η_{ic} 和相应的 Ω . 首先由流体近似条件推测在临界稳定时的 η_{ic} 和 Ω 的量级应该是 $\eta_{ic} \sim O(1)$, $|\Omega\tau| \sim O\left(\frac{L_n}{L_s}\right) \ll 1$, 由于 η_i 模是属于离子漂移模的分支, 所以我们知道 Ω 是负的(数值计算也证明了这一点).

将函数 $Q(t, \Omega)$ 解析开拓到 z 的复平面, 由于函数 Q 的对称性只考虑右半平面. 令 $z = -1/\xi_i = t/t_i$, 且 $\text{Re}z \geq 0$. 将 $Q(t, \Omega)$ 在两种极限情况下分别展开: 当 $|z| \ll 1$ 时,

$$Q = Q_0. \quad (2.15)$$

当 $|z| \gg 1$ 时

$$Q \simeq \frac{a_1}{a_0} + i[a_2 - \tau(\tau+1)z^2]/a_0z, \quad (2.16)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= -\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{Q} + \frac{\eta_i}{2Q} + \tau \right); \quad a_1 = -\sqrt{\pi} \left[(\tau - b_s) \left(\tau + \frac{1}{Q} \right) - (\tau + b_s) \frac{\eta_i}{2Q} \right]; \\ a_2 &= 2 \left(\tau + \frac{1}{Q} - \frac{\eta_i}{Q} \right) \tau. \end{aligned} \quad (2.17)$$

由于在临界稳定状态下流体近似不再成立, 而离子朗道阻尼效应是很重要的, 因而转折点 $\pm z_0$ 应该在离子朗道阻尼效应很强的区域, 即 $|z_0| \gg 1$, 所以我们可以从(2.16)式求出转折点的位置, 而由数值计算(W. K. B. 方法)的结果知道在临界稳定的情况中转折点总是很靠近实轴, 也就是 $|z_{0r}|^2 \gg |z_{0i}|^2$ (下标 r, i 分别表示实部和虚部), 因而我们假设 $4\tau(\tau+1)a_2 \gg a_1^2$, 从而得到

$$z_{0r} \simeq \frac{a_2^{1/2}}{\tau^{1/2}(\tau+1)^{1/2}}; \quad z_{0i} = \frac{-a_1}{2\tau(\tau+1)}. \quad (2.18)$$

再令 $s = z/z_0$, 在 W. K. B. 方法中量子化条件为

$$2t_i z_0 \int_0^1 Q^{1/2}(Q, s) ds = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (2.19)$$

我们注意到对应于(2.19)式的 subdominat 区域正是实轴所在的区域,从而由该式所决定的本征值是符合物理条件的.

在计算(2.19)式的积分时必须知道 $Q(\Omega, s)$ 在整个积分区间中的函数表达式,在这里我们根据数值计算所提供的情况将两种极限情况下的 Q 函数((2.15)式和(2.16)式)用以下简单的线性关系衔接起来

$$Q = \begin{cases} Q_0 & \text{当 } 0 \leq s < s_0 = \frac{1}{|z_0|} \text{ 时,} \\ Q_R + iQ_i & \text{当 } s_0 \leq s \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$Q_R = \frac{Q_0}{(1-s_0)}(1-s); \quad Q_i = \frac{a_2}{a_0 z_{0r}} \frac{(1-s^2)}{s}. \quad (2.20)$$

由(2.19)式实部得出

$$Q = Q_0 / \left(1 + \frac{s_0}{2}\right)^2, \quad (2.21)$$

$$Q_0 = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \frac{9}{8} \left(\frac{L_n}{L_s}\right)^2 \frac{(\tau+1)(1+\eta_i)}{\tau\eta_i[\tau - b_s(1+\eta_i)]}. \quad (2.22)$$

