

一般 Kerr-Newman 黑洞的 Dirac 粒子的 Hawking 蒸发

须重明 沈有根

(复旦大学物理系)

1981年5月12日收到

提 要

本文把极端 Kerr-Newman 黑洞的 Dirac 粒子的 Hawking 蒸发问题^[3,4]推广到一般 Kerr-Newman 黑洞,并在黑洞的视界附近通过适当的变换找到了静止质量不为零的 Dirac 方程的有物理意义的解,导出了 Hawking 热谱公式,从而解决了 Dirac 粒子在一般 Kerr-Newman 黑洞背景下的 Hawking 蒸发问题.

一、引 言

1974年 Hawking^[1]已指出,有可能存在一种量子过程,使得黑洞的不可约质量通过“蒸发”而逐渐减少,这种量子过程称为 Hawking 过程.

1976年 Damour 和 Ruffini^[2]利用 Klein 等方案讨论了 Schwarzschild 背景时空和 Kerr 背景时空的 Klein-Gordon 粒子的 Hawking 蒸发问题.

最近刘辽等^[3,4]用了 Chandrasekhar^[5]和 Page^[6]分别在 1976 年找到的 Kerr 背景时空和 Kerr-Newman 背景时空中静止质量不为零的 Dirac 方程,在准极端黑洞的事件视界附近找到了静止质量不为零的 Dirac 方程解,并导出了相应的 Hawking 热谱公式.

本文进一步通过适当的变换,求得了一般 Kerr-Newman 黑洞在视界附近静止质量不为零的 Dirac 方程的解,这个解是有物理意义的,并导出了相应的 Hawking 热谱公式.

二、Kerr-Newman 背景时空下的 Dirac 方程

Page^[6,4]在 1976 年得到了退耦的和分离变量的 Dirac 方程为

$$\sqrt{\Delta} \frac{d}{dr} \sqrt{\Delta} \frac{dR_{-\frac{1}{2}}}{dr} - \frac{i\mu\Delta}{\lambda + i\mu r} \frac{dR_{-\frac{1}{2}}}{dr} + \left[\frac{K^2 + i(r-\mu)K}{\Delta} + 2i\omega r - ieQ + \frac{\mu K}{\lambda + i\mu r} - \mu^2 r^2 - \lambda^2 \right] R_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS_{-\frac{1}{2}}}{d\theta} \right) + \frac{a\mu \sin\theta}{\lambda + a\mu \cos\theta} \frac{dS_{-\frac{1}{2}}}{d\theta} + \left[\left(\frac{1}{2} - a\omega \cos\theta \right)^2 \right]$$

$$+ \left(\frac{-m + \frac{1}{2} \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - \frac{3}{4} + 2a\omega m - a^2\omega^2 + \frac{a\mu \left(\frac{1}{2} \cos \theta + a\omega \sin^2 \theta - m \right)}{\lambda + a\mu \cos \theta} - a^2\mu^2 \cos^2 \theta + \lambda^2 \Big] S_{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (2)$$

此处 $R_{-\frac{1}{2}}, S_{-\frac{1}{2}}$ 分别为径向和角向波函数. 式中

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr; \quad K = (r^2 + a^2)\omega - am - eQr,$$

其中 M 为黑洞质量, a 为黑洞单位质量的角动量, m 为磁量子数, M 为 Dirac 粒子质量, ω 为角频率, λ 为分离变量中的常数, e 为 Dirac 粒子的电荷量, Q 为黑洞的电荷量.

对于 Hawking 蒸发问题, 仅需考虑径向方程 (1).

三、一般 Kerr-Newman 黑洞外视界附近 Dirac 粒子的 Hawking 蒸发

下面在外视界 ($r = r_+$) 附近求解方程 (1). 为此引入缓变坐标

$$\hat{r} = \ln(r - r_+), \quad (3)$$

其中 $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ 为外视界的半径 (同样有 $r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$).