由(2.18)和(2.21)式得

$$s_0 = \frac{1}{2\left(1 + \frac{3}{4}\alpha\right)} \left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\left(1 + \frac{3}{4}\alpha\right)} \right],$$

$$\alpha = \frac{Q_0(\tau+1)}{\eta_i}. \quad (2.23)$$

由(2.19)式虚部得出

$$\eta_{ic} = \eta_0 + \eta_1, \quad (2.24)$$

其中

$$\eta_0 = \frac{2(\tau - b_s)}{\tau + b_s};$$

$$\eta_1 = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2 Q \tau (\tau+1)}{Q_0 \left(1 + \frac{s_0}{2}\right) (\tau + b_s)} \left\{ \frac{2}{3} (1-s_0)^2 - 2(1-s_0) - (1-s_0)^{1/2} \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{(1-s_0)^{1/2} - 1}{(1-s_0)^{1/2} + 1} \right| \right\} + \eta_0 Q \tau.$$

以上关于 η_{ic} 和 Q 的结果已分别在图 1 和图 2 中用曲线 B 表示出来,可以看出在 $\tau \gg b_s, L_n/L_s$ 情况下,随着 τ 的变化 η_{ic} 和 Q 的改变是比较平缓的.

3) $\tau \simeq 2b_s$

这种情形相应于转折点 z_0 的绝对值在 1 附近,也就是 $|\omega/K_{\parallel} V_{Ti}| \sim 1$ 的情况.对于这样的极限情况,上述 1), 2) 两节中的方法已经不适用了.为了考查 $\tau \sim 2b_s$ 参数范围内 η_i 模的性质,我们只能利用某些已知条件,近似地做此估算.

由数值计算结果我们已经知道转折点在临界稳定时仍很接近于实轴,所以我们假设 $z_0 \simeq 1$, 等离子体色散函数为 $z_i(-1, 0) = Z_R + iZ_I$, 其中 $Z_R \approx 1$. 由于在转折点处 $Q(\Omega, s)$ 的实部、虚部分别为零,而且已经知道 $|Q\tau| \ll 1$, 从而由 $Q_i|_{s=-1} = 0$ 得到

$$\eta_{ic} \simeq \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2} Q(\tau+1) + \sqrt{\frac{9}{4} Q^2(\tau+1)^2 - 4Q(\tau+1)} \right]. \quad (2.25)$$

由 $Q_r|_{\xi_i=-1} = 0$ 得到

$$\frac{\tau}{b_s} \simeq \frac{\left(1 + \frac{\eta_i}{2}\right)^2 + Z_i \left(1 + \frac{3}{2} \eta_i\right)^2}{Z_i^2 \left(1 + \frac{\eta_i}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2} \eta_i\right) - \left(Q - 1 + \frac{\eta_i}{2}\right) \left(1 + \frac{\eta_i}{2}\right)}. \quad (2.26)$$

由 W. K. B. 量子化条件得到

$$\begin{aligned} Q^3 - Q^2 \left[1 - \frac{b_s}{\tau} (1 + \eta_i) \right] &= -h(1 + \eta_i), \\ h &= \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \frac{L_n^2}{2L_s^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

由数值计算的结果以及对上三式的分析, 我们假设 $|Q+1| \ll 1$, 联立 (2.25)–(2.27)

三式做微扰计算, 得: $b_s = 0.2$ 时, $Q_0 \simeq -0.7$, $\eta_0 \simeq 1.5$, $\frac{\tau}{b_s} \simeq 1.9$. 对于转折点 z_0 在 1 附近的情况, 令 $z_0 = 1 + \Delta$, 在 $z_0 = 1$ 附近做微扰, 可以得出 η_{ic} 和 Q 在该点附近随 τ 变化的曲线斜率. 这一结果分别在图 1 和图 2 中用直线 C 表示.

三、环 形

1. 本征方程

在环形几何模型中我们取坐标 (r, θ, ζ) 表示, 其中 r 为小环半径, θ 为极向角度, ζ 为环向的角度. 假设环形等离子体平衡磁面的小截面是一系列同心圆, 在其中磁场表示为

$$\tilde{B} = B(\underline{e}_\zeta + \varepsilon/q\underline{e}_\theta), \quad B = B_0(1 - \varepsilon \cos \theta),$$

式中 $q = rB_T/RB_p$ 是安全因子; $\varepsilon = r/R_0 \ll 1$; R_0 为大环半径, 等离子体中每一个扰动量 ϕ 都可以表示为

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \zeta, t) &= \tilde{\phi}(r, \theta) \exp[i(m_0\theta - n\zeta - \omega t)], \\ \tilde{\phi}(r, \theta) &= \sum_j \hat{\phi}(j, r) \exp(ij\theta). \end{aligned}$$

用上述坐标表示的环形等离子体中 η_i 模的本征方程已有人作过推导^[5], 我们将在 (3.1) 式中直接给出. 其推导的过程和平板情形类似, 从 gyrokinetic 方程出发, 环效应体现在由于环形磁场曲率和磁场梯度引起的漂移项中. 此外, 还要用气球模近似的方法将二维的问题(在零级近似下)简化为一维问题处理, 再利用所谓 “Taylor 强耦合近似” 将一维微分-差分方程简化为微分方程

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + Q_T(Q, t) \right] \phi(t) &= 0, \\ Q_T &= \frac{L_1 - L_2}{\frac{1}{1 - \hat{s}} - \frac{2}{b_s \hat{s}^2} L_2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中

$$\begin{aligned}
 L_1 &\equiv G\tau - b_s, \quad L_2 \equiv \frac{2\epsilon_n}{Q} \xi_i^2 G_2, \\
 G &\equiv \left(1 + \frac{1}{\tau} + N_1 D_1 + N_2 D_2\right) / A_1, \\
 N_1 &\equiv 1 + \frac{1}{Q\tau} - \frac{3\eta_i}{2Q\tau}, \quad N_2 \equiv \frac{\eta_i}{Q\tau}, \\
 D_1 &\equiv \xi_i Z_i, \quad D_2 \equiv \xi_i^2 (1 + \xi_i Z_i) + \xi_i Z_i, \\
 A_1 &\equiv N_1 D_1 + N_2 (D_1 + D_2), \quad B_1 \equiv N_1 D_5 + N_2 D_6, \\
 G_2 &\equiv \frac{1}{A_1} \left\{ \left(\frac{B_1}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) + N_1 D_3 + N_2 D_4 \right) \right\}, \\
 D_3 &\equiv B_1 D_1 / A_1 - D_1 + 2\xi_i^2 (1 + D_1), \\
 D_4 &\equiv \left(\frac{B_1}{A_1} D_2 \right) - D_2 + \xi_i^2 [1 + 2\xi_i^2 (1 + D_1)], \\
 D_5 &\equiv -1 - 2\xi_i^2 (1 + \xi_i Z_i), \\
 D_6 &\equiv -\frac{5}{2} - \xi_i^2 (3 + 2D_1) - 2\xi_i^4 (1 + D_1), \\
 b_s &\equiv K_\theta^2 \rho_i^2, \quad \rho_i^2 \equiv \frac{1}{2} \rho_i^2 \tau, \quad \tau \equiv \frac{T_e}{T_i}, \quad Q \equiv \frac{\omega}{\omega_{*e}}, \quad \epsilon_n \equiv \frac{r_n}{R}, \\
 \xi_i &\equiv \frac{-t_i}{|t|}, \quad t_i \equiv -\frac{q}{\epsilon_n \hat{S}} Q \left(\frac{\tau}{2} \right)^{1/2}, \quad t \equiv \frac{Z \Delta r_s}{\rho_i}, \quad Z \equiv S - j, \\
 S &\equiv (r - r_0) / \Delta r_s, \quad \Delta r_s \equiv \frac{1}{K_\theta \hat{S}}, \quad \hat{S} \equiv r_0 q' / q, \quad m_0 \equiv nq(r_0), \\
 \omega_{*e} &\equiv \frac{K_\theta V_{Te}^2}{2r_n Q_{ce}}.
 \end{aligned}$$

r_n 为等离子体密度在径向不均匀的特征长度, L_1 为平板模型中的 Q , 其他符号与平板中相同不再重复说明.