由 (3) 式得如下关系:

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = \frac{1}{r - r_+}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\hat{r}}{dr} \frac{d}{d\hat{r}} = \frac{1}{r - r_+} \frac{d}{d\hat{r}}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r - r_+} \frac{d}{d\hat{r}} \right) = \frac{1}{(r - r_+)^2} \frac{d^2}{d\hat{r}^2} - \frac{1}{(r - r_+)^2} \frac{d}{d\hat{r}}. \quad (6)$$

把 (3) — (6) 式变换代入 (1) 式, 并乘 $1/\Delta$, 取极限 $r \rightarrow r_+$, 则在外视界 r_+ 附近, (1) 式化为

$$\frac{d^2 R_{-\frac{1}{2}}}{d\hat{r}^2} - \frac{1}{2} \frac{d R_{-\frac{1}{2}}}{d\hat{r}} + \left[\frac{K^2}{4(M^2 - a^2 - Q^2)} + \frac{iK}{4\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right] R_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad (7)$$

其中 K 在外视界附近为常数有

$$K = (r_+^2 + a^2) \left(\omega - \frac{am + eQr_+}{r_+^2 + Q^2} \right) = (r_+^2 + a^2)(\omega - \omega_0). \quad (8)$$

上式 ω_0 定义如下:

$$\omega_0 = m\Omega + eV. \quad (9)$$

此处, $\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} - Q^2}$ 为视界旋转角速度; $V = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} = Q(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) / (2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} - Q^2)$ 为视界 $Q = 0$ 处的电势.

(7) 式是一个二阶常系数微分方程, 特征根为

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{Ki}{2\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}, \quad (10)$$

$$p_2 = \frac{Ki}{2\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}. \quad (11)$$

对应通解为

$$R_{-\frac{1}{2}} = c_1 e^{p_1 r} + c_2 e^{p_2 r}. \quad (12)$$

对于 Hawking 蒸发只要考虑 $\omega > \omega_0$ 的出射波 (实际上, $\omega < \omega_0$ 对应于另一种黑洞辐射, 称为 Starobinsky-Unruh 辐射, 本文不考虑), 则(12)式中 $c_1 = 0$, 把(9)式代入(11)式并考虑到

$$r_+^2 + a^2 = 2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} - Q^2 = 2Mr_+ - Q^2. \quad (13)$$

则

$$R_{-\frac{1}{2}} = c_2 \exp \left\{ i(\omega - \omega_0) \frac{2Mr_+ - Q^2}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \ln(r - r_+) \right\}. \quad (14)$$

令

$$\frac{2Mr_+ - Q^2}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \ln(r - r_+) = r',$$

计入含时间的因子, 则视界向外的出射波波函数为

$$\phi_{\omega}^{\text{out}} \sim c_2 e^{p_2 r'} e^{-i\omega t} = c_2 e^{-i\omega(t-r')} e^{-i\omega_0 r'}, \quad (15)$$

对入射波 ($c_2 = 0$) 同样有

$$\phi_{\omega}^{\text{in}} \sim c_1 e^{p_1 r'} e^{-i\omega t} = c_1 \sqrt{r - r_+} e^{-i\omega(t+r')} e^{i\omega_0 r'}. \quad (16)$$

引入黑洞表面的重力加速度

$$\eta = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2Mr_+ - Q^2} = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}, \quad (17)$$

则对 $r > r_+$ 有

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}^{\text{out}} &\sim c_2 e^{-i\omega t} e^{i(\omega - \omega_0) \frac{1}{2\eta} \ln(r - r_+)} \\ &= c_2 e^{-i\omega t} (r - r_+) e^{i \frac{(\omega - \omega_0)}{2\eta}}. \end{aligned} \quad (18)$$

当考虑到极端黑洞 $M^2 - a^2 = \delta^2$ 为小量, 以上各式回到文献 [3, 4] 的情况.