2. 零级近似下的本征值

由于环形问题比较复杂, 我们需要较多地依赖数字计算提供的信息.

由环形 W. K. B. 方法数值计算的结果, 发现在所有平板中我们感兴趣的参数范围内都存在一支解, 它的转折点都在 $|z_0| < 1$ 的区域内, 即 $|\omega / K_\parallel V_{Ti}| > 1$ 的范围. 而我们知道在这个区域中离子 Kinetic 效应是较弱的, 所以我们可以仿照在平板中 $\tau < 2b_s$ 范围所用的办法来处理, 将流体近似下的结果作为零级近似解, 把离子 Kinetic 效应当作一级微扰.

将 $Q(t, Q)$ 作大宗量展开, 最终保留到 $1/\xi_i^2$ 的项, 得

$$L_1 = Q_0 + \frac{\tau}{2\xi_i^2} (1 - A), \quad L_2 = \frac{2\epsilon_n}{Q} \left\{ 1 - \frac{3}{2} A + \frac{1}{2\xi_i^2} B \right\},$$

其中

$$A = \frac{(1 - Q)(Q\tau + 1 + 2\eta_i)}{(Q\tau + 1 + \eta_i)^2},$$

$$B = 3 \frac{1-Q}{Q\tau+1+\eta_i} \frac{(Q\tau+1+2\eta_i)^2}{(Q\tau+1+\eta_i)^2} - \frac{15}{2} \frac{(Q\tau+1+\eta_i)(1-Q)}{(Q\tau+1+\eta_i)^2} \\ + \frac{7}{2} \frac{Q\tau+1+2\eta_i}{Q\tau+1+\eta_i}, \\ Q_0 = \frac{(1-Q)\tau}{Q\tau+1+\eta_i} - b_s.$$

本征方程可改写为

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{Q_0 - \Delta}{1 + C\Delta} - \frac{\tau}{2\xi_i^2} D \right] \phi(t) = 0. \quad (3.2)$$

这里

$$\Delta \equiv \frac{2\varepsilon_n}{Q} \left(1 - \frac{3}{2} A \right), \quad C \equiv \frac{\xi - \frac{1}{2}}{b_s \xi^2}, \\ D \equiv - \frac{(1-A) - \frac{2\varepsilon_n}{Q\tau} B}{1 + C\Delta} + \frac{(Q_0 - \Delta)CB \frac{2\varepsilon_n}{Q\tau}}{(1 + C\Delta)^2}.$$

由(3.2)式得到色散关系为

$$-Q(Q_0 - \Delta) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\xi}{q} \varepsilon_n D^{1/2} (1 + C\Delta). \quad (3.3)$$

以下我们由(3.3)式出发分三种情况求 Q 的近似值.

1) $\tau < 2b_s$,

这种情况下我们知道对应于 $|Q| \gg 1, \eta_i \gg 1$, 并且 $Q\tau \sim O(1)$ 的情形. 由于 $2\varepsilon_n/Q \ll 1$, 意味着环效应的修正是不重要的, 由(3.3)式求出.

$$Q = Q_0 + Q_1, \quad (3.4)$$

$$Q_0 = - \frac{b_s(1+\tau)}{\tau(1+b_s)}, \quad (3.5)$$

$$Q_1 = \frac{1}{1+b_s} + \frac{(Q_0\tau+1+\eta_i)}{\left(Q_0 + \frac{1}{1+b_s} \right) (1+b_s)\tau} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\varepsilon_n \xi}{q} (A-1)^{1/2} (1+C\Delta) \right. \\ \left. + 2\varepsilon_n \left(1 - \frac{3}{2} A \right) \right\}. \quad (3.6)$$

可以看出, 在零级近似下它与平板模型中的结果相同, 环效应的修正只高阶项 Q_1 中.

2) $\tau \gg 2b_s$,

由数值计算结果我们知道这时相应于 $|Q| \ll 1, \eta_i \sim O(1), |Q\tau+1| \ll 1$ 的情况, 由于 $2\varepsilon_n/Q \sim O(1)$, 所以环效应的修正在这里变得很重要, 环效应的修正项和平板的项同量级. 我们由(3.3)式解得

$$Q_0 = \frac{2\varepsilon_n(\eta_i-3)}{\tau - b_s\eta_i}, \quad (3.7)$$

$$Q_1 = - \frac{\eta_i \varepsilon_n}{2(\tau - b_s\eta_i)} \left\{ \frac{\xi}{q} D^{1/2} (1 + C\Delta) \right\}. \quad (3.8)$$

这仍然是一支临界稳定的解。可见, 由于环效应的影响, 使得在平板模型中仅在 $\tau < 2b_s$ 时才出现的临界稳定的解, 伸延到 $\tau \gg 2b_s$ 的范围。

3) $\tau \gtrsim 2b_s$,

这是介于 1)、2) 之间的情况, 我们知道它相应于 $|\mathcal{Q}| \sim 1$, $|\mathcal{Q}\tau + 1| \ll 1$ 的情形, 由(3.4)式解得

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{b_s \eta_i}{\tau} - \frac{6\varepsilon_n}{\tau} \right) + \left[\left(\frac{b_s \eta_i}{\tau} - 1 + \frac{6\varepsilon_n}{\tau} \right)^2 + 4 \left(\frac{2\varepsilon_n}{\tau} - \frac{2\varepsilon_n \eta_i}{\tau} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{Q}_1 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\delta}{q} \varepsilon_n D^{1/2} (1 + C\Delta) \frac{\eta_i}{\tau} / \left[\frac{b_s \eta_i}{\tau} - 1 + \frac{6\varepsilon_n}{\tau} + 2\mathcal{Q}_0 \right]. \quad (3.10)$$

3. η_{ic} 的计算

进一步考虑离子的 Kinetic 效应, 将等离子体色散函数 Z_i 作大宗量展开, 保留虚部:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_T = \mathcal{Q}_r + i\mathcal{Q}_i &= \frac{\text{Re } L_1 - \text{Re } L_2}{1 + C \text{Re } L_1} - i \frac{C \text{Re } L_1 + 1}{(1 + C \text{Re } L_1)^2} \frac{2\varepsilon_n}{\mathcal{Q}} \frac{1}{(\text{Re } A)^2} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\tau} + \frac{\eta_i}{\mathcal{Q}\tau} \right) \left(\frac{-2\eta_i}{\mathcal{Q}\tau} \right) \sqrt{\pi} \xi_i^{-7} e^{-\xi_i^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

这里我们只保留虚部中最大的项, 它是由表征环效应的项 L_2 中得出的, 用微扰论可以得到: 使 $\mathcal{Q}_i = 0$ 的条件为 $\left(1 + \frac{1}{\tau} + \frac{\eta_i}{\mathcal{Q}\tau} \right) = 0$, 从而

$$\eta_{ic} = -\mathcal{Q}(1 + \tau). \quad (3.12)$$

将(3.12)式与(3.5), (3.7), (3.9)式联立可以得出 η_0 和 $\mathcal{Q}_0$ 作为等离子体参数 τ, b_s, ε 的函数的解析式。

1) $\tau < 2b_s$,

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{-b_s}{\tau - b_s}, \quad \eta_0 = \frac{b_s}{\tau - b_s} (1 + \tau).$$

2) $\tau \gg 2b_s$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \frac{1}{2b_s(1 + \tau)} \{ [-2\varepsilon_n(\tau + 1) - \tau] \\ &\quad + \sqrt{[\tau + 2\varepsilon_n(1 + \tau)]^2 - 24\varepsilon_n b_s(1 + \tau)} \}, \\ \eta_0 &= \frac{1}{2b_s} \{ \tau + 2\varepsilon_n(1 + \tau) \\ &\quad - \sqrt{[\tau + 2\varepsilon_n(1 + \tau)]^2 - 24\varepsilon_n b_s(1 + \tau)} \}. \end{aligned}$$