类似于文献[2], 用 Klein 方案把 Kerr 黑洞视界外的出射波解析延拓到视界的内部. 通过复平面内以 r_+ 为中心, $|r - r_+| = \epsilon$ 为半径的下半圆周解析延拓进去 (ϵ 为一无穷小量), 此时

$$(r - r_+) \rightarrow |r - r_+| e^{-i\pi} = (r_+ - r) e^{-i\pi}. \quad (19)$$

经过解析延拓后的出射波函数为

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}^{\text{out}} &\sim c_2 e^{-i\omega t} [(r_+ - r) e^{-i\pi}] e^{i \frac{\omega - \omega_0}{2\eta}} \\ &= c_2 e^{-i\omega t} (r_+ - r) e^{i \frac{\omega - \omega_0}{2\eta}} e^{-i\pi}. \end{aligned} \quad (20)$$

引入阶跃函数

$$y(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0; \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad (21)$$

则可将出射波函数(18)和(20)式统一写成

$$\begin{aligned}\Phi &= N_{\omega}(y(r-r_+)e^{-i\omega t}(r-r_+)^{i\frac{\omega-\omega_0}{2\eta}} + y(r_+-r)e^{\frac{\pi}{2\eta}(\omega-\omega_0)}(r_+-r)^{i\frac{\omega-\omega_0}{2\eta}}e^{-i\omega t}) \\ &= N_{\omega}(y(r-r_+)\phi_{\omega}^{\text{out}}(r-r_+) + y(r_+-r)e^{\frac{\pi}{2\eta}(\omega-\omega_0)}\phi_{\omega}^{\text{out}}(r_+-r)),\end{aligned}\quad (22)$$

式中 $\phi_{\omega}^{\text{out}}$ 是已经归一化了的波函数, N_{ω} 是归一化系数.

上式在视界外代表强度为 N_{ω}^2 从视界向外的出射正能粒子流. 在视界内, 由于时空倒转, r 代表时间轴, 上式表示在引力场中逆着时间前进的正能粒子流, 也即引力场中顺着时间向奇异区传播的负能反粒子流. 因此把视界外的 Dirac 粒子的出射波函数, 解析延拓到视界内, 在物理上就表示在 Kerr 黑洞的外视界 ($r = r_+$) 附近有正反 Dirac 粒子对的产生, 其中负能粒子落入 Kerr 黑洞, 减少 Kerr 黑洞的不可约质量, 正能粒子形成 Kerr 黑洞的发射.

由 Φ 的归一化条件, 并考虑到 $y(r-r_+)\phi_{\omega}^{\text{out}}(r-r_+)$ 与 $y(r_+-r)\phi_{\omega}^{\text{out}}(r_+-r)$ 自身归一, 相互正交. 由

$$(\Phi, \Phi) = N_{\omega}^2(e^{\frac{1}{2\eta}2\pi(\omega-\omega_0)} + 1) = 1, \quad (23)$$

可得

$$N_{\omega}^2 = \frac{1}{1 + e^{\frac{\omega-\omega_0}{KT}}}, \quad (24)$$

式中

$$T = \eta/\pi k, \quad (25)$$

就是黑洞温度, k 为玻耳兹曼常数. (24)式即一般 Kerr-Newman 黑洞的 Dirac 粒子的 Hawking 热谱公式. (25)式与文献[3,4]中 T 的定义(见文献[3]中(53)式)差一个 2, 这是由于文献[3]用了 Eddington-Finkelstein 变换, 时间轴不是 t 而是 v 的缘故.