3) $\tau \gtrsim 2b_s$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \frac{1}{2 \left(b_s - \frac{\tau}{1 + \tau} \right)} \left\{ - \left(\frac{\tau}{1 + \tau} + 2\varepsilon_n - \frac{6\varepsilon_n}{1 + \tau} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{\tau}{1 + \tau} + 2\varepsilon_n - \frac{6\varepsilon_n}{1 + \tau} \right)^2 - 24 \frac{\varepsilon_n}{1 + \tau} \left(b_s - \frac{\tau}{1 + \tau} \right)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\eta_0 = -Q_0(1 + \tau).$$

与平板中类似,可以由(3.4),(3.12)式进一步求出 $\eta_{ic}(\tau, b_s)$ 和相应的 $Q(\tau, b_s)$. 以上结果分别在图 3 和图 4 中用曲线 T 表示出.

4. 流体近似下不稳定的解

当 $|Q| \ll 1$, $\eta_i \gg 1$, $|Q\tau| \ll 1$ 时,由(3.3)式可以得出另一支不稳定的解

$$Q \sim 2\varepsilon_n \left(1 - \frac{3}{2}A\right) + i \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hat{S}}{q} \varepsilon_n (-D)^{1/2} (1 + C\Delta) \frac{1 + \eta_i}{\tau - b_s(1 + \eta_i)},$$

它的量级为:

$$Q_r \sim O(\varepsilon_n); \quad Q_i \sim \frac{\varepsilon_n}{\tau} (1 + \eta_i).$$

这一支解对应于平板模型中流体近似下不稳定的一支,由解析估算和数值计算结果都可以表明它的阈值 η_{ic} 总是比我们在上一节中讨论的一支(即流体近似下临界稳定的一支)阈值要高,而我们所关心的是最低的阈值,所以对这一支不作详细讨论. 在图 3 中的点虚线表示的是关于这一支的数值计算的结果. (W. K. B. 方法)

四、数值计算的结果及其与解析结果的比较

我们用两种方法做了数值计算,一种是采用文献[6]中的办法,直接用数值方法去解本征方程,所得的结果用点划线表示. 另一种是把用 W. K. B. 的量子化条件求本征值的方法用数值计算去做,所得的结果用虚线表示分别画在图 1 至图 4 中.

在平板模型中我们采用的参数为 $b_s = 0.2$, $L_n/L_s = 0.1$, $\tau = 0.3-2.5$. 在环形中采用与平板时相应的参数 $b_s = 0.2$, $\varepsilon_n = 0.1$, $\hat{S} = q = 1$, $\tau = 0.3-2.5$. 分别画出了 $\eta_{ic}-\tau$ 和 $Q-\tau$ 的关系曲线.

解析结果采用同样的参数,分别用曲线 A, B, C (平板模型)和曲线 T (环形)表示.

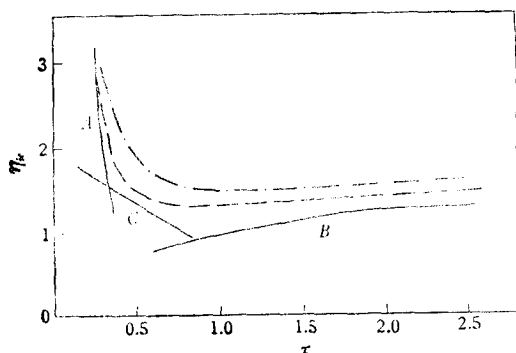


图 1 平板模型中 $\eta_{ic}-\tau$ 的关系曲线 实线为解析计算的结果; 虚线为 W. K. B. 方法的数值计算结果; 点划线为用数值计算方法解本征方程的结果
($b_s = 0.2$; $L_n/L_s = 0.1$)