四、讨 论

至此我们已在最普遍的情况: 一般荷电旋转的 Kerr-Newman 黑洞下讨论了 Dirac 粒子的 Hawking 蒸发问题. (24)式表明确实最普遍的情况下存在具有热谱形式的 Hawking 蒸发. 文献[2—4]中的波函数 $\phi_{\omega}^{\text{out}}$, ω_0 , η 和热谱公式是作为特例包含在本文中. 现分别讨论如下:

1. 极端 Kerr-Newman 黑洞的情况 $M^2 - a^2 - Q^2 = \delta^2$, 本文方程(7)退化为文献[4]中(14)式, 文献[4]中所得的解均可作为 δ 为小量时本文的特例. 这时热谱公式(24)式即为文献[4]中(21)式, 若考虑到 $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \doteq M + \delta$, 并代入(17), (18)和(20)式得

$$\eta = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{r_+ - r_-}{M^2 + a^2} \right), \quad (26)$$

$$(r > r_+) \quad \phi_{\omega}^{\text{out}} \sim c_2 e^{-i\omega t} (r - M - \delta)^{i\frac{\omega-\omega_0}{2\eta}}, \quad (27)$$

$$(r < r_+) \quad \phi_{\omega}^{\text{out}} \sim c_2 e^{-i\omega t} (M + \delta - r)^{i\frac{\omega-\omega_0}{2\eta}} e^{\frac{\omega-\omega_0}{2\eta}\pi}. \quad (28)$$

(26), (27) 和 (28) 式正与文献 [4] 中黑洞表面加速度 K 和波函数 $\phi_{\omega}^{\text{out}}$ (见文献 [4] 中 (18) 和 (19) 式) 的表示相当.

2. 当 $Q = 0$ 时, (9), (17), (18) 和 (20) 式退化为

$$\omega_0 = \frac{am}{2Mr_+} = \Omega m, \quad (29)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}, \quad (30)$$

$$r > r_+ \quad \phi_{\omega}^{\text{out}} \sim c_2 e^{-i\omega t} (r - r_+)^{i \frac{\omega - \omega_0}{2\eta}}, \quad (31)$$

$$r < r_+ \quad \phi_{\omega}^{\text{out}} \sim c_2 e^{-i\omega t} (r_+ - r)^{i \frac{\omega - \omega_0}{2\eta}} e^{\frac{\omega - \omega_0}{2\eta} \pi}. \quad (32)$$

此即为一般 Kerr 黑洞下的公式, 当考虑到极端 Kerr 黑洞的情况 $M^2 - a^2 = \delta^2$, δ^2 为小量, 则 (29) — (32) 式分别对应文献 [3] 中 (39), (45), (46) 和 (48) 式. 由于本文未用 Eddington-Finkelstein 坐标, 所以形式略有不同. 同样 (24) 式热谱公式即为文献 [3] 中的 (52) 式.

3. 当 $Q \neq 0$, $a = 0$, 退化为 Reissner-Nordström 黑洞的 Dirac 粒子的 Hawking 辐射.

4. 当 $Q = 0$, $a = 0$, 上面所有公式即退化为文献 [2] 所讨论过的 Schwarzschild 黑洞的 Dirac 粒子的 Hawking 蒸发.

北京师范大学刘辽同志曾在工作中给以热情帮助, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.
- [2] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 332.
- [3] 刘辽、许殿彦, *物理学报*, **29**(1980), 1617.
- [4] 赵峥、桂元星、刘辽, *天体物理学报*, **1**(1981), 141.
- [5] S. Chandrasekhav, *Proc. Roy. Soc. London*, **A349**(1976), 571.
- [6] D. N. Page, *Phys. Rev. D*, **14**(1976), 1509.

THE HAWKING EVAPORATION OF DIRAC PARTICLES IN GENERAL KERR-NEWMAN BLACK HOLE BACKGROUND

XU CHONG-MING SHEN YOU-GEN

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

In this paper, we have extended the Hawking evaporation of Dirac particles in extreme Kerr and Kerr-Newman black hole background^[3,4] to the case of general Kerr-Newman black hole. The physical solutions of the Dirac equation with non-zero rest mass are found outside the event horizon of a general Kerr-Newman black hole by a proper transformation. The Hawking thermal spectra formula is also derived. The problem of the Hawking evaporation of Dirac particles in general Kerr-Newman black hole background have been solved. (ref. [6]).