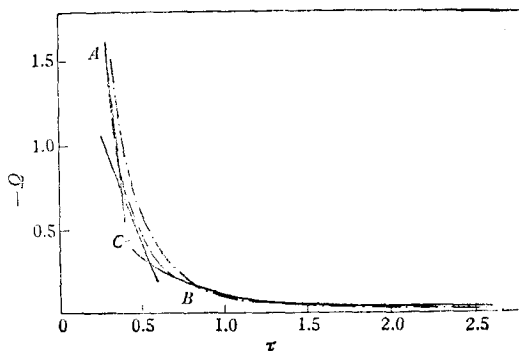


图 2 平板模型中 $Q-\tau$ 的关系曲线 各类曲线所代表的情况与图 1 相同
($b_s = 0.2$; $L_n/L_s = 0.1$)

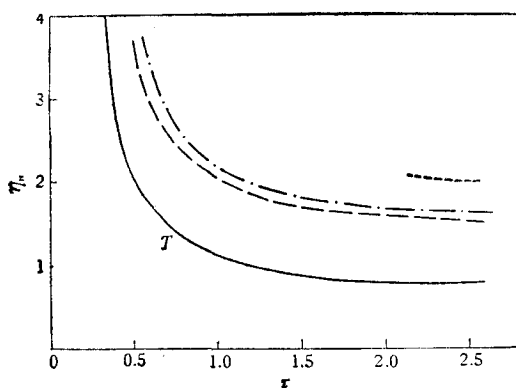


图3 环形几何模型中 $\eta_{ic}-\tau$ 的关系曲线 各类曲线所代表的情况与图1相同: 右上角点虚线表示的是在第三节4)中叙述的一支解, 它的阈值比较高 ($b_s = 0.2$; $\varepsilon_n = 0.1$)

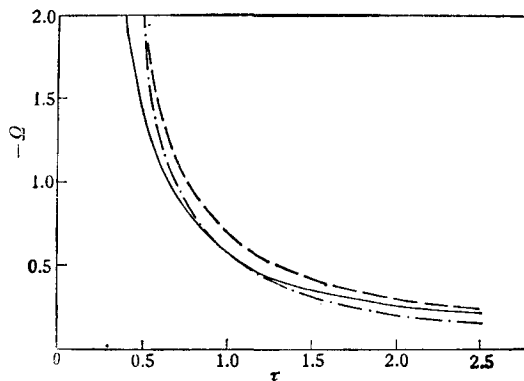


图4 环形几何模型中 $\Omega_i-\tau$ 的关系曲线 各类曲线所代表的情况与图1相同 ($b_s = 0.2$; $\varepsilon_n = 0.1$)

可以看出, 它和数值计算结果总的趋势是完全一致的, 而且在很多区域精确度是相当好的。

平板模型中, 曲线 A, B 在接近 $\tau = 0.4$ 时明显地变差了。这是很自然的, 因为这两种解析方法在转折点接近于 $|z_0| \sim 1$ 时都不再适用了。

其他差别稍大的区域, 可能的原因是由于我们对于 Q 函数的虚部 Q_i 的描述还只是零级近似的缘故。此外, 另一个可能是由于我们用一级微扰求解本征值时, 作为微扰的小量实际上仍不够小。尽管如此, 作为最低阶的近似, 它的结果已经反映了 η_i 模的定性的趋势, 而这正是我们最关心的物理内容。

五、总结和讨论

在本文中考查了 η_i 模的阈值 η_{ic} 与等离子体温度参数 τ 的关系。

1. 在平板模型中我们分别研究了不同参数范围内 η_i 模的阈值。

当 $\tau < 2b_s$ 时, η_i 模在流体近似条件下是临界稳定的 ($Q_i = 0$), 它的增长或阻尼完全是由离子的朗道效应所决定。我们已求出它的阈值是远大于1的, 而且当 τ 接近于 b_s 时, 阈值很快地上升。

在 $\tau \gg 2b_s$ 的参数范围内, η_i 模在流体近似下几乎有纯增长的不稳定性 ($Q = iQ_i$), 只有离子的朗道阻尼效应才能使它稳定化。它的阈值 $\eta_{ic} \sim O(1)$, 在 $\tau > 1$ 的范围内 η_{ic} 随温度的变化是平缓的。

2. 在环形等离子体中, 我们求出了阈值 η_{ic} 与 τ 的关系, 发现与平板时有类似的趋势。

在 $\tau < 2b_s$ 的范围内, 环效应的修正只是高级小量, 在零级近似下得到与平板中完全相同的结果。

在 $\tau \gg b_s$ 时, 环效应的修正是重要的, 尽管我们求出阈值 η_{ic} 的大小与平板中大致相同, 但物理机制是完全不同的, 在环形中我们求出的这一支是对应于流体近似下临界稳定的解, 它的阈值是由离子的 Kinetic 效应决定的。而对应于流体近似下不稳定的一支解

(类似于平板中 $\tau \gg 2b$ 的情况),我们发现它的阈值总是比上述的一支要高。

3. 在各种不同的参数范围内,解析计算与数值计算的结果的趋势都是完全一致的,特别是当 b_i 值不变, τ 值减小时, η_i 模的阈值很快地增高;也就是说,在有 η_i 模不稳定性存在的情况下,如果很快提高离子温度,而保持电子的温度几乎不变,使 η_i 值的生长赶不上阈值 η_{ic} 的迅速增高,则 η_i 模将会被稳定化。这一结果与前边叙述的 PLT 的实验结果^[2]是相符合的。

此外,在理论计算中曾发现,“强气球模”近似对于 η_i 模是一种很好的近似描述^[3],这与实验中观察到的涨落信号具有气球模的结构^[2]也是符合的。基于以上两点,可以认为我们的计算已定性地解释了 PLT 的实验。

有一点要指出的是:当 $\tau \simeq b_i$ 时,表示 $K_{\perp}^2 \rho_i^2 \simeq 1/2$ 。而且由数值计算也可以得出当 $\tau \simeq b_i$ 时, $K \times \rho_i \sim O(1)$ 。事实上,这已经推到本文的本征方程适用范围 $\left(\frac{K_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \ll 1\right)$ 的极限了,所以,严格地说, $\tau \simeq b_i$ 时微分形式的本征方程已不再适用,更精确的计算应该由积分本征方程给出。

感谢汪诗金、张淳沅同志对数值计算工作给予的帮助。

参 考 文 献

- [1] H. Eubank *et al.*, In “Proceeding of the 7th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research” Innsbruck, Austria, 1978 (IAEA, Vienna, Austria 1979) Vol. 1, p. 167.
- [2] W. Stodiek *et al.*, In “8th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research” IAEA-CN-38/A-1.
- [3] P. N. Guzdar, L. Chen, W. M. Tang and P. H. Rutherford, PPPL Report 1980, PPPL-1601.
- [4] W. M. Tang, *Nuclear Fusion*, 18(1978), 1 89.
- [5] B. Coppi, M. N. Rosenbluth and R. Z. Sagdeev, *Phys. Fluids*, 10(1967), 582.
- [6] T. Watanabe *et al.*, Institute for Fusion Theory, Hiroshima University Research Report, Hift-23 (1980).

ANALYTICAL THEORY OF ION-TEMPERATURE-GRADIENT INSTABILITY

GUO SHI-CHONG SHEN JIE-WU

(Institute of Physics, Academia Sinica)

CHEN LIU (L. CHEN)

(Plasma Physics Laboratory, Princeton University, Princeton, N. J. 08544 U. S. A.)

CAI SHI-DONG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The relations between the threshold values of ion-temperature-gradient instabilities and the temperature parameter of plasmas are investigated analytically in the slab and toroidal geometries separately. It is found that the threshold values increase rapidly when the ion temperature becomes much higher than the electron temperature. The change of the threshold values with respect to the ion temperature is quite similar for both geometric models. Our results are consistent with the PLT observations and also agree well to that of the numerical calculations.